# Лекция № 11. Производная функции одной переменной

1. Производная функции одной переменной, геометрический и механический смысл.

2. Дифференцируемость и непрерывность. Правила дифференцирования.

3. Производная сложной и обратной функций.

4. Таблица производных.

## 1. Производная функции одной переменной, геометрический и механический смысл.

### Механический смысл производной

Пусть вдоль некоторой прямой точка $M$ движется по закону $s=s(t)$, где $s$ – пройденный путь, $t$ – время. Необходимо найти скорость точки в момент времени $t_0$.

Поэтому под скоростью точки в момент времени $t_0$ следует понимать предел средней скорости за промежуток времени от $t_0$ до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Механический смысл производной состоит в том, что производная от пути равна скорости. Так же можно доказать, что производная от скорости равна ускорению

## Геометрический смысл производной.
## Задача о касательной

Найти уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

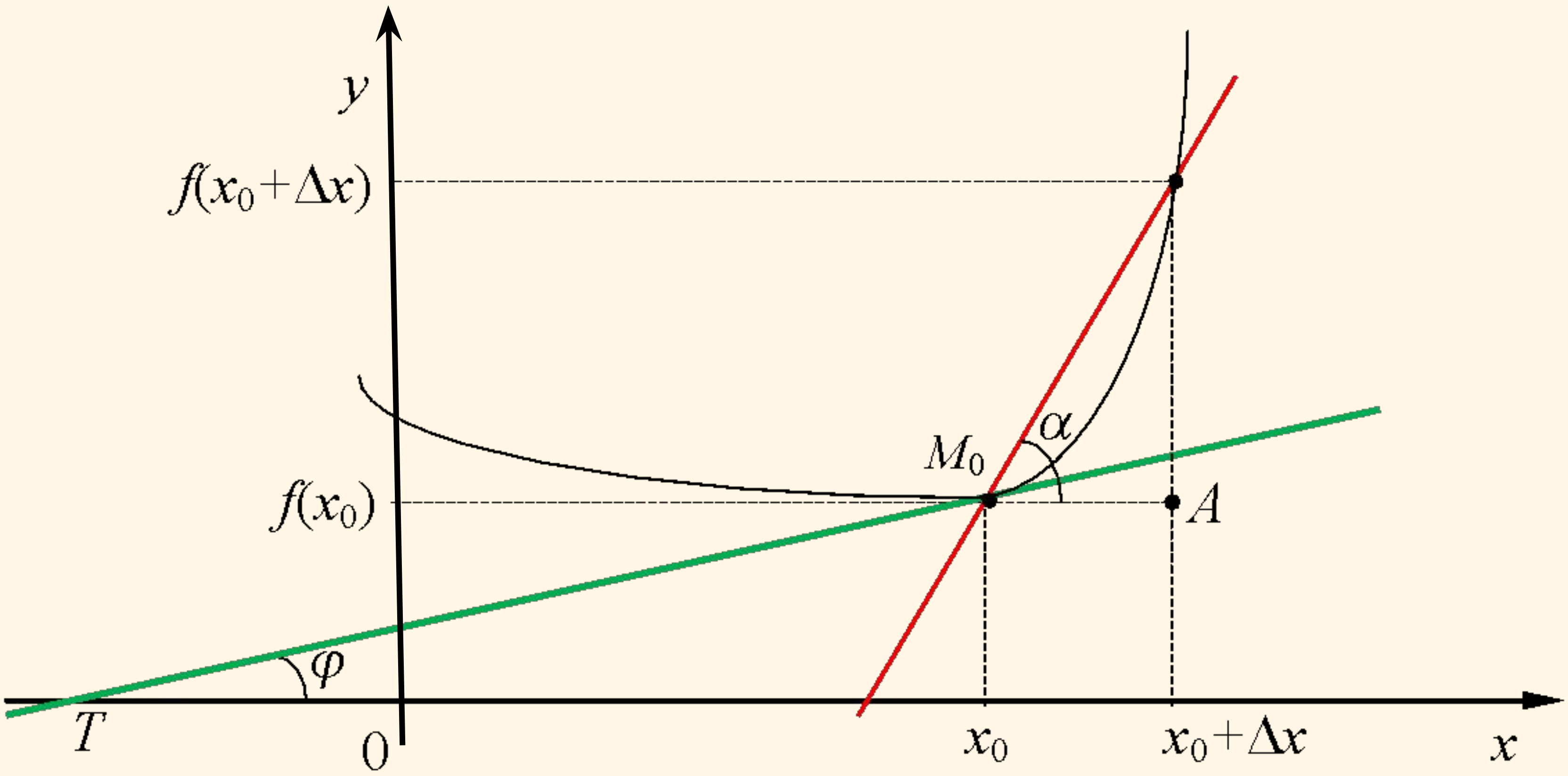


Рисунок 1

**Определение 1.**

*Предельное положение $M_0T$ секущей $M_0M$ при $M \to M_0$ (если оно существует) назовём* ***касательной*** *к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.* Угловой коэффициент равен:

$$\mathrm{k}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = \mathrm{k}(x_0)(x - x_0).$$

# Производная функции

**Определение 2.** *Производной функции f(x) в точке* $x_0$ *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

*когда* $\Delta x \to 0$ *(если этот предел существует и конечен) и обозначается: .*

$$f'(x_0) = y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

# 2. Дифференцируемость и непрерывность. Правила дифференцирования.

Функция, имеющая производную (конечную) в каждой точке некоторого интервала, называется **дифференцируемой** в этом интервале, операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

## **Пример 1.** Найти производные функций: *y* = *C*

Имеем $\forall x_0 \in (-\infty;\infty)=X$ и $\Delta x \neq 0$ $f(x_0) = C$

$$f(x_0 + \Delta x) = C \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$

$$= C - C = 0;$$

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$C' = 0$ – производная от постоянной величины равна нулю.

## Теорема 1.

Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке $x_0$, то она непрерывна в этой точке.

**Доказательство:** По условию теоремы функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

функцию, стоящую под знаком предела, можно представить как сумму этого предела и бесконечно малой величины:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$

Отсюда:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

Следовательно, по определению непрерывности функции, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

Обратная теорема, в общем случае, неверна.

Например, функция $y = |x|$

непрерывна в точке $x=0$: $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

Проверим, будет ли эта функция дифференцируема в данной точке.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

## Теорема 2.

Если $U(x)$ и $V(x)$ имеют конечные производные в точке $x_0$, то

$$U+V\ ,\ U-V\ ,\ U\cdot V\ ,\ U\div V$$

($V(x_0)\neq 0$) имеют конечные производные в точке $x_0$ и справедливы равенства:

$$(U+V)'=U'+V'\ ;$$

$$(U-V)'=U'-V'\ ;$$

$$(U\cdot V)'=U'\cdot V+V'U\ ;$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'\cdot V-V'\cdot U}{V^2}$$

# **Пример.** Найти производную функции $y = \sin x$.

Докажем, что $(\sin x)' = \cos x$

**Доказательство:** $(-\infty;\infty)$=X. $\forall x \in X,\ \Delta x \neq 0,\ x + \Delta x$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2};$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, то $\forall x \in X\ (\sin x)' = \cos x \in C(-\infty;\infty)$

# 3. Производная сложной и обратной функций.

**Теорема 3.** Если функция $z=\varphi(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $y=f(z)$ имеет производную в точке $z_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ имеет производную в точке $x_0$ и справедливо равенство

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x, \quad f'_x[\varphi(x)] = f'_z(z_0) \cdot z'_x(x_0).$$

# **Пример.** Найти производную функции $y = \sin kx$.

**Доказательство:** имеем $\forall x \in X \quad (\sin x)' = \cos x.$

$$(kx)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta kx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k \cdot 1 = k.$$

По теореме о производной сложной функции

$$(\sin kx)' = k \cdot \cos kx \qquad \forall x \in X$$

# Производная обратной функции

**Теорема 4.** Если строго монотонная функция $y=f(x)$ имеет для некоторого значения $x\in(a;b)$ производную, отличную от нуля, то обратная функция $x=\varphi(y)$ имеет в соответствующей точке $y=y_0$ производную и

$$x'_y=\varphi'_y=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'_x}.$$

# Таблица производных

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^{\alpha})' = \alpha(x^{\alpha-1})$
4. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$

   $(e^{x})' = e^{x}$

# Таблица производных

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

# Таблица производных

9. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\mathrm{ctg}x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

# Таблица производных

13. $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\text{arcctg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

15. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

# Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин Вся высшая математика. Том 1. Учебник. (линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 – [1], с.232-252.