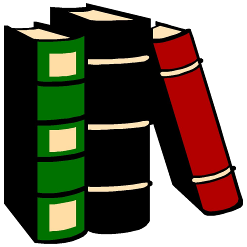
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 7

Метод вариации произвольных постоянных для решения ЛНДУ 2-го порядка.
Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

- Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $P(x), Q(x)$и $f(x)$-непрерывные функции на (a, b).

Соответствующее ЛОДУ записывается в виде:

$$y''+P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (2)$$

Метод вариации произвольных постоянных применяется для отыскания частного решения ЛНДУ2-го порядка как с переменными , так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть известно общее решение ЛОДУ(2):

$$y_0(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \qquad (3)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые на некотором интервале (a, b) решения ЛОДУ (2), а C_1,C_2 - произвольные постоянные.

Будем искать частное решение ЛНДУ в форме (3), считая, что C_1,C_2 не произвольные постоянные, а некоторые, пока неизвестные функции от x.

$$\boxed{y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).} \qquad (4)$$

Дифференцируя формулу (4), будем иметь;

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x).$$

Наложим на функции $C_1(x), C_2(x)$условие:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0,$$

тогда

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Дифференцируя еще раз, находим :

$$y''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x).$$

Подставим $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ в ЛНДУ(1) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$:

$C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) +$

$+P(x)\big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big) + Q(x)\big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big) = f(x)$

или

$C_1(x)\big(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)\big) + C_2(x)\big(y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)\big) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x),$

так как $y_1(x)$, $y_2(x)$-решения ЛОДУ(2),то

$$y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x) \equiv 0,$$

$$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Таким образом функция $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет решением ЛНДУ (1)в том случае, если функции $C_1(x)$, $C_2(x)$удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \qquad (5)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W_{y_1,y_2}(x).$$

Так как определителем этой системы является определитель Вронского для двух линейно независимых на (a, b) решений соответствующего ЛОДУ , то он не обращается в ноль ни в одной точке интервала (a, b).

Следовательно, система имеет однозначное решение:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi_1(x) \\ C_2'(x) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

Интегрируя, получим:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C_1},$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C_2},$$

где $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$- произвольные постоянные.

Т.к искали частное решение,то можно взять $\overline{C_1} = \overline{C_2}$=0

Если в полученных выражениях сохранить постоянные , то возвращаясь в равенство (4), получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = \left(\int \varphi_1(x)dx + \overline{C_1}\right)y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x)dx + \overline{C_2}\right)y_2(x).$$

$$y(x) = y_1(x) \int \varphi_1(x)dx + \overline{C_1}\, y_1(x) + y_2(x) \int \varphi_2(x)dx + \overline{C_2}\, y_2(x),$$

где

$y_0(x) = \overline{C_1} y_1(x) + \overline{C_2} y_2(x)$ –общее решение ЛОДУ(2),

$y_{чн}(x) = y_1(x) \int \varphi_1(x)dx + y_2(x) \int \varphi_2(x)dx$ –частное решение ЛНДУ(1)

$$y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$$

Пример1.Решить решение: $xy'' - y' = x^2$.

Решение. Используем метод вариации произвольных постоянных.

1) Решим соответствующее ЛОДУ:

$$xy'' - y' = 0$$

Замена: $y' = z(x), y'' = z' = \frac{dz}{dx}$,

$$x\frac{dz}{dx} - \text{z} = 0$$

$$xdz = zdx$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

$$ln|\text{z}| = ln|x| + ln\left|\widetilde{C_1}\right|$$

$$z = \widetilde{C_1}x \Rightarrow y' = \widetilde{C_1}x$$

$$y = \int \widetilde{C_1}x\,dx = \widetilde{C_1}\frac{x^2}{2} + C_2$$

или $y_0(x) = C_1x^2 + C_2$ – общее решение ЛОДУ.

Значит,

$y_1(x) = x^2, y_2(x) = 1$ –фундаментальная система решений ЛОДУ.

2) Общее решение ЛНДУ ищем в виде:

$$\boxed{y(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x)} \qquad (*)$$

Для нахождения $C_1(x)$, $C_2(x)$ составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 C_1'(x) + C_2'(x) = 0 \\ 2xC_1'(x) + 0\cdot C_2'(x) = x \end{cases}$$

Откуда получаем: $C_1'(x) = \frac{1}{2}$, $C_2'(x) = -\frac{x^2}{2}$.

Тогда, $$C_1(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2} + \bar{C}_1$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int x^2 dx = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$

Итак, $$C_1(x) = \frac{x}{2} + \bar{C}_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$

Подставляя найденные функции в выражение (*),запишем общее решение исходного ЛНДУ:

$$y(x) = \left(\frac{x}{2} + \bar{C}_1\right)x^2 - \frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$

или $$y(x) = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3},$$

где $\bar{C}_1$,$\bar{C}_2$ $-$ произвольные постоянные.

Ответ. $y(x) = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3}$

Пример2. Решить уравнение: $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$

Решение.

Правая часть данного ЛНДУ: $f(x) = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$ не соответствует методу подбора частного решения этого уравнения.

Поэтому используем метод вариации произвольных постоянных.

1) Решим соответствующее ЛОДУ:

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$

$$D = 36 - 32 = 4, \sqrt{D} = 2$$

$$k_1 = 2, \qquad k_2 = 4.$$

Получены различные действительные корни, откуда заключаем;

$y_1(x) = e^{2x}; y_2(x) = e^{4x}$ – *фундаментальная система решений ЛОДУ;*

$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$ – *общее решение ЛОДУ,*

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

2) Общее решение ЛНДУ ищем в виде:

$$\boxed{y(x) = C_1(x)\, e^{2x} + C_2(x)\, e^{4x}} \qquad (*)$$

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{2x} + C_2'(x)\cdot e^{4x} = 0 \\ C_1'(x)\cdot 2e^{2x} + C_2'(x)\cdot 4e^{4x} = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C_2'\cdot e^{4x} = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}} \\ C_1'(x)\cdot e^{2x} + C_2'(x)\cdot e^{4x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = \dfrac{2}{e^{2x}+1} \\ C_1'(x) = -\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \end{cases}$$

Следовательно, находим:

$$C_1(x) = -2\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = -2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = -\ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_1;$$

$$C_2(x) = \int\frac{2dx}{e^{2x}+1} = \left|\begin{matrix} e^{2x} = t \\ 2x = \ln t \\ 2dx = \frac{1}{t}dt \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t(t+1)} = \int\frac{(t+1)-t}{t(t+1)}dt =$$

$$= \int\frac{dt}{t} - \int\frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| + \tilde{C}_2 = 2x - \ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_2$$

Итак, $\quad C_1(x) = -\ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_1,$

$$C_2(x) = 2x - \ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_2.$$

Следовательно, общее решение данного ЛНДУ можно записать, подставляя $C_1(x)$, $C_1(x)$ в выражение [illegible]:

$$y(x) = (-\ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_1)e^{2x} + (2x - \ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_2)e^{4x},$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ – произвольные постоянные.

Ответ: $y(x) = (-\ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_1)e^{2x} + (2x - \ln(e^{2x}+1) + \tilde{C}_2)e^{4x}$

Пример3. Решить задачу Коши:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x};\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,,\ \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

1)Решим соответствующее ЛОДУ:

$$y''+y=0$$
$$k^2+1=0$$
$$k^2=-1$$
$$k=\pm i \quad (\alpha=0, \beta=1)$$

Следовательно, общим решением ЛОДУ будет функция:

$$y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x\,,$$

где $C_1, C_2 -$ произвольные постоянные,

а $y_1(x) = \sin x, y_2(x) = \cos x$ $-$ФСР ЛОДУ.

2)Общее решение ЛНДУ ищем в виде:

$$\boxed{y(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x} \qquad (*)$$

Для нахождения $C_1(x), C_2(x)$ составим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot \sin x + C_2'(x)\cdot \cos x = 0 \\ C_1'(x)\cdot (\sin x)' + C_2'(x)\cdot (\cos x)' = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cdot \cos x = 0 \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1,$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = 1.$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta}=\frac{\cos x}{\sin x}; \qquad C_2'(x)=\frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta}=-1.$$

$$C_1(x)=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=ln|\sin x|+\bar{C}_1,$$

$$C_2(x)=\int -dx=-x+\bar{C}_2.$$

Итак,

$$C_1(x)=ln|\sin x|+\bar{C}_1$$

$$C_2(x)=-x+\bar{C}_2$$

Подставляя найденные функции в выражение (*),запишем общее решение исходного ЛНДУ:

$$\boxed{y(x)=\sin x\,(ln|\sin x|+\bar{C}_1)+(\bar{C}_2-x)\cos x} \qquad (*)$$

где $\bar{C}_1$,$\bar{C}_2$ – произвольные постоянные.

3) Найдем частное решение ЛНДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;\ \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Продифференцируем $y(x) = \sin x\,(\ln|\sin x| + \bar{C}_1) + (\bar{C}_2 - x)\cos x$,

$$y'(x) = \cos x\,(\ln|\sin x| + \bar{C}_1) + \sin x\left(\frac{\cos x}{\sin x} + 0\right) + (-1)\cos x +$$

$$+(\bar{C}_2 - x)(-\sin x).$$

Подставим начальные условия $y(x)$ и $y'(x)$:

$$\begin{cases} 2 = \sin\frac{\pi}{2}\left(\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + \bar{C}_1\right) + \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + \bar{C}_1\right) + \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} + 0\right) - \cos\frac{\pi}{2} - \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 1 \cdot (0 + \bar{C}_1) + \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 \\ \frac{\pi}{2} = 0 \cdot (0 + \bar{C}_1) + 1 \cdot \left(\frac{0}{1} + 0\right) - 0 - \left(\bar{C}_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{C}_1 = 2 \\ \frac{\pi}{2} = -\bar{C}_2 + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{C}_1 = 2 \\ \bar{C}_2 = 0. \end{cases}$$

Найденные значения $\bar{C}_1$ $\bar{C}_2$ подставим в общее решение (*):

$$y = \sin x\,(\ln|\sin x| + 2) - x\cos x \quad -\text{частное решение ЛНДУ}$$

Ответ: $y = \sin x\,(\ln|\sin x| + 2) - x\cos x$.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение1. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{(n-1)}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (5)$$

Определение2. Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{(n-1)}(x)y' + p_n(x)y = 0, \qquad (6)$$

где $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$,$f(x)$ непрерывны в интервале(a, b)

Теорема1.(существования и единственности решения начальной задачи).

Пусть функции $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$,*f(x)* определены и непрерывны на интервале (a, b).Тогда дифференциальные уравнения (5)и (6) при любых начальных значениях $x_0 \epsilon (a, b)$,$y_0, \ldots, y_{n-1} \epsilon R$ имеют единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$y(x_0) = y_0, y'(x_0)$=y_1,…, $y^{n-1}(x_0)$=y_{n-1}

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Замечание. Все свойства решений ЛОДУ 2-порядка относятся и к ЛОДУn-го порядка (см. Лекцию№4)

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ являются частными решениями ЛОДУ

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{(n-1)}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

то необходимым и достаточным условием линейной независимости этих функций является то, что определитель Вронского этих функций не равен нулю ни в одной точке (a, b), т. е.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$, определенные на интервале (a, b), называются *линейно независимыми* в этом интервале, если равенство $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \epsilon (a, b$

выполняется только в том случае, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2, = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Определение3. Любые n линейно независимых решений ЛОДУ (6) называются *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема2.(о структуре общего решения ЛОДУn-го порядка).

Пусть функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ(6). Тогда общее решение этого уравнения задается формулой:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

Где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

Теорема2.(о структуре общего решения ЛНДУn-го порядка).

Пусть функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ(6).Пусть $\varphi(x)$ – некоторое частное решение ЛНДУ(5). Тогда общее решение ЛНДУ(5) задается формулой:

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) + \varphi(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

$y_0(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ – общее решение ЛОДУ(6),
$y_{\text{чн}}(x) = \varphi(x)$

$$y(x) = y_0(x) + y_{\text{чн}}(x)$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение. ЛОДУn-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{(n-1)}y'+p_ny=0, \qquad (7)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ –постоянные действительные числа.

Построение фундаментальной системы решений ЛОДУ делается методом Эйлера, который состоит в том, что частное решение ЛОДУ ищется в виде $y(x)=e^{kx}$.

Подставляя эту функцию в уравнение (7), после сокращения на e^{kx} получим характеристическое уравнение:

$$\boxed{k^n+p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0} \qquad (8)$$

Различают четыре случая.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1, k_2, \ldots, , k_n$ –разные действительные числа.

Тогда функции $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$ образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

II. Среди корней характеристического уравнения имеются действительные кратные корни.

Пусть $k_1 = k_2 = \ldots = k_s$.

Тогда решения вида:

$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = x e^{k_1 x}, \ldots, y_s = x^{s-1} e^{k_1 x}$ составляют часть фундаментальной системы решений.

III. Среди корней характеристического уравнения имеются комплексно -сопряженные корни (нет среди них кратных).

Пусть ,например,

$k_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i \Rightarrow y_1 = e^{\alpha_1 x} cos\, \beta_1 x\,,\, y_2 = e^{\alpha_1 x} sin \beta_1 x$

$k_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i, \Rightarrow y_3 = e^{\alpha_2 x} cos\, \beta_2 x\,,\, y_4 = e^{\alpha_2 x} sin \beta_2 x$

IV. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные (кратности s) комплексно- сопряженные корни.

Пусть характеристического уравнения(8) имеет комплексно-сопряженную пару корней $\alpha \pm \beta i$ кратности $s \geq 1$. Тогда ей в фундаментальной системе соответствует 2s функций вида:

$y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x\,,\, y_2 = e^{\alpha x} sin \beta x,$

$y_3 = x e^{\alpha x} cos\beta x\,,\, y_4 = x e^{\alpha x} sin \beta x,$

$y_5 = x^2 e^{\alpha x} cos\beta x\,,\, y_6 = x^2 e^{\alpha x} sin \beta x,$

....

$y_{2s-1} = x^{s-1} e^{\alpha x} cos\beta x\,,\, y_{2s} = x^{s-1} e^{\alpha x} sin \beta x.$

Пример4. Решить уравнение: $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$

Решение. Это ЛОДУ третьего порядка.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0.$$

Для решения этого уравнения выполним разложение его левой части на множители:

$$(k^3 - k^2) + (4k - 4) = 0$$

$$k^2(k-1) + 4(k-1) = 0$$

$$(k-1)(k^2+4) = 0$$

$$1)\ k - 1 = 0 \qquad 2)\ k^2 + 4 = 0$$

$$k_1 = 1. \qquad k^2 = -4$$

$$k_{2,3} = \pm 2i\ (\alpha = 0;\ \beta = 2).$$

Следовательно, корнями характеристического уравнения являются числа:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i,$$

Значит, функции $y_1(x) = e^x; y_2(x) = \cos 2x; y_3(x) = \sin 2x$ составляют фундаментальную систему решений данного уравнения. Поэтому общее решение можно записать в виде:

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x.$

Пример5. Найти общее решение уравнения:

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

Решение: Уравнение (6) ЛОДУ четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i \quad (\alpha = 1, \beta = 1)$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет пару комплексно – сопряженных двухкратных корней s=2.

Следовательно, ФСР:

$$y_1 = e^{x}\cos x, \quad y_2 = e^{x}\sin x,$$

$$y_3 = x e^{x}\cos x, \quad y_3 = x e^{x}\sin x,$$

Находим общее решение исходного уравнения:

$$y = (C_1 + C_3 x)e^{x}\cos x + (C_2 + C_4 x)e^{x}\sin x,$$

где $C_1, \dots \dots C_4$ - произвольные постоянные.

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)e^{x}\cos x + (C_3 + C_4 x)e^{x}\sin x$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

- **Определение.** ЛНДУn-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{(n-1)}y'+p_ny=f(x), \qquad (7)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ —постоянные действительные числа.

Решение ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов

- **Случай1.**

$$f(x) = P_m(x)\cdot e^{\alpha x},$$

где α-некоторое число, $P_m(x)$- многочлен степени m.

$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$

Вид частного решения.

$$y_{\text{чн}}(x) = x^s\, Q_m(x)\cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$- многочлен степени m с неопределенными коэффициентами, s равно кратности числа α как корня характеристического уравнения:

$$k^n + p_1k^{n-1} + p_2k^{n-2} + \cdots + p_{n-1}k + p_n = 0$$

Метод неопределенных коэффициентов

- записать $Q_m(x)$ как многочлен общего вида степени m с неизвестными коэффициентами:

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m;$$

- подставить в исходное уравнение (5) вместо $y(x)$ф ункцию $y_{\text{чн}}(x)$;
- приравнять коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях полученного равенства.

Будет получена система $(m+1)$-го линейного алгебраического уравнения с постоянными коэффициентами, из которой определяют числа$b_0, b_1, \ldots, b_m$

Пример6. Решить уравнение:

$$y^{(4)} + y'' = x^2 + x$$

Решение: 1) Решим соответствующее ЛОДУ

$$y^{(4)} + y'' = 0$$

Его характеристическое уравнение

$$k^4 + k^2 = 0$$

Имеет корни: $k_1 = 0$ ($r_1 = 2$), $k_{2,3} = \pm i$ ($r_{2,3} = 1$),

Следовательно, находим фундаментальную систему решений уравнения ЛОДУ:

$$y_1(x) = 1 \qquad y_2(x) = x \qquad y_3(x) = \cos x \qquad y_4(x) = \sin x$$

Общее решение $y_{о.о.}(x)$ уравнения (11) вычисляем по формуле:

$$y_{о.о.}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

2) Найдем частное решение ЛНДУ, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов.

В данном случае $f(x) = x^2 + x = e^{0x}(x^2 + x)$, где $\alpha = 0$,

$m = 2$. Поэтому $s = 2$ (т.к. $\alpha = k_1 = 0$, кратность корня $k_1 = 0$ равна двум)

$$y_{чн}(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \qquad (*)$$

Следовательно,

$$y'_{чн}(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$y''_{чн}(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$y'''_{чн}(x) = 24Ax + 6B,$$

$$y^{(4)}_{чн}(x) = 24A.$$

Подставив в исходное уравнение $y''_{чн}(x)$, $y^{(4)}_{чн}(x)$ соответственно, получим равенство:

$$12Ax^2 + 6Bx + 24A + 2C = x^2 + x$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе:

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 6B = 1 \\ 24A + 2C = 0 \end{cases} \quad \text{откуда получим} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{12} \\ B = \dfrac{1}{6} \\ C = -1 \end{cases}$$

Следовательно, находим частное решение ЛНДУ:

$$y_{чн}(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$$

3) Найдем общее решение ЛНДУ:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Ответ:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2.$$

Случай2.

$$\boldsymbol{f(x) = (P_{m_1}(x) \cdot cos\beta x + Q_{m_2}(x) \cdot sin\beta x)e^{\alpha x}},$$

где α, β некоторые числа,

$P_{m_1}(x)$, $Q_{m_2}(x)$- многочлены от x степени m_1 и m_2 соответственно.

Вид частного решения

$$y_{\text{чн}}(x) = x^s \, (M_n \, (x)\cdot cos\beta x + T_n(x) \cdot sin\beta x)e^{\alpha x},$$

где $M_n \, (x)$, $T_n(x)$ – многочлены от x степени $n = \max(m_1, m_2)$ с неопределенными коэффициентами, которые надо определить методом неопределенных коэффициентов,

S равно кратности числа $\alpha + \beta i$ как корня соответствующего характеристического уравнения.

Пример7. Решить уравнение:

$$y''' - 2y'' + y' = 4\sin x$$

Решение:

1) Найдем решение соответствующего ЛОДУ

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

Его характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 + k = 0 \text{ имеет корни}$$

$k_1 = 0$ ($r_1 = 1$), $k_2 = 1$ ($r_2 = 2$).

Следовательно, общее решение $y_{o.o.}(x)$ ЛОДУ вычисляется по формуле:

$$y_{o.o.}(x) = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

1) Найдем частное решение $y_{чн}(x)$ ЛНДУ, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов.

В данном примере

$$f(x) = 4\sin x = (4\sin x + 0\cos x)\,e^{0x}$$

где $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1 = P_2 = 0$, значит $n = 0$, $\alpha + \beta i = i$, $s = 0$

$y_{чн}(x) = A\cos x + B\sin x$,

Тогда,

$y'_{чн}(x) = -A\sin x + B\cos x$,

$y''_{чн}(x) = -A\cos x - B\sin x$,

$y'''_{чн}(x) = A\sin x - B\cos x$,

Подставим найденные производные в исходное уравнение вместо

y, y', y'', y''' соответственно:

$(\ldots + 2\ldots - \ldots)\sin x + (-\ldots + 2\ldots + \ldots)\cos x = 4\sin x + 0\cos x.$

Приравнивая здесь подобные члены в правой и левой частях, получаем систему:

2[illegible] = 4   2[illegible] = 0   [illegible]   [illegible] = 0   [illegible] = 2

Следовательно, найдено частное решение ЛНДУ: [illegible]$_{чн}$[illegible] = 2 [illegible].

1) Найдем общее решение ЛНДУ:

[illegible] = [illegible]$_1$ + ([illegible]$_2$ + [illegible]$_3$[illegible])[illegible] + 2 [illegible],

Где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные

Ответ: [illegible] = [illegible]$_1$ + ([illegible]$_2$ + [illegible]$_3$[illegible])[illegible] + 2 [illegible]

Метод вариации произвольных постоянных

Пусть дано уравнение:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

и общее решение соответствующего ЛОДУ

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ имеет вид:

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

Функцию $y_{чн}(x)$ ищем в виде:

$$y_{чн}(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + c_n(x) \cdot y_n(x),$$

Для нахождения $c_1(x), c_2(x), \ldots c_n(x)$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \ldots + c_n'(x) y_n(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + \ldots + c_n'(x) y_n'(x) = 0 \\ ------------------------ \\ c_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

И решая ее, получим $c_1'(x), c_2'(x), \ldots c_n'(x)$, а затем, интегрируя, находим $c_1(x), c_2(x), \ldots c_n(x)$.

Следовательно, частным решением ЛНДУ будет функция:

$$y_{чн}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \ldots + c_n(x) y_n(x).$$

Значит, общим решением ЛНДУ является:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + y_{чн}(x),$$

где $c_1, c_2, \ldots c_n$ – произвольные постоянные.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!