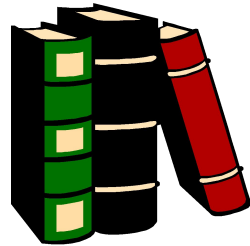




# КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



## Дифференциальные уравнения

### Лекция № 7

Метод вариации произвольных постоянных для  
решения ЛНДУ 2-го порядка.  
Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го  
порядка.



# Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

- Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \quad (1)$$

где  $P(x)$ ,  $Q(x)$  и  $f(x)$ -непрерывные функции на  $(a, b)$ .

Соответствующее ЛОДУ записывается в виде:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (2)$$

Метод вариации произвольных постоянных применяется для отыскания частного решения ЛНДУ 2-го порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть известно общее решение ЛОДУ(2):

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3)$$

где  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  – линейно независимые на некотором интервале  $(a, b)$  решения ЛОДУ (2), а  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

Будем искать частное решение ЛНДУ в форме (3), считая, что  $C_1, C_2$  не произвольные постоянные, а некоторые, пока неизвестные функции от  $x$ .

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \quad (4)$$

Дифференцируя формулу (4), будем иметь;

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x).$$

Наложим на функции  $C_1(x), C_2(x)$  условие:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0,$$

тогда

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Дифференцируя еще раз, находим :

$$y''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x).$$

Подставим  $y(x), y'(x), y''(x)$  в ЛНДУ(1)  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ :

$$C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + P(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + Q(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = f(x)$$

или

$$C_1(x)(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)) + C_2(x)(y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x),$$

так как  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ -решения ЛОДУ(2), то

$$y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x) \equiv 0,$$

$$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Таким образом функция  $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$  будет решением ЛНДУ (1) в том случае, если функции  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W_{y_1, y_2}(x).$$

Так как определителем этой системы является определитель Вронского для двух линейно независимых на  $(a, b)$  решений соответствующего ЛОДУ, то он не обращается в ноль ни в одной точке интервала  $(a, b)$ .

Следовательно, система имеет однозначное решение:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi_1(x) \\ C_2'(x) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

Интегрируя, получим:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + \overline{C}_2,$$

где

$\overline{C}_1, \overline{C}_2$ - произвольные постоянные.

Т.к искали частное решение, то можно взять  $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$

Если в полученных выражениях сохранить постоянные, то возвращаясь в равенство (4), получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = \left( \int \varphi_1(x) dx + \overline{C_1} \right) y_1(x) + \left( \int \varphi_2(x) dx + \overline{C_2} \right) y_2(x).$$

$$y(x) = y_1(x) \int \varphi_1(x) dx + \overline{C_1} y_1(x) + y_2(x) \int \varphi_2(x) dx + \overline{C_2} y_2(x),$$

где

$$y_0(x) = \overline{C_1} y_1(x) + \overline{C_2} y_2(x) \text{ — общее решение ЛОДУ(2),}$$

$$y_{\text{чн}}(x) = y_1(x) \int \varphi_1(x) dx + y_2(x) \int \varphi_2(x) dx \text{ — частное решение ЛНДУ(1)}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_{\text{чн}}(x)$$

**Пример 1.** Решить уравнение:  $xy'' - y' = x^2$ .

Решение. Используем метод вариации произвольных постоянных.

1) Решим соответствующее ЛОДУ:

$$xy'' - y' = 0$$

Замена:  $y' = z(x)$ ,  $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$ ,

$$x \frac{dz}{dx} - z = 0$$

$$xdz = zdx$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|\widetilde{C}_1|$$

$$z = \widetilde{C}_1 x \Rightarrow y' = \widetilde{C}_1 x$$

$$y = \int \widetilde{C}_1 x dx = \widetilde{C}_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

или

$$y_0(x) = C_1 x^2 + C_2 - \text{общее решение ЛОДУ.}$$

Значит,

$y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = 1$  — фундаментальная система решений ЛОДУ.

2) Общее решение ЛНДУ ищем в виде:

$$y(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x) \quad (*)$$

Для нахождения  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 C_1'(x) + C_2'(x) = 0 \\ 2x C_1'(x) + 0 \cdot C_2'(x) = x \end{cases}$$

Откуда получаем:  $C_1'(x) = \frac{1}{2}$ ,  $C_2'(x) = -\frac{x^2}{2}$ .

Тогда,  $C_1(x) = \frac{1}{2} \int dx = \frac{x}{2} + \bar{C}_1$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2} \int x^2 dx = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$



Итак,

$$C_1(x) = \frac{x}{2} + \bar{C}_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$

Подставляя найденные функции в выражение (\*), запишем общее решение исходного ЛНДУ:

$$y(x) = \left(\frac{x}{2} + \bar{C}_1\right)x^2 - \frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$

или

$$y(x) = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3},$$

где  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  – произвольные постоянные.

Ответ.  $y(x) = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3}$

**Пример 2.** Решить уравнение:  $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$

Решение.

Правая часть данного ЛНДУ:  $\frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$  не соответствует методу подбора частного решения этого уравнения.

Поэтому используем метод вариации произвольных постоянных.

1) Решим соответствующее ЛОДУ:

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

Его характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = 36 - 32 = 4, \xi \bar{\lambda} = 2$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$$

Получены различные действительные корни, откуда заключаем;

$y_1(x) = e^{2x}; y_2(x) = e^{4x}$  - фундаментальная система решений ЛОДУ;

$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$  - общее решение ЛОДУ,

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

2) Общее решение ЛНДУ ищем в виде:

$$y(x) = y_1(x)x^{2x} + y_2(x)x^{4x} \quad (*)$$

Для нахождения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  составим систему:

$$\begin{cases} y_1'(x)x^{2x} + y_2'(x)x^{4x} = 0 \\ y_1'(x)x^{2x} + y_2'(x)x^{4x} = y(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x)x^{2x} + y_2'(x)x^{4x} = 0 \\ y_1'(x)x^{2x} + y_2'(x)x^{4x} = \frac{4x^{2x}}{1+x^{-2x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2' x^{4x} = \frac{4x^{2x}}{1+x^{-2x}} \\ y_1'(x)x^{2x} + y_2'(x)x^{4x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2' = \frac{2}{x^{2x} + 1} \\ x_1'(x) = -\frac{2x^{2x}}{x^{2x} + 1} \end{cases}$$

Следовательно, находим:

$$\int_1^x \frac{2x}{x^2+1} dx = -2 \int \frac{x^{2x}}{x^{2x}+1} dx = -2 \int \frac{1}{2} \frac{x^{2x}+1}{x^{2x}+1} = -\ln(x^{2x}+1) + C_1;$$

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{2x}{x^2+1} dx &= \int \frac{2x}{x^2+1} = \int \frac{2x}{2x} = \int \frac{x}{x(x+1)} = \int \frac{x}{x(x+1)} = \int \frac{(x+1)-1}{x(x+1)} = \\ &= \int \frac{x}{x} - \int \frac{1}{x+1} = \int 1 - \int \frac{1}{x+1} = 2x - \ln(x^{2x}+1) + C_2 \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_1^x \frac{2x}{x^2+1} dx = -\ln(x^{2x}+1) + C_1,$$

$$\int_2^x \frac{2x}{x^2+1} dx = 2x - \ln(x^{2x}+1) + C_2.$$

Следовательно, общее решение данного ЛНДУ можно записать, подставляя  $\int_1^x \frac{2x}{x^2+1} dx$ ,  $\int_2^x \frac{2x}{x^2+1} dx$  в выражение  $y(x)$ :

$$y(x) = (-\ln(x^{2x}+1) + C_1)x^{2x} + (2x - \ln(x^{2x}+1) + C_2)x^{4x},$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

Ответ:  $y(x) = (-\ln(x^{2x}+1) + C_1)x^{2x} + (2x - \ln(x^{2x}+1) + C_2)x^{4x}$

■ **Пример 3.** Решить задачу Коши:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

1) Решим соответствующее ЛОДУ:

$$y'' + y = 0$$

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 = -1$$

$$k = \pm i \quad (\alpha = 0, \beta = 1)$$

Следовательно, общим решением ЛОДУ будет функция:

$$y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные,

а  $y_1(x) = \sin x, y_2(x) = \cos x$  – ФСР ЛОДУ.

2) Общее решение ЛНДУ ищем в виде:

$$y(x) = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

(\*)

Для нахождения  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  составим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \sin x + C_2'(x) \cdot \cos x = 0 \\ C_1'(x) \cdot (\sin x)' + C_2'(x) \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cdot \cos x = 0 \\ C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1,$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = 1.$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = -1.$$

$$C_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + \bar{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int -dx = -x + \bar{C}_2.$$

Итак,

$$C_1(x) = \ln|\sin x| + \bar{C}_1$$

$$C_2(x) = -x + \bar{C}_2$$

Подставляя найденные функции в выражение (\*), запишем общее решение исходного ЛНДУ:

$$y(x) = \sin x (\ln|\sin x| + \bar{C}_1) + (\bar{C}_2 - x) \cos x \quad (*)$$

где  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  – произвольные постоянные.

3) Найдем частное решение ЛНДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям:  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ ;  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

Продифференцируем  $y(x) = \sin x (\ln|\sin x| + \bar{C}_1) + (\bar{C}_2 - x) \cos x$ ,

$$y'(x) = \cos x (\ln|\sin x| + \bar{C}_1) + \sin x \left(\frac{\cos x}{\sin x} + 0\right) + (-1) \cos x + (\bar{C}_2 - x)(-\sin x).$$

Подставим начальные условия  $y(x)$  и  $y'(x)$ :

$$\begin{cases} 2 = \sin \frac{\pi}{2} \left(\ln \left|\sin \frac{\pi}{2}\right| + \bar{C}_1\right) + \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\ln \left|\sin \frac{\pi}{2}\right| + \bar{C}_1\right) + \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} + 0\right) - \cos \frac{\pi}{2} - \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2 = 1 \cdot (0 + \bar{C}_1) + \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 \\ \frac{\pi}{2} = 0 \cdot (0 + \bar{C}_1) + 1 \cdot \left(\frac{0}{1} + 0\right) - 0 - \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{C}_1 = 2 \\ \frac{\pi}{2} = -\bar{C}_2 + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{C}_1 = 2 \\ \bar{C}_2 = 0. \end{cases}$$

Найденные значения  $\bar{C}_1$   $\bar{C}_2$  подставим в общее решение (\*):

$$y = \sin x (\ln|\sin x| + 2) - x \cos x \quad \text{— частное решение ЛНДУ}$$

Ответ:  $y = \sin x (\ln|\sin x| + 2) - x \cos x$ .

# Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

**Определение1.** Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{(n-1)}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (5)$$

**Определение2.** Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ)  $n$ -го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{(n-1)}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad (6)$$

где  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$  непрерывны в интервале  $(a, b)$

**Теорема 1.** (существования и единственности решения начальной задачи).

Пусть функции  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$  определены и непрерывны на интервале  $(a, b)$ . Тогда дифференциальные уравнения (5) и (6) при любых начальных значениях  $x_0 \in (a, b), y_0, \dots, y_{n-1} \in R$  имеют единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

## Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

**Замечание.** Все свойства решений ЛОДУ 2-порядка относятся и к ЛОДУ  $n$ -го порядка (см. Лекцию №4)

Если функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  являются частными решениями ЛОДУ

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{(n-1)}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

то необходимым и достаточным условием линейной независимости этих функций является то, что определитель Вронского этих функций не равен нулю ни в одной точке  $(a, b)$ , т. е.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

**Определение.** Функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , определенные на интервале  $(a, b)$ , называются линейно независимыми в этом интервале, если равенство  $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

выполняется только в том случае, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

■

**Определение 3.** Любые  $n$  линейно независимых решений ЛОДУ (6) называются *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

**Теорема 2.** (о структуре общего решения ЛОДУ  $n$ -го порядка).

Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ (6). Тогда общее решение этого уравнения задается формулой:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

Где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные.

## Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

**Теорема 2.** (о структуре общего решения ЛНДУ  $n$ -го порядка).

Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ(6). Пусть  $\varphi(x)$  – некоторое частное решение ЛНДУ(5). Тогда общее решение ЛНДУ(5) задается формулой:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + \varphi(x),$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \text{ – общее решение ЛОДУ(6),}$$
$$y_{\text{чн}}(x) = \varphi(x)$$

$$y(x) = y_0(x) + y_{\text{чн}}(x)$$

## Линейные однородные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

**Определение.** ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{(n-1)} y' + p_n y = 0, \quad (7)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$  — постоянные действительные числа.

Построение фундаментальной системы решений ЛОДУ делается методом Эйлера, который состоит в том, что частное решение ЛОДУ ищется в виде  $y(x) = e^{kx}$ .

Подставляя эту функцию в уравнение (7), после сокращения на  $e^{kx}$  получим характеристическое уравнение:

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0 \quad (8)$$

## Различают четыре случая.

**I.** Корни характеристического уравнения действительны и различны:

$k_1, k_2, \dots, k_n$  – разные действительные числа.

Тогда функции  $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}, \dots, y_n = e^{k_nx}$  образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x} + \dots + C_n e^{k_nx}.$$

**II.** Среди корней характеристического уравнения имеются действительные кратные корни.

Пусть  $k_1 = k_2 = \dots = k_s$ .

Тогда решения вида:

$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = x e^{k_1x}, \dots, y_s = x^{s-1} e^{k_1x}$  составляют часть фундаментальной системы решений.



**III.** Среди корней характеристического уравнения имеются комплексно-сопряженные корни (нет среди них кратных).

Пусть, например,

$$k_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i \Rightarrow y_1 = e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, y_2 = e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x$$

$$k_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i, \Rightarrow y_3 = e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x, y_4 = e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x$$

**IV.** Среди корней характеристического уравнения имеются кратные (кратности  $s$ ) комплексно-сопряженные корни.

Пусть характеристического уравнения (8) имеет комплексно-сопряженную пару корней  $\alpha \pm \beta i$  кратности  $s \geq 1$ . Тогда ей в фундаментальной системе соответствует  $2s$  функций вида:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_5 = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, y_6 = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

.....

$$y_{2s-1} = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, y_{2s} = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

**Пример4.** Решить уравнение:  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ .

Решение. Это ЛОДУ третьего порядка.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0.$$

Для решения этого уравнения выполним разложение его левой части на множители:

$$(k^3 - k^2) + (4k - 4) = 0$$

$$k^2(k - 1) + 4(k - 1) = 0$$

$$(k - 1)(k^2 + 4) = 0$$

$$1) k - 1 = 0 \quad 2) k^2 + 4 = 0$$

$$k_1 = 1. \quad k^2 = -4$$

$$k_{2,3} = \pm 2i \quad (\alpha = 0; \beta = 2).$$

Следовательно, корнями характеристического уравнения являются числа:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i$$

Значит, функции  $y_1(x) = e^x$ ;  $y_2(x) = \cos 2x$ ;  $y_3(x) = \sin 2x$  составляют фундаментальную систему решений данного уравнения. Поэтому общее решение можно записать в виде:

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x,$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – произвольные постоянные.

Ответ:  $y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$ .

**Пример 5.** Найти общее решение уравнения:

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Решение: Уравнение (6) ЛОДУ четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$y^4 - 4y^3 + 8y^2 - 8y + 4 = 0 \quad \vee \quad (y^2 - 2y + 2)^2 = 0 \quad \vee$$

$$\vee \quad y^2 - 2y + 2 = 0 \quad \vee \quad y_{1,2} = 1 \pm i \quad (\lambda = 1, \mu = 1)$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет пару комплексно – сопряженных двукратных корней  $s=2$ .

Следовательно, ФСР:

$$y_1 = e^{i(x-1)}, y_2 = e^{-i(x-1)},$$

$$y_3 = e^{i(x-1)}(x-1), y_4 = e^{-i(x-1)}(x-1)$$

Находим общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 e^{i(x-1)} \cos(x-1) + C_3 y_2 + C_4 e^{-i(x-1)} \sin(x-1)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  - произвольные постоянные.

$$\text{Ответ: } y = C_1 y_1 + C_2 e^{i(x-1)} \cos(x-1) + C_3 y_2 + C_4 e^{-i(x-1)} \sin(x-1)$$

# Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами



**Определение.** ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{(n-1)} y' + p_n y = f(x), \quad (7)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$  — постоянные действительные числа.

# Решение ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов

## ■ Случай1.

$$f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где  $\alpha$ -некоторое число,  $P_m(x)$ - многочлен степени  $m$ .

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

**Вид частного решения.**

$$y_{\text{чн}}(x) = x^s Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где  $Q_m(x)$ - многочлен степени  $m$  с неопределенными коэффициентами,  $s$  равно кратности числа  $\alpha$  как корня характеристического уравнения:

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0$$

## Метод неопределенных коэффициентов

- записать  $Q_m(x)$  как многочлен общего вида степени  $m$  с неизвестными коэффициентами:

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m;$$

- подставить в исходное уравнение (5) вместо  $y(x)$  функцию  $y_{\text{чн}}(x)$ ;
- приравнять коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях полученного равенства.

Будет получена система  $(m + 1)$ -го линейного алгебраического уравнения с постоянными коэффициентами, из которой определяют числа  $b_0, b_1, \dots, b_m$

Пример 6. Решить уравнение:

$$y^{(4)} + y'' = y^2 + y$$

Решение: 1) Решим соответствующее ЛОДУ

$$y^{(4)} + y'' = 0$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

Имеет корни:  $\lambda_1 = 0$  ( $\lambda_1 = 2$ ),  $\lambda_{2,3} = \pm i$  ( $\lambda_{2,3} = 1$ ),

Следовательно, находим фундаментальную систему решений уравнения ЛОДУ:

$$\lambda_1 \text{ решение} = 1 \quad \lambda_2 \text{ решение} = x \quad \lambda_3 \text{ решение} = \cos x \quad \lambda_4 \text{ решение} = \sin x$$

Общее решение  $y_{\text{ЛОДУ}}(x)$  уравнения (1) вычисляем по формуле:

$$y_{\text{ЛОДУ}}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные.



2) Найдем частное решение ЛНДУ, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов.

В данном случае  $\varphi(x) = x^2 + 1 = x^{0\alpha}(x^2 + 1)$ , где  $\alpha = 0$ ,

$m = 2$ . Поэтому  $s = 2$  (т.к.  $\alpha = 0 = 0$ , кратность корня  $\lambda = 0$  равна двум)

$$\varphi_{\text{ЧН}}(x) = x^2 \varphi(x)^2 + \varphi(x) + 1 = x^4 + x^3 + x^2 \quad (*)$$

Следовательно,

$$\varphi_{\text{ЧН}}'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$\varphi_{\text{ЧН}}''(x) = 12x^2 + 6x + 2$$

$$\varphi_{\text{ЧН}}'''(x) = 24x + 6$$

$$\varphi_{\text{ЧН}}^{(4)}(x) = 24$$

Подставив в исходное уравнение  $\varphi_{\text{ЧН}}'(x)$ ,  $\varphi_{\text{ЧН}}^{(4)}(x)$  соответственно, получим равенство:

$$12x^2 + 6x + 24A + 2x = x^2 + 1$$

Приравнявая здесь коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  приходим к системе:

$$\begin{aligned}
 12A &= 1 & A &= \frac{1}{12} \\
 6B &= 1 & \text{откуда получим } B &= \frac{1}{6} \\
 24A + 2C &= 0 & C &= -1
 \end{aligned}$$

Следовательно, находим частное решение ЛНДУ:

$$u_{\text{чп}}(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$$

3) Найдем общее решение ЛНДУ:

$$u = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные.

**Ответ:**

$$u = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2.$$

## ■ Случай2.

$$f(x) = (P_{m_1}(x) \cdot \cos\beta x + Q_{m_2}(x) \cdot \sin\beta x)e^{\alpha x},$$

где  $\alpha, \beta$  некоторые числа,

$P_{m_1}(x), Q_{m_2}(x)$ - многочлены от  $x$  степени  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

### **Вид частного решения**

$$y_{\text{чн}}(x) = x^s (M_n(x) \cdot \cos\beta x + T_n(x) \cdot \sin\beta x)e^{\alpha x},$$

где  $M_n(x), T_n(x)$  – многочлены от  $x$  степени  $n = \max(m_1, m_2)$  с  
неопределенными коэффициентами, которые надо определить методом  
неопределенных коэффициентов,

$S$  равно кратности числа  $\alpha + \beta i$  как корня соответствующего  
характеристического уравнения.

Пример 7. Решить уравнение:

$$y''' - 2y'' + y' = 4 \sin x$$

Решение:

1) Найдем решение соответствующего ЛОДУ

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

Его характеристическое уравнение

$$y^3 - 2y^2 + y = 0 \text{ имеет корни}$$

$$y_1 = 0 \quad (y_1 = 1), \quad y_2 = 1 \quad (y_2 = 2).$$

Следовательно, общее решение  $y(x)$  ЛОДУ вычисляется по формуле:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x},$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – произвольные постоянные.

1) Найдем частное решение  $y_{\text{ЧН}}$  ЛНДУ, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов.

В данном примере

$$f(x) = 4 \sin x = (4 \sin x + 0 \cos x)e^{0x}$$

где  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , значит  $\gamma = 0$ ,  $\gamma + \beta = 0$ ,  $s = 0$

$$y_{\text{ЧН}} = A \sin x + B \cos x,$$

Тогда,

$$y'_{\text{ЧН}} = -A \cos x + B \sin x,$$

$$y''_{\text{ЧН}} = A \sin x - B \cos x,$$

$$y'''_{\text{ЧН}} = A \cos x + B \sin x,$$

Подставим найденные производные в исходное уравнение вместо

$y, y', y'', y'''$  соответственно:

$$A \sin x + 2A - A \sin x + B - A + 2B + A \cos x = 4 \sin x + 0 \cos x.$$

Приравнивая здесь подобные члены в правой и левой частях, получаем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 = 4 & x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 & x_3 = 2 \end{cases}$$

Следовательно, найдено частное решение ЛНДУ:  $x_{\text{чн}} = 2x_1 + 2x_3$

1) Найдем общее решение ЛНДУ:

$$x = x_1 + (x_2 + x_3) x^m + 2x_1 + 2x_3$$

Где  $C_1, C_2, C_3$  – произвольные постоянные

Ответ:  $x = x_1 + (x_2 + x_3) x^m + 2x_1 + 2x_3$

# Метод вариации произвольных постоянных

Пусть дано уравнение:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

и общее решение соответствующего ЛОДУ

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$  имеет вид:

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

Функцию  $y_n(x)$  ищем в виде:

$$y_n(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x),$$

Для нахождения  $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$  составим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \dots + c_n'(x) y_n(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + \dots + c_n'(x) y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ c_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{array} \right.$$

И решая ее, получим  $c'_1(x), c'_2(x), \dots, c'_n(x)$ , а затем, интегрируя, находим  $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ .

Следовательно, частным решением ЛНДУ будет функция:

$$y_{inh}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x).$$

Значит, общим решением ЛНДУ является:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_{inh}(x),$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – произвольные постоянные.





**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**

**УСПЕХОВ!**