

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

К нелинейным электрическим цепям относятся цепи, содержащие один или более нелинейных элементов.

Нелинейные элементы – резистивные, индуктивные и емкостные, имеют нелинейные вольтамперные, вебер-амперные и вольт-кулонные характеристики. Параметры нелинейных элементов, в отличие от линейных, *зависят* от величин протекающих по ним токов, значений и полярности приложенных к ним напряжений.

В нелинейных электрических цепях не выполняется принцип наложения, поэтому неприменимы методы, рассмотренные ранее.

Нелинейные резисторы принято делить на две большие группы: *неуправляемые* и *управляемые*.

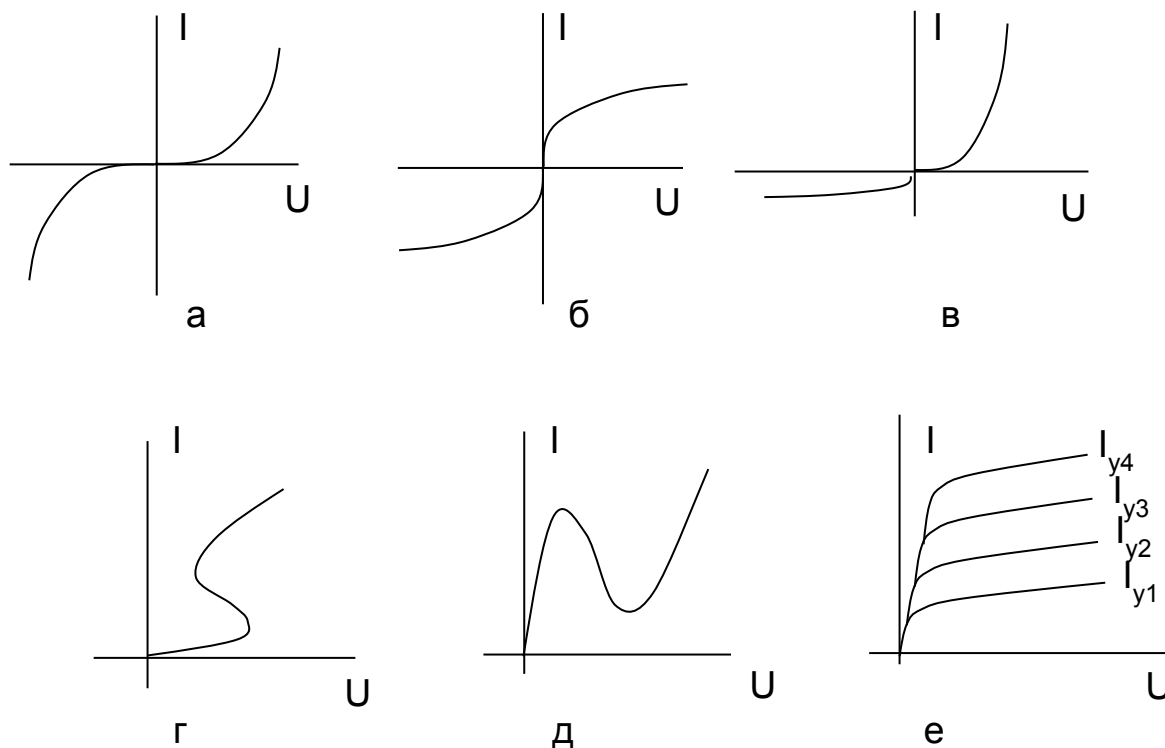
В управляемых НР есть вспомогательная (управляющая) цепь, воздействуя на ток или напряжение которой можно изменять вольтамперную характеристику основной цепи. ВАХ неуправляемых НР изображается одной кривой, а управляемых – совокупностью (семейством) кривых.

К группе *неуправляемых* НР относятся лампы накаливания, бареттеры, стабилитроны, газотроны и др.

К группе *управляемых* НР относятся многоэлектродные электронные лампы, биполярные и полевые транзисторы, тиристоры и др.

# ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТОРОВ

На рис. 3.1 изображены некоторые типичные вольтамперные характеристики неуправляемых резисторов.



**Рис. 3.1.** Вольтамперные характеристики нелинейных резисторов

Характеристики, для которых справедливо соотношение  $I(U) = -I(-U)$  (рис. 3.1 а, б), называются *симметричными*, ВАХ НР на рис. 3.1.в – д *несимметричны*.

Характеристики НР, приведенные на рис. 3.1 а – в *монотонные*, поскольку при увеличении приложенного к ним напряжения ток монотонно возрастает, т.е. первая производная тока постоянна по знаку. В отличие от них ВАХ НР, приведенные на рис. 3.1 г, д имеют участки *отрицательного сопротивления*, на которых первая производная тока меняет знак. Такие вольтамперные характеристики являются неоднозначными: заданному значению напряжения (рис. 3.1, г) или тока (рис. 3.1, д) могут соответствовать три значения тока (напряжения). На рис. 3.1, е приведено *семейство характеристик* управляемого НР (семейство выходных характеристик биполярного транзистора).

# РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ НР

До начала расчета нелинейных цепей должны быть известны ВАХ НР, входящих в схему.

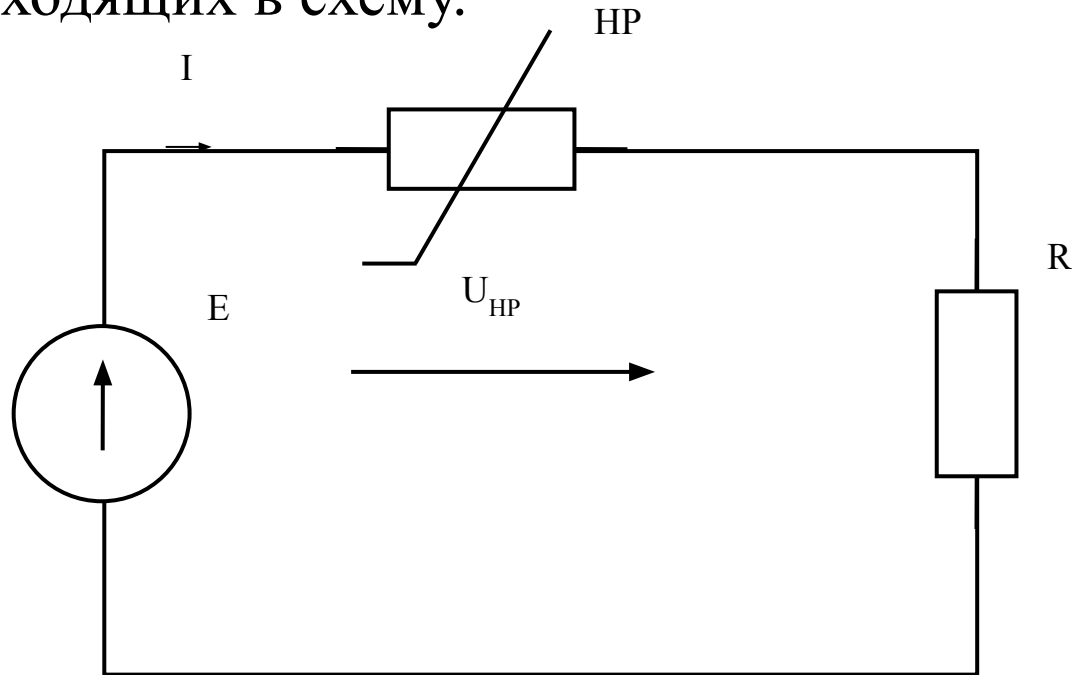


Рис. 3.2.

ВАХ НР обозначена на рис. 3.3 буквами НР, ВАХ линейного сопротивления – прямая линия (R). ВАХ всей цепи, т.е. зависимость тока в цепи от суммы падений напряжений на НР и R, изображена кривой, обозначенной НР+R. Расчет основывается на законах Кирхгофа. Возможно применение двух способов расчета. Первый способ представлен на рис. 3.3а, второй – на рис. 3.3б.

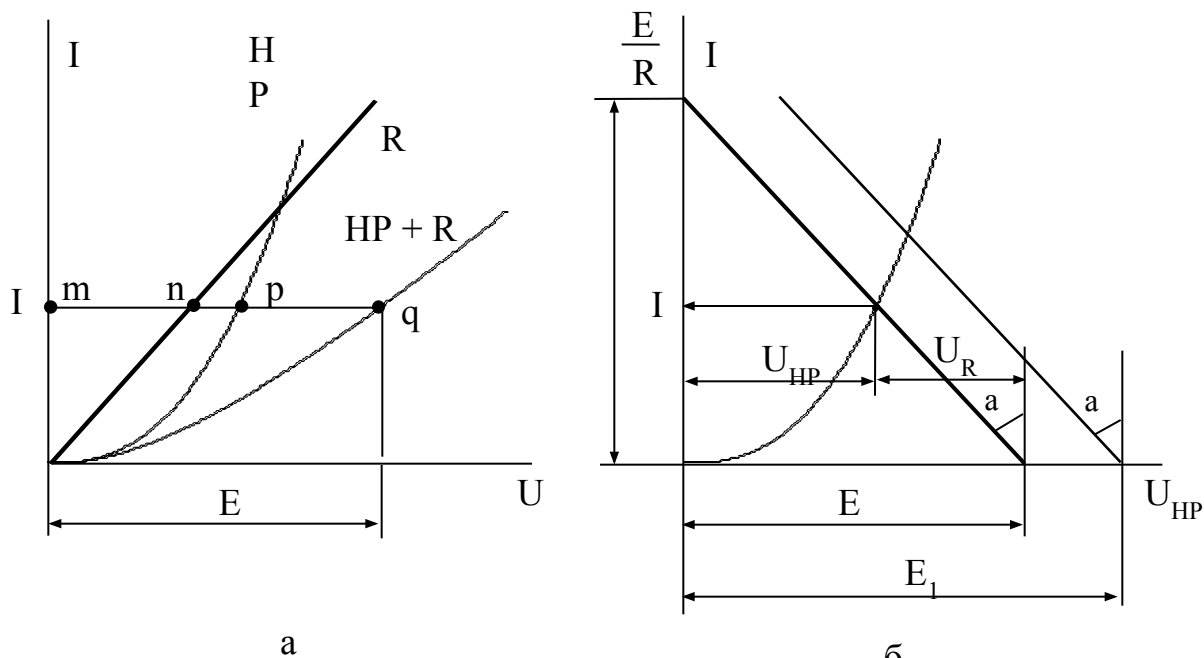


Рис. 3.3.

При расчете цепи по первому способу результирующая ВАХ пассивной части схемы строится исходя из того, что при последовательном соединении через  $HP$  и  $R$  проходит один и тот же ток. Для построения результирующей ВАХ зададимся произвольным током – точкой  $m$ , проведем через нее (рис. 3.3а) горизонталь и сложим отрезок  $mp$ , равный напряжению на  $R$ , с отрезком  $mq$ , равным напряжению на  $HP$ :  $mp + mq = mq$ .

Тогда точка  $q$  принадлежит результирующей ВАХ всей схемы. Аналогично строятся и другие точки результирующей ВАХ. Определение тока в цепи при заданной ЭДС  $E$  производят графически по результирующей ВАХ. С этой целью следует заданное значение ЭДС  $E$  отложить по оси абсцисс и через полученную точку провести вертикаль до пересечения с результирующей ВАХ в точке  $q$ . Ордината точки  $q$  равна искомому току.

При расчете цепи по второму способу результирующую ВАХ пассивной части схемы строить не нужно. Выделим две ветви в цепи:

- одну с нелинейным сопротивлением;
- вторую с ЭДС и линейным сопротивлением.

Общим параметром для обеих ветвей является напряжение  $U_{\text{НР}}$ . Перестроим ВАХ относительно этого напряжения. Поскольку уравнение  $U_{\text{НР}} = E - IR$  в координатах  $I$  и  $U_{\text{НР}}$  представляет собой уравнение прямой, проходящей через точки с координатами  $I = E/R$ ;  $U = U_{\text{НР}} = 0$ ; и  $I = 0$ ;  $U_{\text{НР}} = U = E$ , проведем ее на рис.3.3б. Точка пересечения прямой с ВАХ НР определяет режим работы цепи. Для этой точки ток, проходящий через НР и R, одинаков, поэтому сумма падений напряжений  $U_{\text{НР}} + U_{\text{R}} = E$ . При другом значении ЭДС, например,  $E_1$  прямую  $I = f(U_{\text{R}})$  следует переместить параллельно себе так, чтобы она исходила из точки  $I = 0$ ,  $U = E_1$  (правая прямая на рис. 3.3б).

Этот способ расчета называется иногда *«методом отраженных (или зеркальных) характеристик»*.



Рассмотрим применение метода отраженных характеристик для расчета цепи (рис. 3.4) с двумя различными НР, вольтамперные характеристики которых изображены на рис. 3.5а. Так как НР<sub>2</sub> имеет нелинейную ВАХ, то вместо прямой  $I_R = f(U_R)$ , как это было на рис. 3.3а теперь имеем нелинейную зависимость  $I_{НР2} = f(U_{НР2})$ .

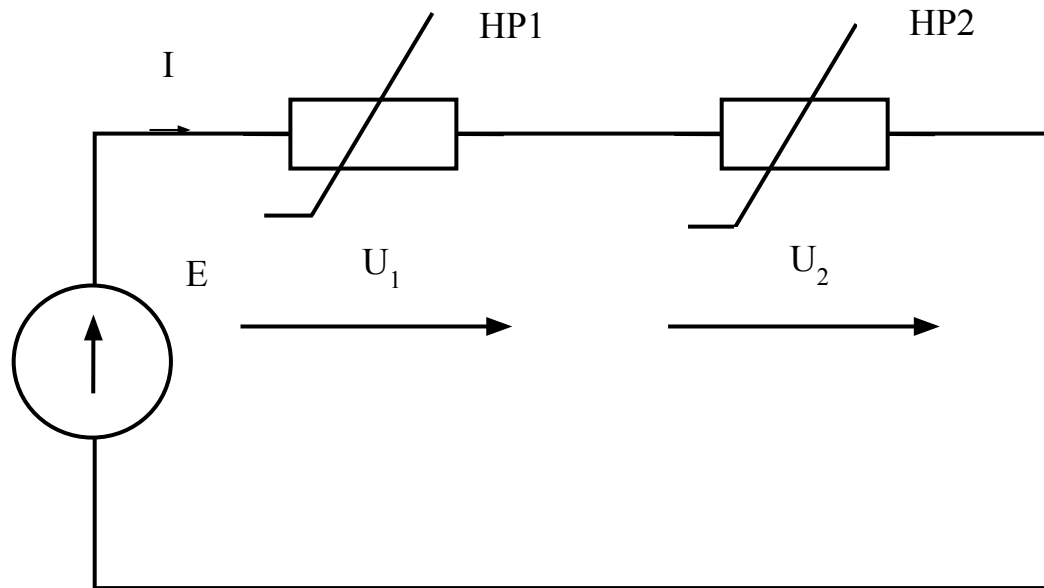


Рис. 3.4

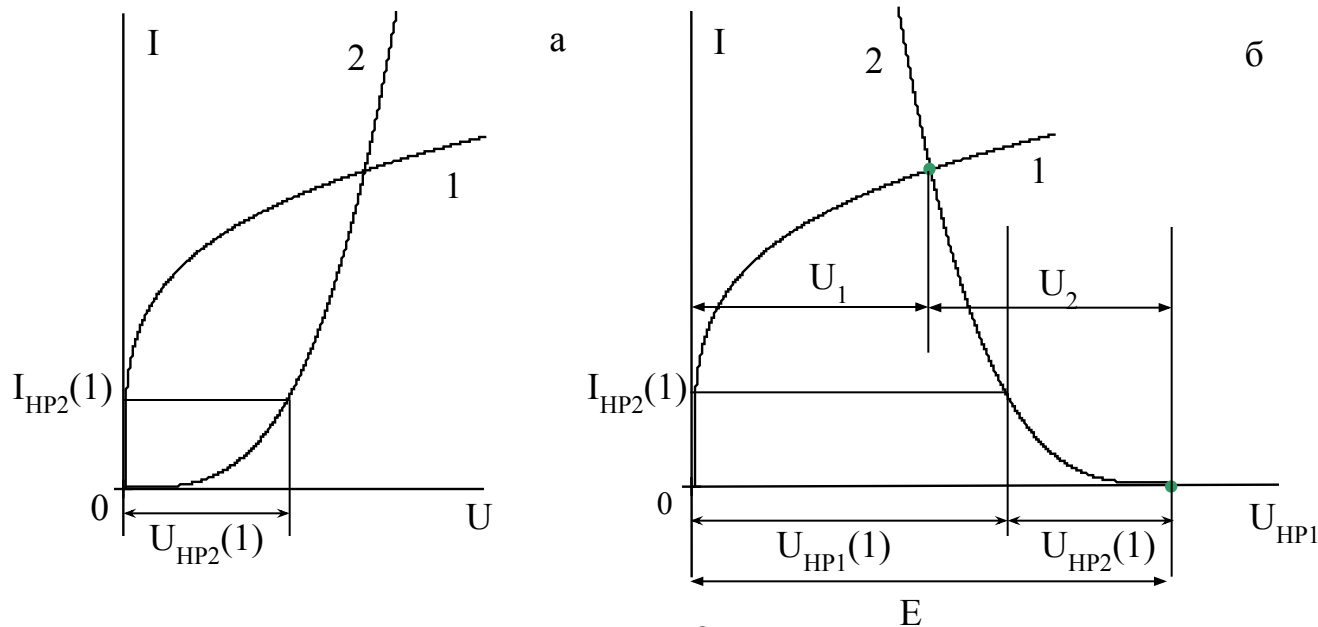


Рис. 3.5.

ВАХ  $HP_2$  строится по уравнению  $U_{HP1} = E - U_{HP2}$ . Для этого зададимся некоторым напряжением в точке а  $U_{HP1}(1)$ . Напряжение  $U_{HP2}(1)$  будет равно  $E - U_{HP1}(1)$ . Этому напряжению по ВАХ на рис. 3.5а соответствует ток  $I_{HP2}(1)$ . Откладывая  $I_{HP2}(1)$  и  $U_{HP1}(1)$  на рис. 3.5б получаем одну точку характеристики  $I_{HP2} = f(U_{HP1})$ .

Построение этой точки изображено на рис 3.5. Задаваясь другими значениями  $U_{HP1}$  строим всю характеристику  $I_{HP2} = f(U_{HP1})$ .

## ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ НР

Схема параллельного соединения двух НР изображена на рис. 3.6, их ВАХ – на рис. 3.7.

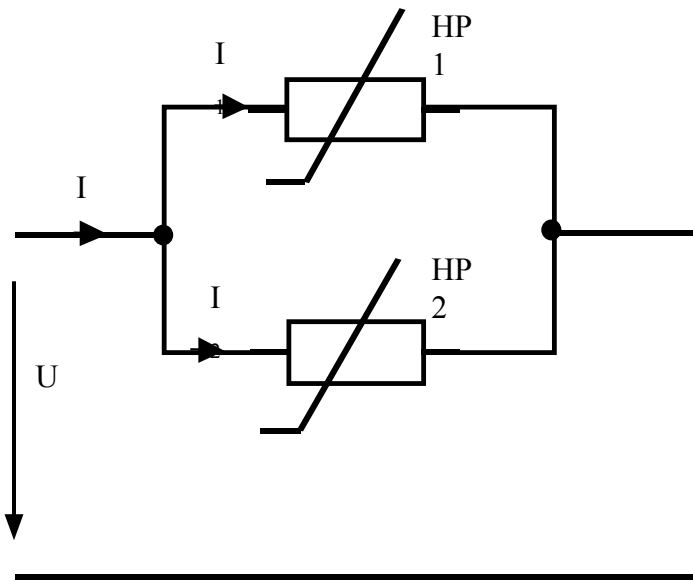


Рис. 3.6.

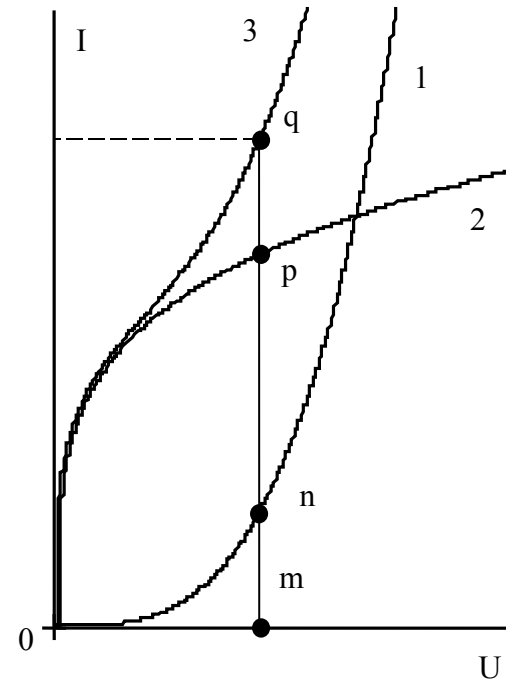


Рис. 3.7.

Кривая 3 рис. 3.7 представляет собой ВАХ параллельного соединения. Строится она следующим образом. Задаемся произвольно напряжением  $U$ , равным отрезку  $Om$ . Проводим через точку  $m$  вертикаль. Складываем отрезок  $mn$ , равный току в  $HP_1$ , с отрезком  $mp$ , равным току в  $HP_2$ :  
 $mn + mp = mq$ .

Отрезок  $mq$  равен току в неразветвленной части цепи при напряжении  $Om$ . Аналогично определяют и другие точки результирующей ВАХ параллельного соединения.

## МЕТОД ДВУХ УЗЛОВ

Решение нелинейных уравнений, описывающих нелинейные цепи с двумя узлами, проводят графически. Сначала задаются направлением токов в параллельных ветвях. Затем перестраивают ВАХ ветвей относительно общего напряжения между узлами  $U_{ab}$ .

Построенные кривые складывают графически согласно первому закону Кирхгофа для выбранных направлений (при одном и том же напряжении складывают токи ВАХ). Если токи в ветвях направлены в одну сторону относительно узла схемы, то решение определяется точкой пересечения кривой  $\Sigma I = 0$  с осью напряжения. Через эту точку параллельно оси тока проводят прямую линию, при пересечении которой с каждой ВАХ ветвей получают соответствующие значения токов.

**Пример П.3.1.** Определить токи в ветвях схемы на рис. 3.10 при заданных ЭДС и ВАХ нелинейных элементов.

**Решение.** Зададимся направлением токов и запишем первый закон Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (3.1)$$

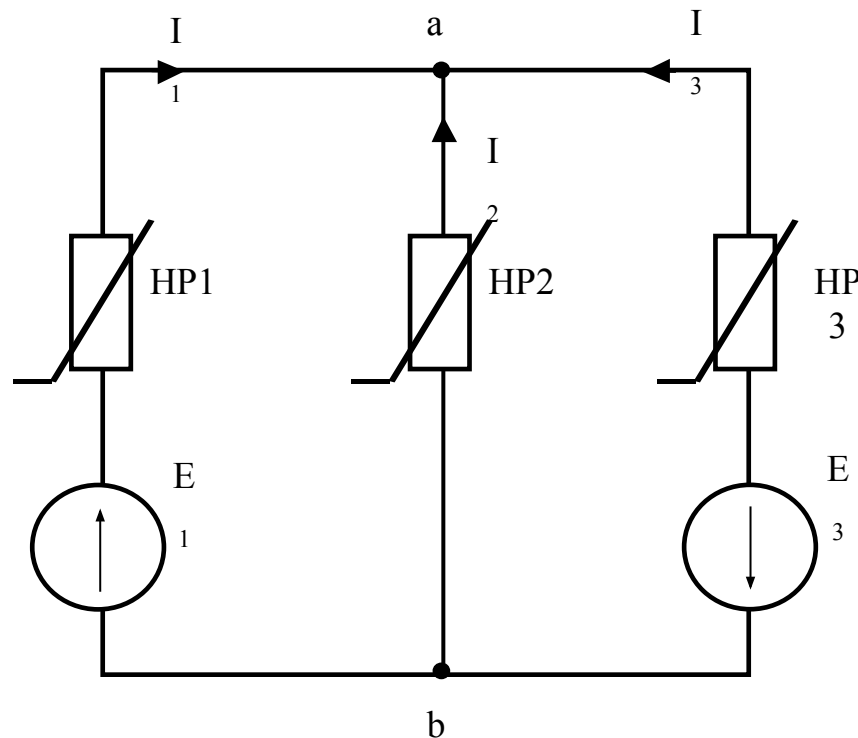
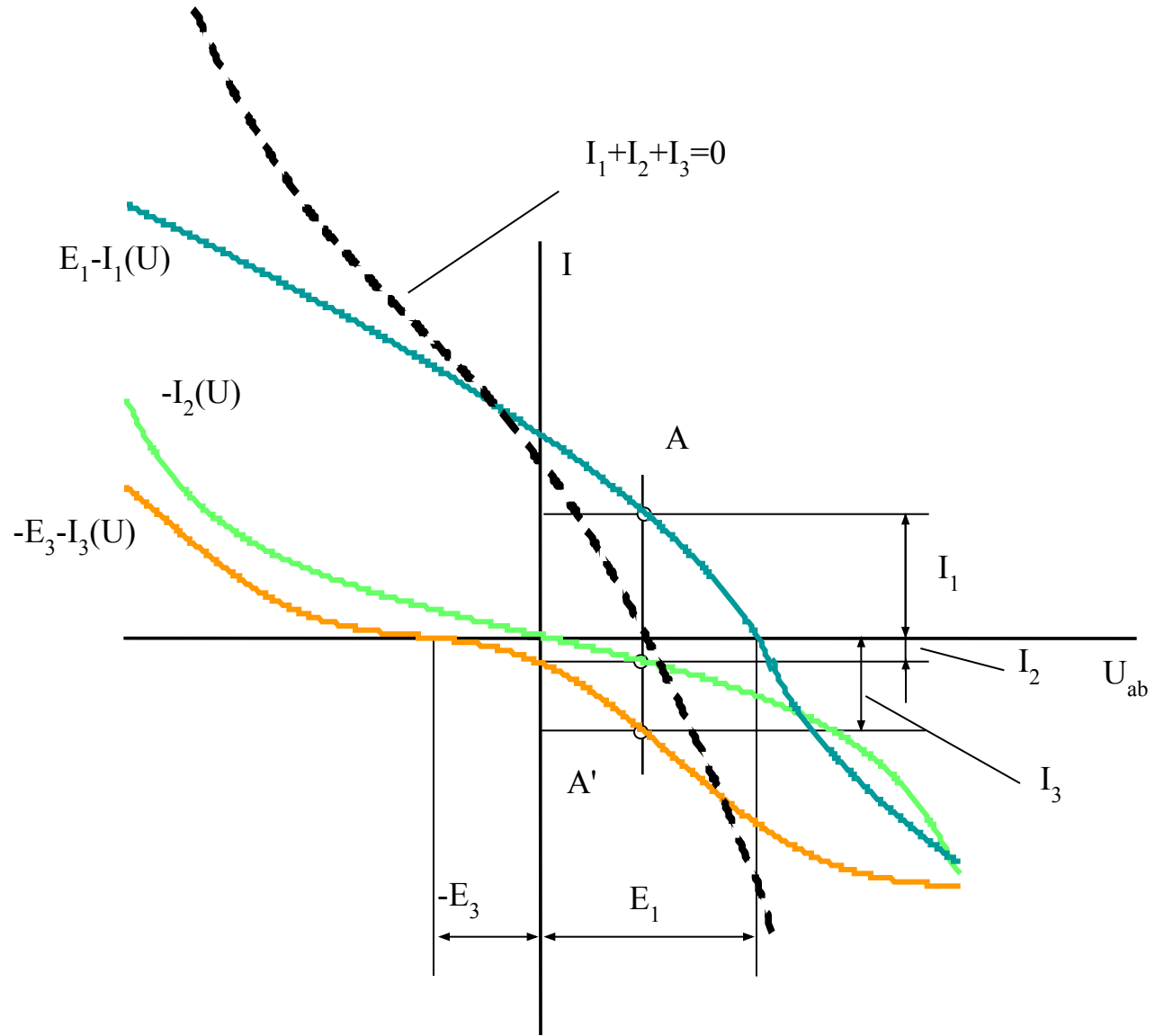


Рис.  
3.10.

Запишем выражения для напряжения между узлами  $U_{ab}$  для каждой из параллельных ветвей:

$$\begin{aligned}U_{ab} &= E_1 - U_{HP1}; \\U_{ab} &= -U_{HP2}; \\U_{ab} &= -E_3 - U_{HP3}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Построим ВАХ по уравнениям (3.2) и сложим их (пунктирная кривая на рис. 3.11) в соответствии с уравнением (3.1). Через точку пересечения результирующей кривой с осью абсцисс проведем прямую  $AA'$ . При пересечении прямой  $AA'$  с ВАХ ветвей получим токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . Токи  $I_2$  и  $I_3$  имеют направление, противоположное выбранному.



**Рис. 3.11.**



# ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ С ДВУМЯ УЗЛАМИ

Положим, что имеется схема, содержащая несколько параллельных ветвей с НР и источниками ЭДС (рис. 3.14). Определим ЭДС и ВАХ эквивалентного нелинейного резистора НРэ участка схемы (рис. 3.15), эквивалентного исходной схеме рис. 3.14.

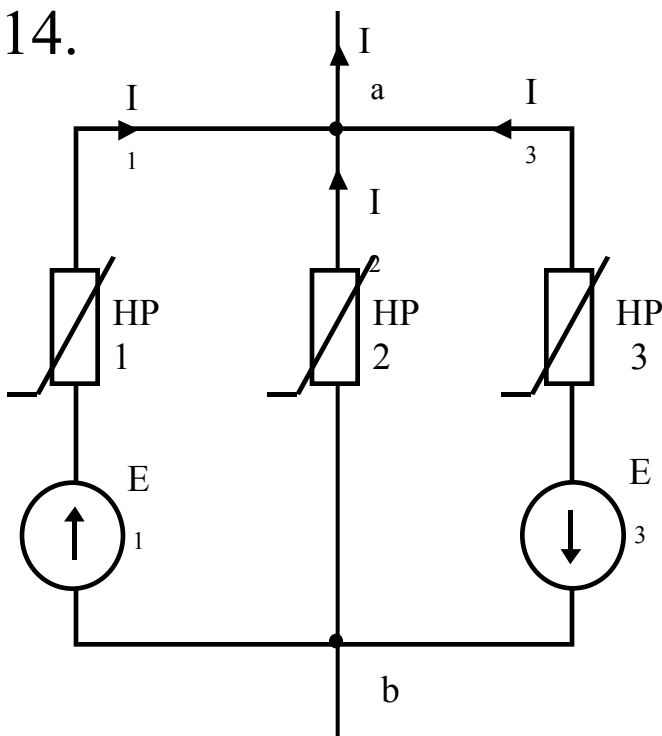


Рис. 3.14.

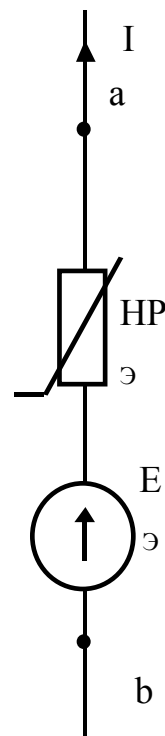
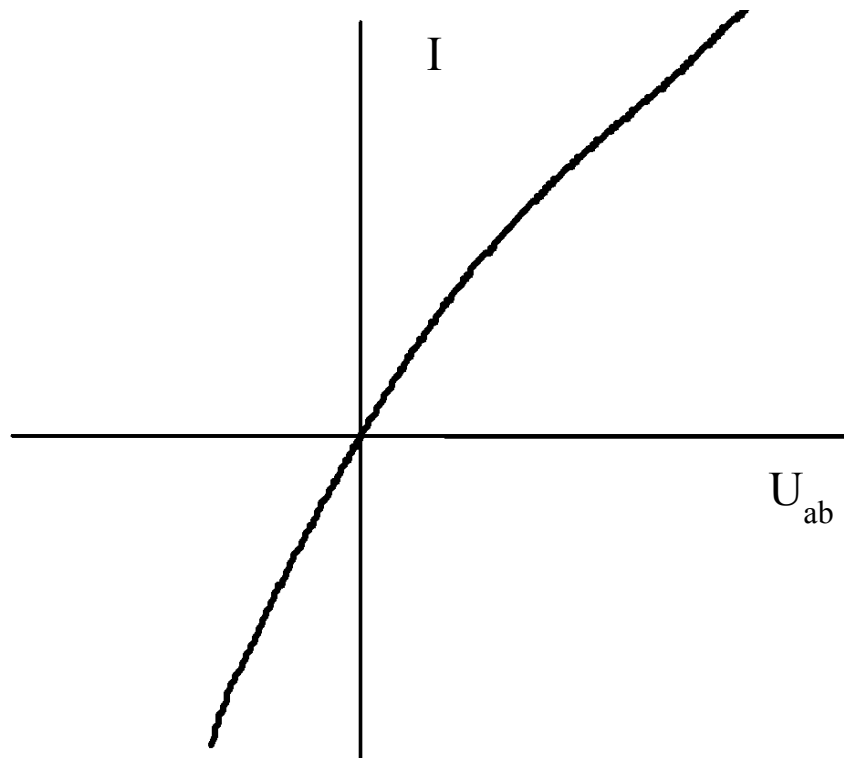


Рис. 3.15.

Эквивалентность будет иметь место в том случае, если ток  $I$  в ветви на рис. 3.15 при любых значениях напряжения  $U_{ab}$  будет равен току  $I$  в неразветвленной части цепи исходной схемы (рис. 3.14).

Воспользуемся построениями на рис. 3.11. Пунктирная кривая на этом рисунке представляет собой зависимость  $I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab})$ , т. е. является результирующей ВАХ трех параллельных ветвей. Такую же ВАХ должна иметь эквивалентная ветвь (рис. 3.15). Если ток  $I$  в схеме (рис. 3.15) равен нулю, то  $U_{ab} = E_{\mathcal{E}}$ . Следовательно,  $E_{\mathcal{E}}$  на рис. 3.15 определяется напряжением  $U_{ab}$ , при котором эта кривая пересекает ось абсцисс. Для определения ВАХ  $HP_{\mathcal{E}}$  необходимо пунктирную кривую (рис. 3.11) зеркально отобразить относительно вертикали, проведенной через точку пересечения ее с осью абсцисс.

Построенная ВАХ  $HP_{\text{э}}$  изображена на рис. 3.16.



**Рис. 3.16.**

# МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Если в сложной электрической цепи есть одна ветвь с НР, то определить ток в ней можно методом эквивалентного генератора.

Выделим в схеме ветвь с НР, представив всю остальную линейную схему активным двухполюсником (рис. 3.17, а).

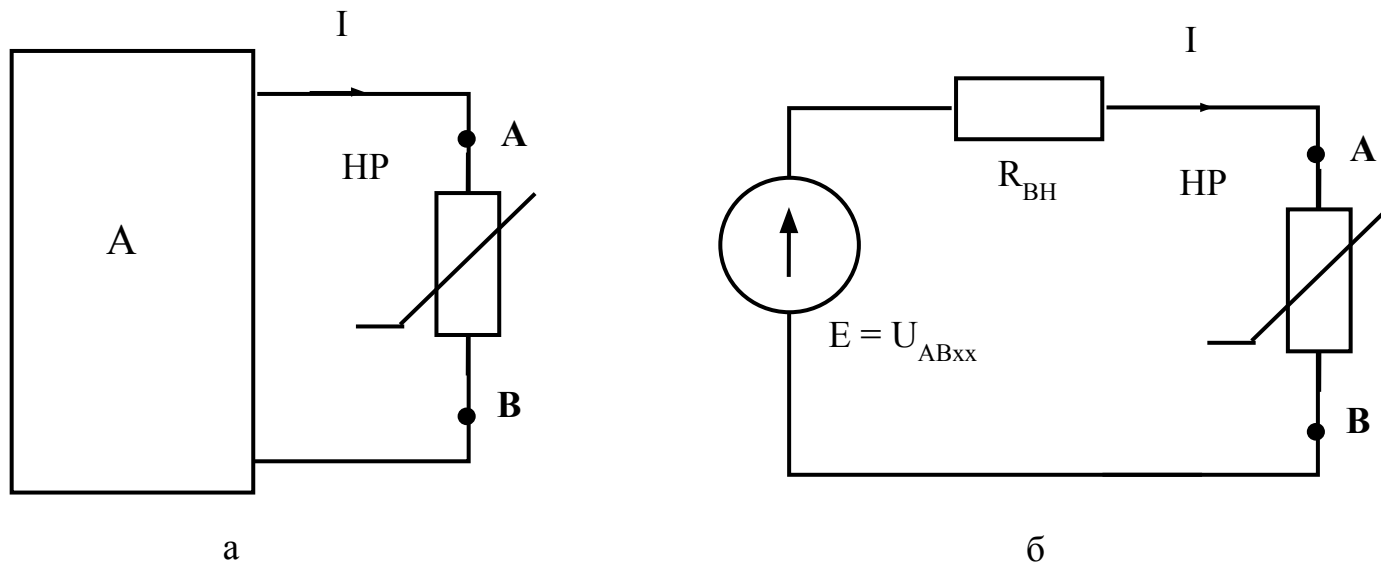


Рис. 3.17.

Как известно, схема замещения линейного активного двухполюсника по отношению к зажимам **A** и **B** выделенной ветви представляет собой последовательное соединение источника ЭДС, величина которой равна напряжению на зажимах **AB** при разомкнутой ветви **AB** ( $U_{AB_{xx}}$ ), внутреннего сопротивления  $R_{вн}$ , равного входному сопротивлению линейного двухполюсника, и сопротивления ветви **AB** (рис. 3.17, б).

Определение тока в полученной схеме (рис. 3.17, б) может быть проведено графическим методом.

# СТАТИЧЕСКОЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Свойства нелинейного резистора могут быть охарактеризованы либо его вольтамперной характеристикой, либо зависимостями его статического и дифференциального сопротивлений от тока (напряжения).

*Статическое* сопротивление  $R_{ст}$  характеризует поведение НР в режиме неизменяющегося тока. Оно равно отношению величине напряжения на НР к величине протекающего по нему тока:

$$R_{ст} = U/I. \quad (3.5)$$

Сопротивление  $R_{ст}$  численно равно тангенсу угла  $\alpha$  между осью ординат и прямой, проходящей через рабочую точку РТ (рис. 3.18), умноженному на отношение масштабов по осям  $m_U/m_I$ .

Для различных точек ВАХ статическое сопротивление различно.

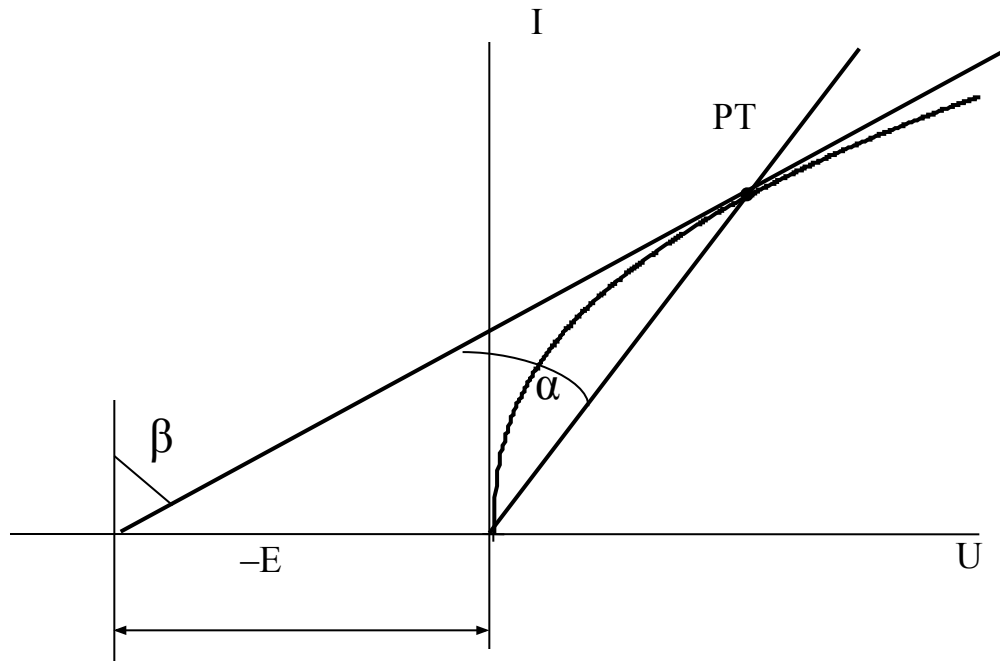


Рис. 3.18.

Под *дифференциальным (динамическим)* сопротивлением  $R_{\text{диф}}$  принято понимать отношение бесконечно малого приращения напряжения  $dU$  на НР к соответствующему приращению тока  $dI$ :

$$R_{\text{диф}} = dU/dI. \quad (3.6)$$

Дифференциальное сопротивление численно равно тангенсу угла  $\beta$  (рис. 3.18) наклона **касательной** к ВАХ в рабочей точке, умноженному на отношение масштабов  $m_U/m_I$ . Оно характеризует поведение НР при достаточно малых отклонениях от предшествующего режима, т.е. приращение напряжения на НР связано с приращением тока, проходящего через него, соотношением  $dU = R_{\text{диф}} * dI$ .

Таким образом,  $R_{\text{ст}}$  – это сопротивление НР для постоянного тока, а  $R_{\text{диф}}$  – для изменяющегося в небольших пределах переменного напряжения.



Если ВАХ НР имеет падающий участок, т.е. участок, на котором увеличению напряжения на  $\Delta U$  соответствует уменьшение тока (см., например, ВАХ на рис. 3.1, г, д), то дифференциальное сопротивление на этом участке отрицательно.

Из двух сопротивлений ( $R_{ст}$  и  $R_{диф}$ ) чаще используется дифференциальное сопротивление. Его используют, например, при замене НР эквивалентным линейным сопротивлением и источником энергии, а также при исследовании устойчивости режимов работы нелинейных цепей.

# ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЗАМЕНА НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТОРА ЛИНЕЙНЫМ И ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

Нелинейный резистор, вольтамперная характеристика которого в рабочем диапазоне напряжений и токов с достаточной для практики степенью точности может считаться линейной, может быть заменен последовательным соединением линейного сопротивления и идеального источника ЭДС. Сопротивление линейного элемента при этом должно равняться дифференциальному сопротивлению нелинейного элемента в рабочей точке его ВАХ (рис. 3.19). Замена НР линейным сопротивлением и источником ЭДС удобна тем, что после такой замены вся схема становится линейной и анализ ее работы может быть выполнен методами, используемыми в линейных электрических цепях. Однако при этом необходимо следить за тем, чтобы рабочая точка НР находилась в пределах линейного участка вольтамперной характеристики.

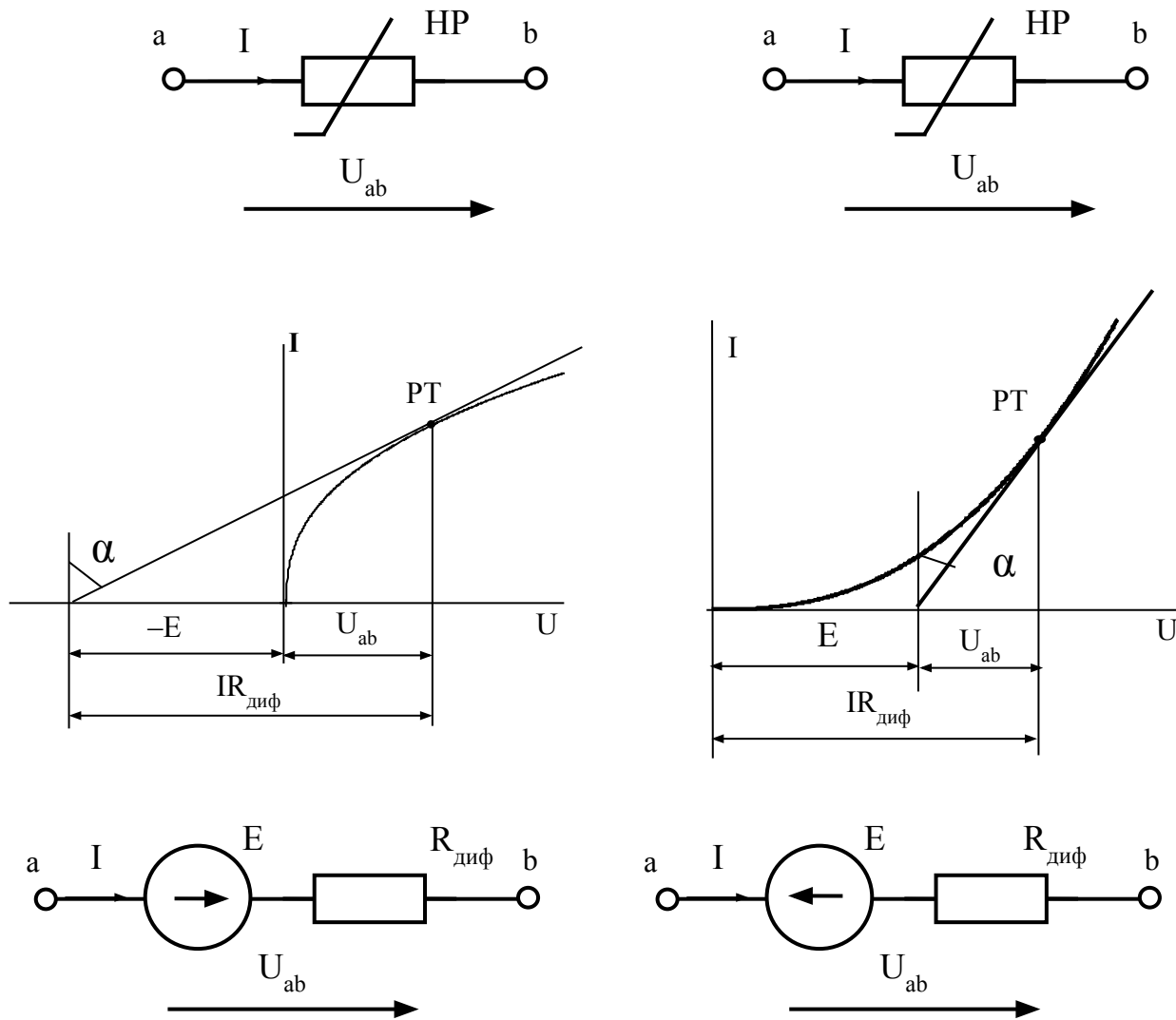


Рис. 3.19.

## РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ СХЕМЫ С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В такой цепи линейную часть рассматривают как активный четырехполюсник, к входу и выходу которого присоединены нелинейные элементы (рис. 3.20, а). Активный четырехполюсник заменяют пассивным с двумя источниками ЭДС, включенными в ветви с нелинейными элементами (рис. 3.20, б). Значения и направления ЭДС равны значениям и направлениям напряжений на разомкнутых зажимах при одновременном размыкании ветвей с нелинейными элементами. При замене пассивного линейного четырехполюсника, например, T-образной схемой замещения, исходная схема сводится к нелинейной с двумя узлами (рис. 3.20, в), расчет которой производится графически.

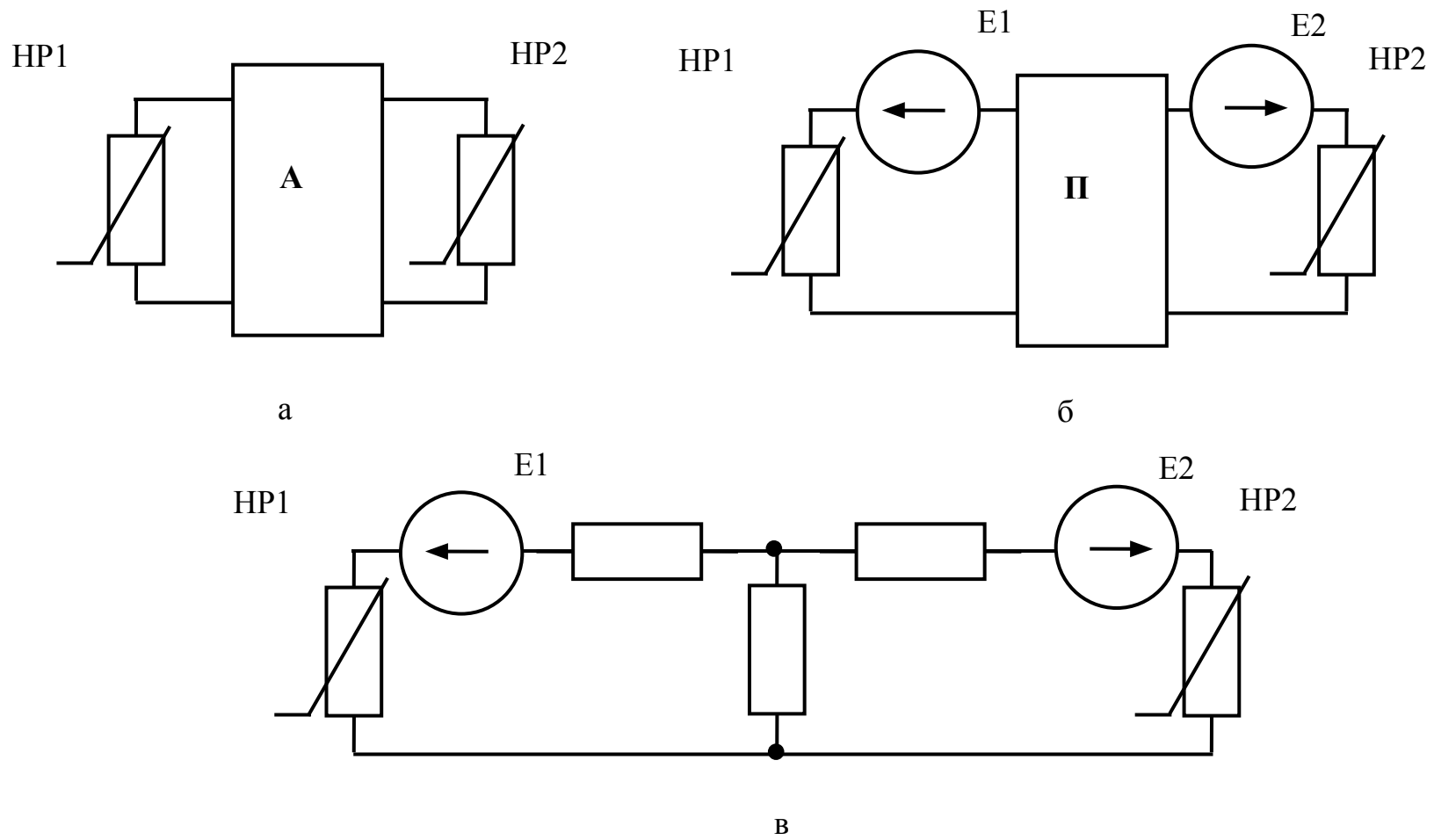


Рис. 3.20.