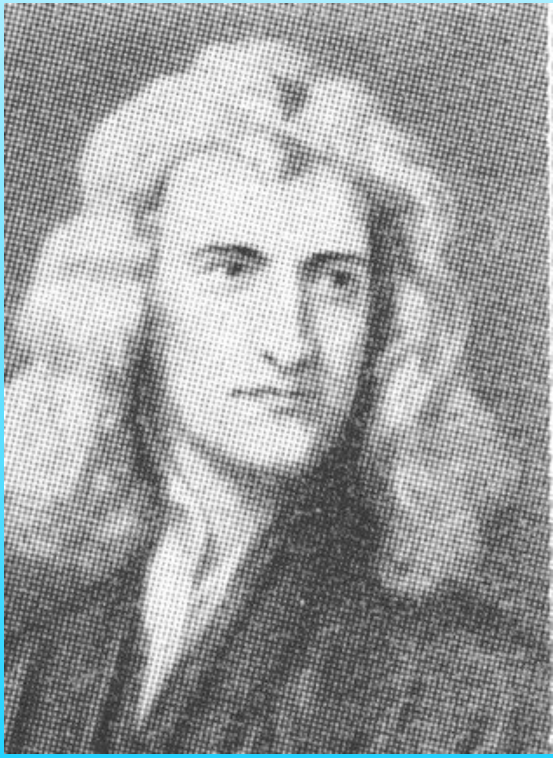
Тема 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.СИЛЫ В МЕХАНИКЕ. РАБОТА. ЭНЕРГИЯ.

2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы

В основе так называемой классической или ньютоновской механики лежат три закона динамики, сформулированных И. Ньютоном в 1687 г. Эти законы играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта.



***Первый закон Ньютона*:**

всякая материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

$$\vec{F} = 0, \ \upsilon = \text{const} \ \text{или} \ 0$$

(Закон инерции)

Оба названных состояния схожи тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: ***скорость любого тела остаётся постоянной (в частности, равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет её изменения.***

*Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**.* Поэтому первый закон Ньютона называют *законом инерции.*

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчёта. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчёта, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются *инерциальными системами отсчёта.*

Инерциальной системой отсчёта *является такая система отсчёта, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий,* ***либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно*** (*т.е. с постоянной скоростью*).

Таким образом, ***первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчёта.***

Система отсчёта, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные её неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца) при решении многих задач малы, и в этих случаях её можно считать инерциальной.

Из приведённых выше примеров легко понять, что *основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения*.

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трём основным положениям:

- *все тела обладают свойствами инерции;*
- *существуют инерциальные системы отсчёта, в которых выполняется первый закон Ньютона;*
- *движение относительно.*

(Если тело А движется относительно тела отсчета В со скоростью u, то и тело В, в свою очередь, движется относительно тела А с той же скоростью, но в обратном направлении) .

2.2. Масса и импульс тела

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т.е. сообщает данному телу ускорение.

Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения. *Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения.* Это свойство тел, как мы уже говорили, называется *инертностью* (следует из первого закона Ньютона).

Мерой инертности тела является величина, называемая массой.

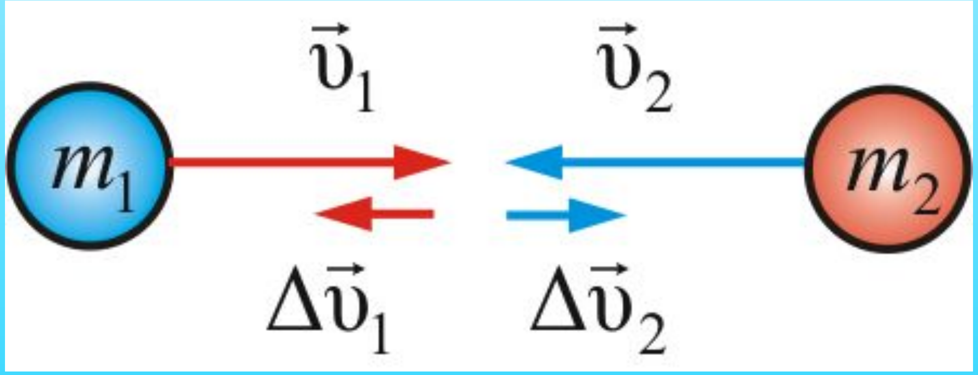
Чтобы определить *массу* некоторого тела, нужно сравнить её с массой тела, принятого за *эталон массы* (или сравнить с телом уже известной массы).

*Масса – величина **аддитивная** (масса тела равна сумме масс частей, составляющих это тело).*

*Система тел, взаимодействующих только между собой, называется **замкнутой**.*

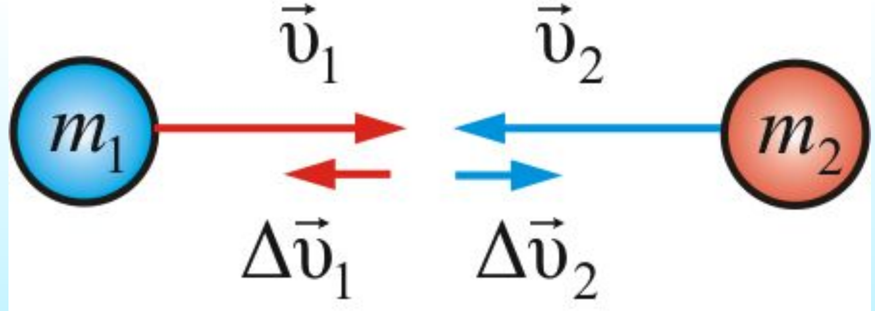
Рассмотрим замкнутую систему двух тел массами m_1 и m_2 Столкнём эти два тела

Рисунок 2.1



Опыт показывает, что приращённые скорости $\Delta\vec{\upsilon}_1$ и $\Delta\vec{\upsilon}_2$ всегда имеют противоположное направление (отличное знаком), а модули приращений скорости относятся как:

$$\boxed{\frac{|\Delta\vec{\upsilon}_1|}{|\Delta\vec{\upsilon}_2|} = \frac{m_2}{m_1}}$$



(тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость).

Приняв во внимание направление скоростей, запишем:

$$m_1\Delta\vec{\upsilon}_1 = -m_2\Delta\vec{\upsilon}_2.$$

При $\upsilon << c$ масса $m = \mathrm{const}$ (ньютоновская, классическая механика), тогда имеем:

$$\Delta(m_1\vec{\upsilon}_1) = -\Delta(m_2\vec{\upsilon}_2).$$

Произведение массы тела m на скорость $\vec{\upsilon}$ *называется* ***импульсом тела*** $\vec{\mathrm{p}}$:

$$\boxed{\vec{\mathrm{p}} = m\vec{\upsilon}.} \qquad (2.2.2)$$

2.3. Второй закон Ньютона.

Математическое выражение ***второго закона Ньютона***:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \qquad (2.3.1)$$

скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе.

Отсюда можно заключить, что $d\vec{p} = \vec{F}dt$

изменение импульса тела равно импульсу силы.

Из (3.3.1), получим выражение второго закона через ускорение *а* :

$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}$. т. к. $m = \text{const}$ то $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$. но $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}$,

тогда $m\vec{a} = \vec{F}$

$m\vec{a} = \vec{F}$ основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки.

Принцип суперпозиции или принцип независимости действия сил

Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующую силу можно найти из выражения: (2.3.3)

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

Из второго закона Ньютона, имеем $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i,$

где $\vec{a}_i$ – ускорение тела, под действием силы $\vec{F}_i$. Отсюда,

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i \quad (2.3.4)$$

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.

Найдем изменение импульса тела за конечный промежуток времени

$$m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = \vec{F}\Delta t,$$

$$\Delta(m\vec{\upsilon}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \qquad (2.3.5)$$

т.е., изменение импульса тела равно импульсу силы.

В системе СИ семь основных единиц

(м) – метр,

(кг) – килограмм,

(с) – секунда,

(А) – ампер,

(К) – кельвин,

(кд) – кандела (единица силы света),

(кмоль) – единица количества вещества.

Остальные единицы ***производные*** получаются из физических законов связывающих их с основными единицами. Например из второго закона Ньютона производная единица силы

1 кг·м/с^2 = 1 Н.

2.4. Третий закон Ньютона

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

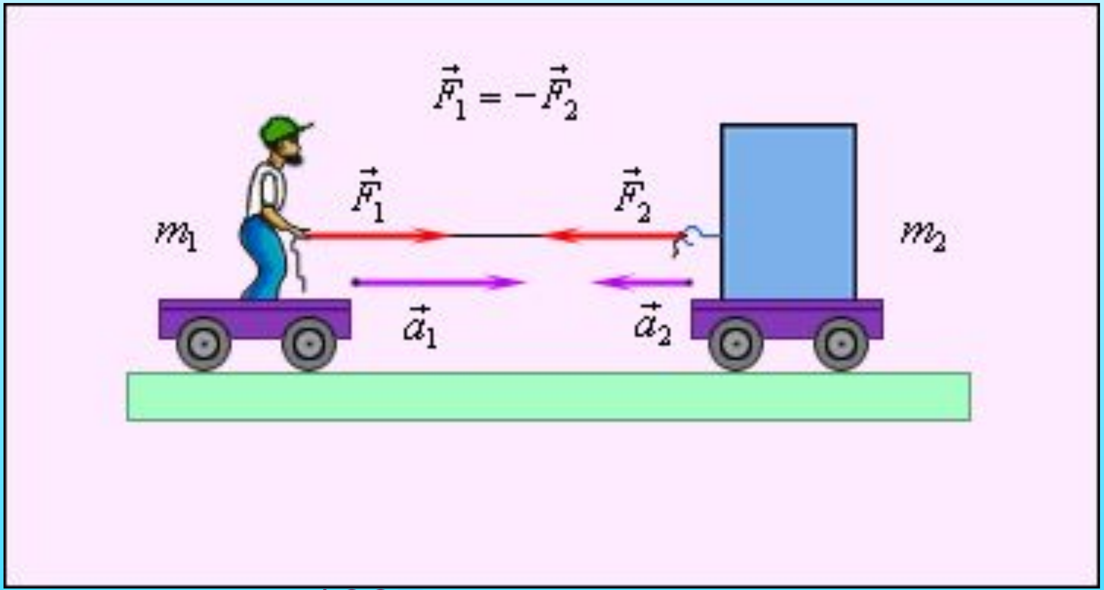
Третий закон Ньютона отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия тел, и устанавливает, что ***силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и противоположны по направлению.***

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.4.1)$$

2.9. Третий закон Ньютона

Взаимодействующие тела действуют друг на друга с одинаковыми по величине, но противоположными по направлению силами:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

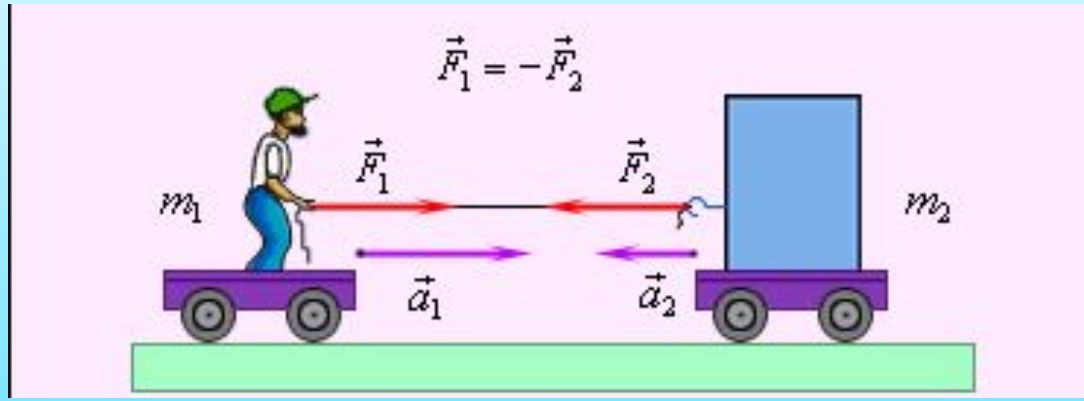


Законы Ньютона сформулированы в 1687 г., играют исключительную роль в механике и являются обобщением результатов огромного человеческого опыта. Их рассматривают как систему взаимосвязанных законов и опытной проверке подвергают не каждый закон в отдельности, а всю систему в целом.

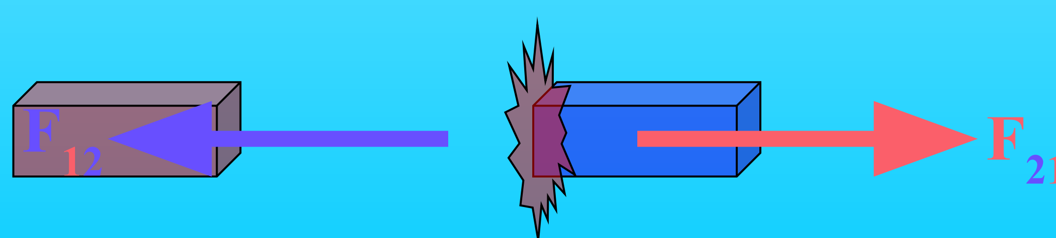
3-й Закон Ньютона в общем случае *является* универсальным законом взаимодействий:

Всякое действие вызывает равное по величине противодействие

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Подчеркнем, *что силы, связанные по 3 закону Ньютона, приложены к* различным *телам и, следовательно, никогда* не могут *начинаться в* одной *точке*



Однако, третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т. е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся друг относительно друга.

Законы Ньютона плохо работают при $\upsilon \approx c$ (релятивистская механика) а также, при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц. Так, например, нуклоны внутри ядра, кварки внутри нуклонов, и даже электроны внутри атома, **не подчиняются законам Ньютона.**

2.5. Импульс произвольной системы тел

Центр инерции или *центр масс* системы материальных точек называют такую точку *C* (рисунок 3.2), радиус-вектор которой:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad (2.5.1)$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса системы, *n* – число точек системы.

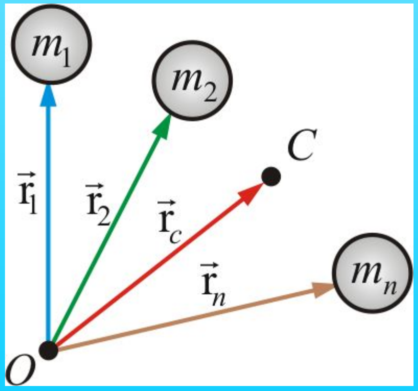


Рисунок 3.2

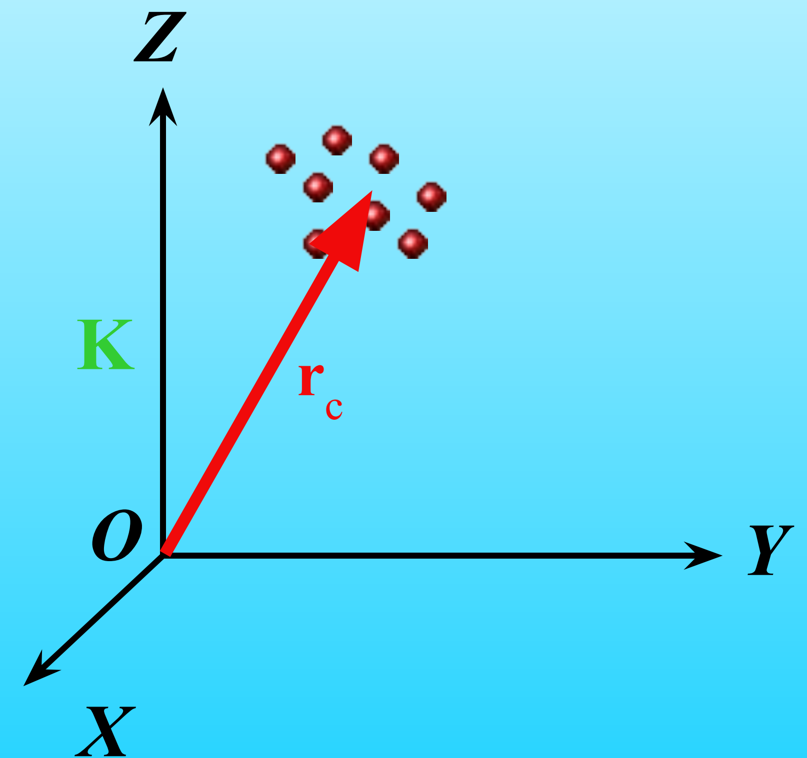
Центр масс

Воображаемую точку *C* радиус-вектором

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i m_i}$$

где i ***- номер точки,***
n ***- количество точек,***
m_i ***- масса*** i***-ой точки и***
m ***- масса всей системы точек***

называют **центром масс**
системы материальных точек



При этом не надо путать *центр масс* с центром *тяжести системы* – с точкой приложения равнодействующей сил тяжести всех тел системы.

Центр тяжести совпадает с центром масс (центром инерции), если ***g*** (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково (когда размеры системы гораздо меньше размеров Земли).

Скорость центра инерции системы $\vec{\upsilon}_c$

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i.$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \qquad (2.5.3)$$

$\vec{p}$ – импульс системы тел, $\vec{\upsilon}_i$ – скорость *i*-го тела системы. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c$$

то импульс системы тел можно определить по формуле

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$$

– импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость её центра инерции.

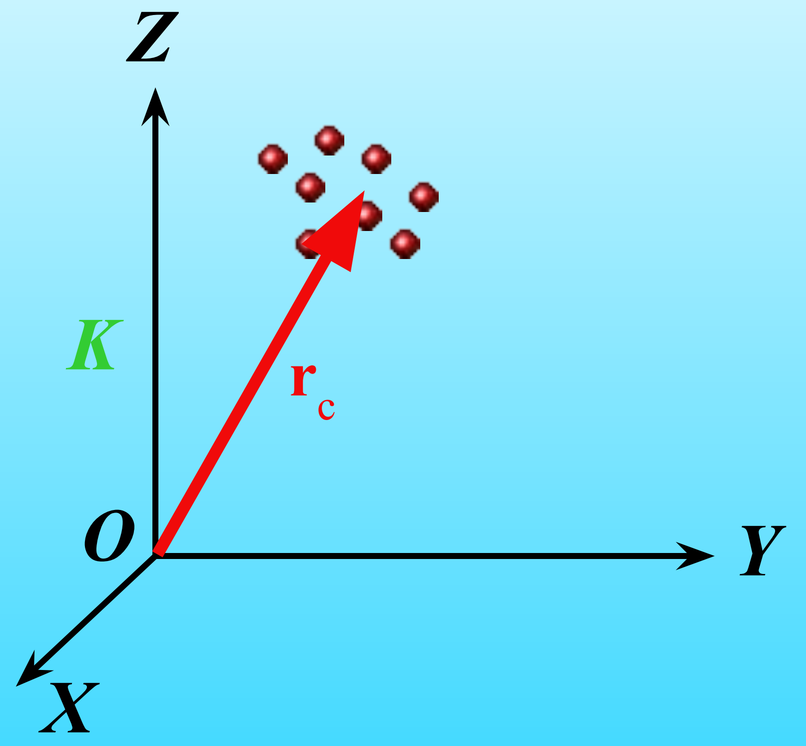
Величина $\boxed{\vec{p}_i = m_i \upsilon_i}$

является **первым динамическим параметром** ***частицы и называется*** **импульсом**

Соответственно величину

$$\boxed{\vec{P}_c = m\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}$$

называют **импульсом центра масс**



Таким образом видим, что связь **импульса** P_c ***со*** **скоростью** v_c ***такая же, как для*** **материальной точки с массой** m ***(масса системы)***

2.6. Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы тел

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют **внешними телами**, а силы, действующие на систему со стороны этих тел – **внешними силами**. Силы взаимодействия между телами внутри системы, называют **внутренними силами**.

Результирующая всех внутренних сил действующих на i-ое тело:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр.}} = \sum_{k \neq i}^{n} \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in},$$

где $k \neq i$ – т.к. *i*-ая точка не может действовать сама на себя.

Обозначим $\vec{F}_i^{\text{внеш.}}$ – *результирующая всех внешних сил* приложенных к *i*-ой точке системы.

По второму закону Ньютона можно записать систему уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right)=\vec{F}_1^{\text{внеш.}}+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\ldots+\vec{F}_{1n},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right)=\vec{F}_2^{\text{внеш.}}+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\ldots+\vec{F}_{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_n\vec{\upsilon}_n\right)=\vec{F}_n^{\text{внеш.}}+\vec{F}_{n1}+\ldots+\vec{F}_{n,n-1}.$$

Сложим эти уравнения и сгруппируем попарно силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш.}}+(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21})+\ldots+(\vec{F}_{n-1,n}+\vec{F}_{n,n-1}).$$

По третьему закону Ньютона, $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$ поэтому все выражения в скобках в правой части уравнения равны нулю. Тогда остаётся:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш.}}=\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Назовем $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш.}}$ – *главным вектором всех внешних сил*,

тогда:
$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}. \qquad (2.6.1)$$

Скорость изменения импульса ***системы тел*** *равна главному вектору всех внешних сил, действующих на эту систему.*

Это уравнение называют ***основным уравнением динамики поступательного движения системы тел.***

Так как импульс системы $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$ то

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}_c\right) = \vec{F}$$

Отсюда можно записать ***основное уравнение динамики поступательного движения системы тел*** в виде:

$$m\vec{a}_c = \vec{F} \qquad (2.6.3)$$

Здесь $\vec{a}_c$ – ускорение центра инерции.

$$m\vec{a}_c = \vec{F}$$

Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

На основании ***третьего закона Ньютона***, силы, действующие на тела системы со стороны других тел системы (***внутренние силы), взаимно компенсируют друг друга. Остаются только внешние силы.***

В общем случае движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_C$ и вращательного вокруг *центра инерции.*

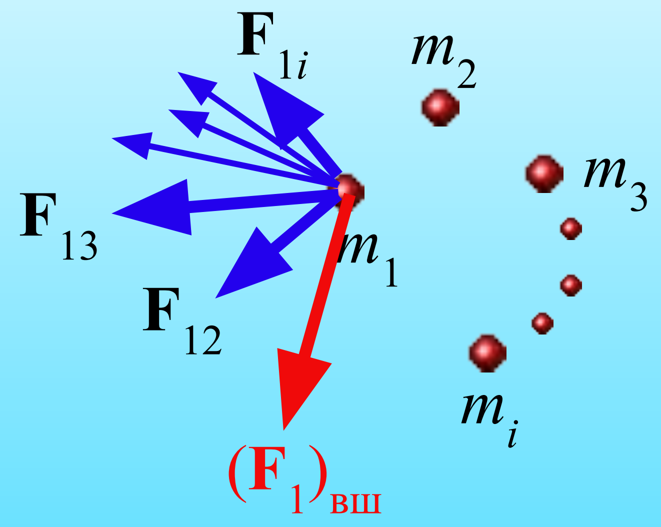
Теорема о движении центра масс

Рассмотрим подробнее силы, *действующие на частицы механической системы*

Силы, действующие на каждую *точку системы, разобьем на* два типа

– *внутренние силы*

– *результирующая всех внешних сил*



В общем виде *это можно записать так:*

$$\vec{F}_i = \sum_{k=1}^{n-1} \vec{F}_{ik} + \left(\vec{F}_i\right)_{вн}$$

По 3 закону Ньютона $$\sum_{i,k} \vec{F}_{ik} \equiv 0$$

И теорема о движении центра масс *принимает вид*

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i\right)_{вн}}$$

Если система находится во внешнем стационарном и однородном поле, то **никакими действиями внутри системы невозможно изменить движение центра масс системы**

2.7. Закон сохранения импульса

Механическая система называется ***замкнутой*** (*или изолированной*), *если на неё не действуют внешние силы, т.е. она не взаимодействует с внешними телами*.

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда не замкнута, т.к. подвержена, как минимум воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например – Солнечная система).

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0, \qquad (2.7.1)$$

отсюда $$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_c = \text{const}. \qquad (2.7.2)$$

*Это есть **закон сохранения импульса**: импульс **замкнутой системы** не изменяется во времени.*

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c,$ тогда

$$m\vec{\upsilon}_c = \text{const}. \qquad (2.7.3)$$

При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из основных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц и для релятивистских скоростей, когда $\upsilon \approx c$

2.8. Виды и категории сил в природе

Одно из простейших определений силы: *влияние одного тела (или поля) на другое, вызывающее ускорение – это* ***сила.***

Однако, спор вокруг определения силы не закончен до сих пор – это обусловлено трудностью объединения *в одном определении* сил, различных по своей природе и характеру проявления.

В настоящее время, различают ***четыре типа сил*** *или* ***взаимодействий***:

- **гравитационные;**
- **электромагнитные;**
- **сильные (ответственное за связь частиц в ядрах) и**
- **слабые** (ответственное за распад частиц)

Виды фундаментальных взаимодействий:

1. Гравитационное

- Присуще всем материальным объектам.
- Определяется наличием у тел массы
- Подчиняется закону всемирного тяготения Ньютона
- Имеет неограниченный радиус действия. В области микромира роль гравитационного взаимодействия ничтожно мала.

2. Слабое

- Приводит к определенному виду нестабильности элементарных частиц.
- Имеет ограниченный радиус действия
- Существенно только в области микромира.

3. Электромагнитное

- Возникает между телами, имеющими электрический заряд.
- Две составляющие: электрическая и магнитная.
- Неограниченный радиус действия.
- Образование атомов, молекул, макроскопических тел.

4. **Ядерное или сильное взаимодействие**

- Имеет конечный (~ 10^{-15} м) радиус действия
- Существенно только в микромире.

Если условно принять интенсивность сильного взаимодействия за 1, то интенсивность электромагнитного взаимодействия будет 10^{-2}, слабого взаимодействия 10^{-13}, а гравитационного 10^{-40}.

I. Силы

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}}$$

- Силы трения
- Силы гравитационные
- Силы тяжести (вес тела)
- Силы упругости

2.9. Сила тяжести и вес тела

Одна из фундаментальных сил – сила гравитации проявляется на Земле в виде ***силы тяготения*** *– сила, с которой все тела притягиваются к Земле.*

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением – *ускорением свободного падения g*, (вспомним школьный опыт – «трубка Ньютона»). Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует сила тяжести $m\vec{g}$

Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения к Земле (различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей, не вполне инерциальная).

то есть *вес и сила тяжести равны друг другу, но приложены к разным точкам: вес к подвесу или опоре, сила тяжести – к самому телу*. Это равенство справедливо, если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или двигаются равномерно, прямолинейно). Если имеет место движение с ускорением, то справедливо соотношение:

$$P = mg \pm ma = m(g \pm a). \qquad (2.9.1)$$

$$P = mg \pm ma = m(g \pm a).$$

Вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если g и a направлены в одну сторону (тело движется вниз или падает), то

$$\boxed{P < mg}$$

и если наоборот, то $\boxed{P > mg}$

Если же тело движется с ускорением $\boxed{a = g}$ то $\boxed{P = 0}$ – т.е. наступает *состояние невесомости*.

Пример: космический корабль на орбите.

2.10. Упругие силы

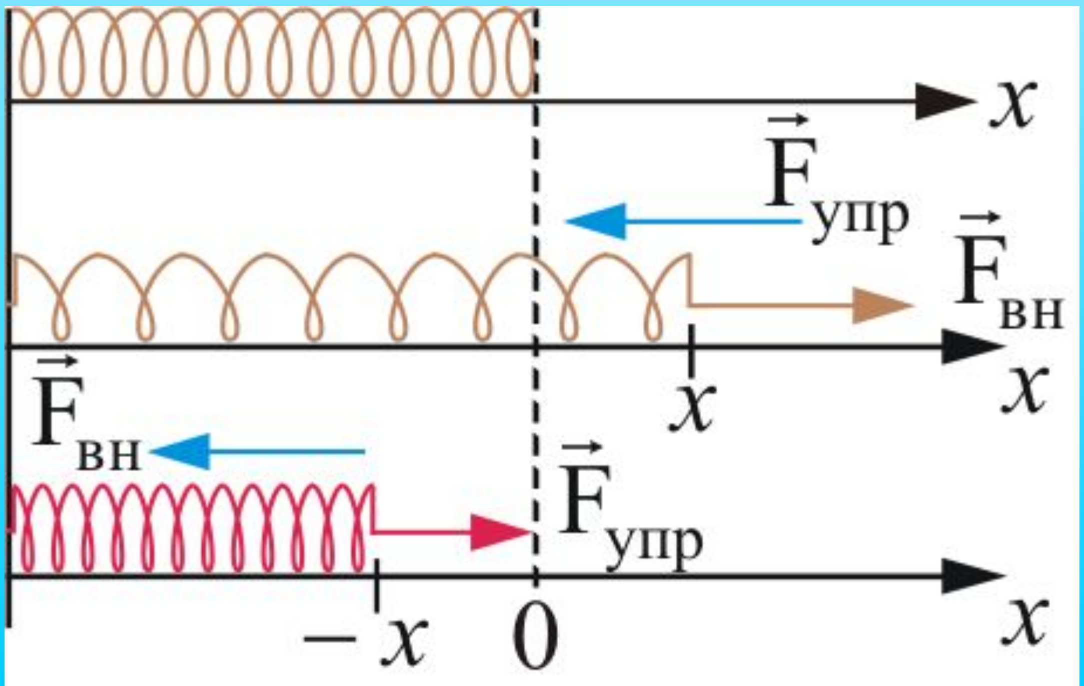
Электромагнитные силы проявляют себя как ***упругие силы и силы трения.***

Под действием внешних сил возникают ***деформации*** (т.е. изменение размеров и формы) тел. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется ***упругой.*** Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, которая называется ***пределом упругости.***

При превышении этого предела деформация становится ***пластичной или неупругой***, т.е. первоначальные размеры и форма тела полностью не восстанавливается.

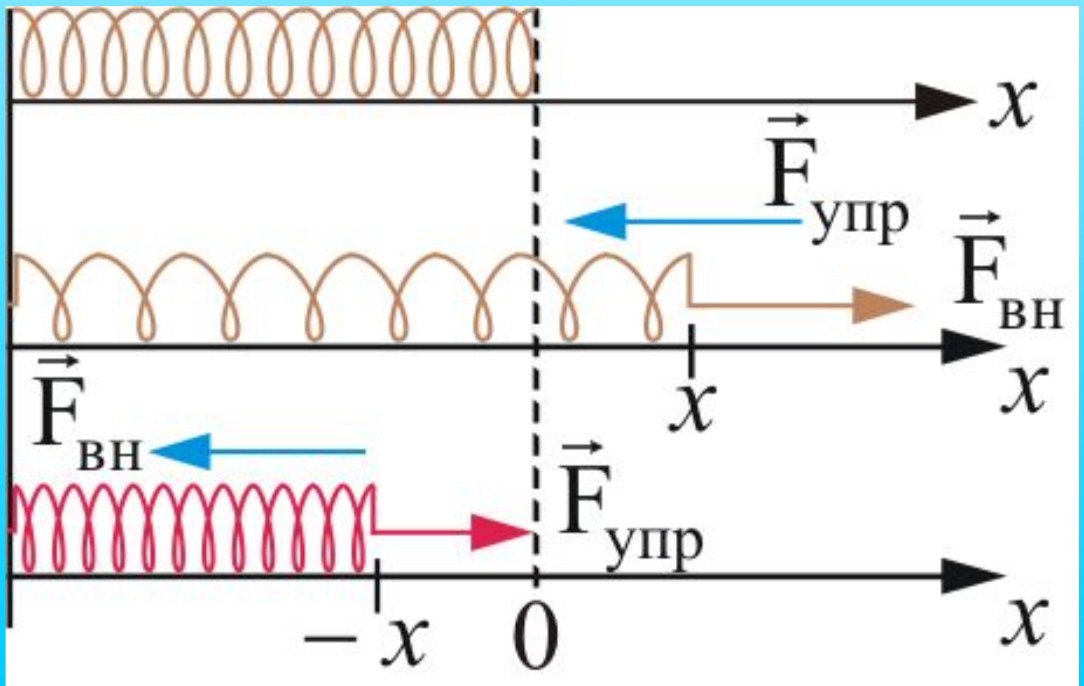
Рассмотрим упругие деформации.

В деформированном теле (рис) возникают упругие силы, уравновешивающие внешние силы.



Под действием *внешней силы* – $F_{вн}$. пружина получает *удлинение x*, в результате в ней возникает *упругая сила* – $F_{упр}$, *уравновешивающая* $F_{вн}$.

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой упругости $F_{упр}$.

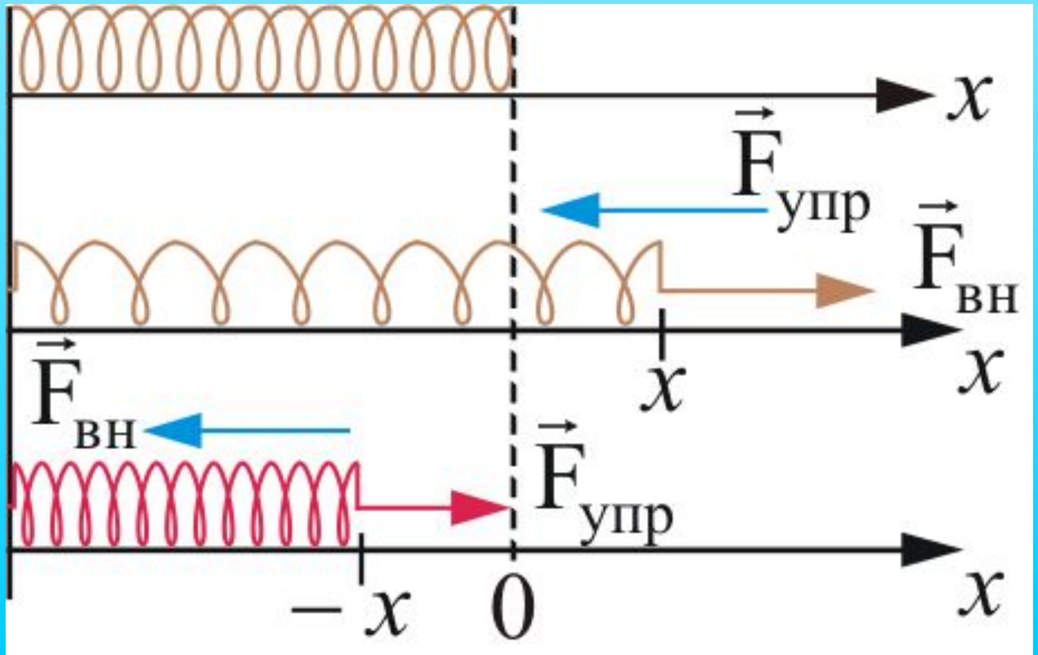


Удлинение пружины пропорционально внешней силе и определяется ***законом Гука***:

$$\boxed{x = \frac{1}{k} F_{\text{вн.}},} \qquad (2.10.1)$$

k – жесткость пружины.

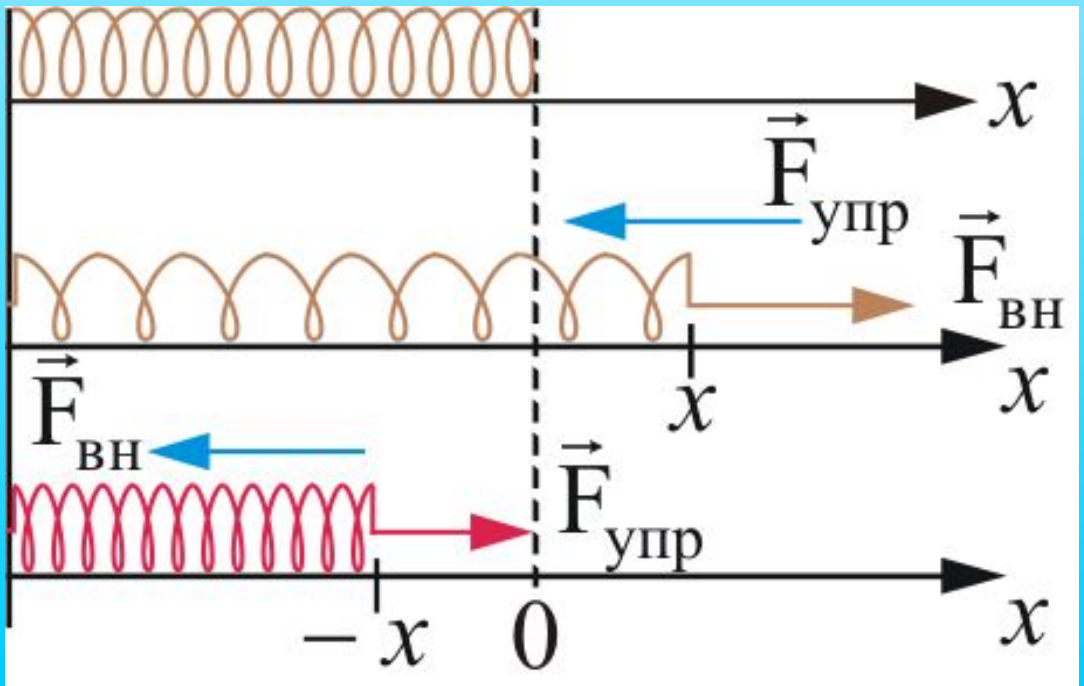
Видно, что чем больше *k*, тем меньшее удлинение получит пружина под действием данной силы.



Так как упругая сила отличается от внешней только знаком, т.е. $F_{\text{упр.}} = -F_{\text{вн.}}$

то закон Гука можно записать в виде:

$$\boxed{F_{\text{упр.}} = -kx.}$$



Потенциальная энергия упругой пружины U равна работе, совершенной над пружиной.

Так как сила не постоянна, то элементарная работа равна $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}A = -kx\mathrm{d}x,$$

Тогда ***полная работа, которая совершена пружиной, равна***:

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_0^x kx\mathrm{d}x = -\frac{kx^2}{2}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Закон Гука для стержня

Одностороннее (или продольное) растяжение (сжатие) стержня состоит в **увеличении (уменьшении) длины стержня под действием внешней силы** $\vec{F}$

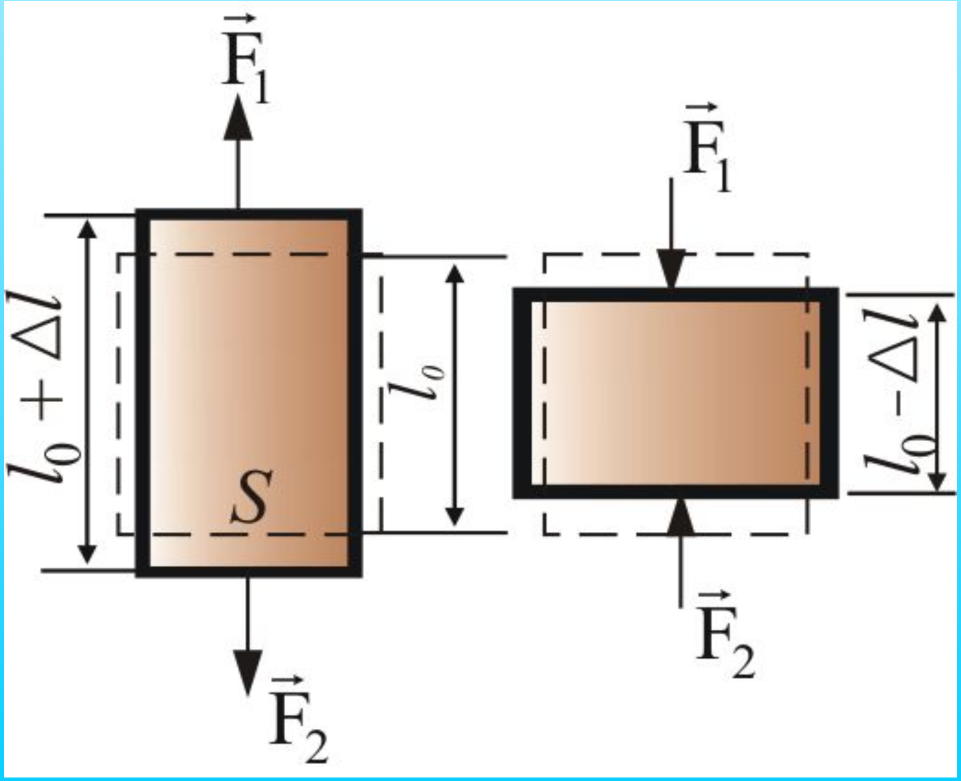


Рисунок 2.3

Такая деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил, которые принято характеризовать *напряжением* σ:

$$\boxed{\sigma = \frac{F_{\text{упр.}}}{S},}$$

Здесь $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения стержня, *d* – его диаметр.

В случае растяжения σ считается положительной, а в случае сжатия – отрицательной. Опыт показывает, что приращение длины стержня Δ*l* пропорционально напряжению σ:

Приращение длины стержня Δ*l* пропорционально напряжению σ:

$$\boxed{\Delta l = \frac{1}{k}\sigma.}$$

Коэффициент пропорциональности *k*, как и в случае пружины, зависит от свойств материала и длины стержня.

Доказано, что

$$\boxed{k = \frac{E}{l_0}}$$

где *E* – *величина, характеризующая упругие свойства материала стержня* – ***модуль Юнга.***

E - измеряется в Н/м^2 или в Па.

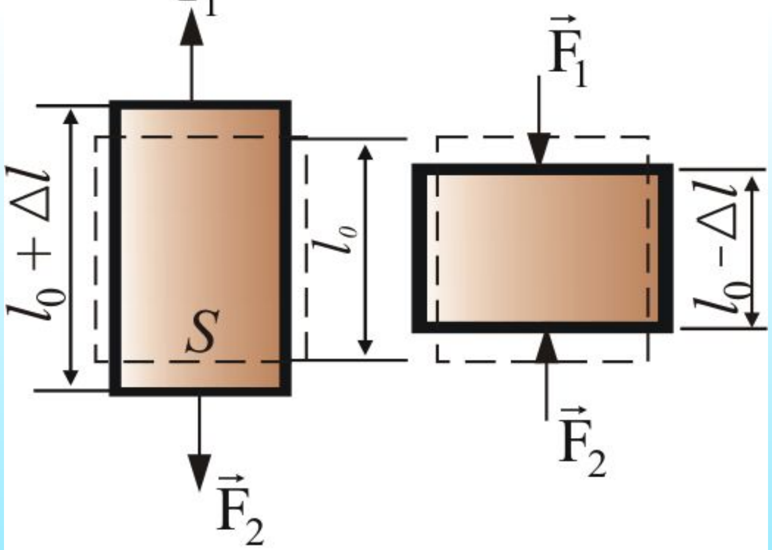
приращение длины:

$$\boxed{\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E},}$$

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon}$$ – *относительное приращение длины*,

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma} \qquad (2.10.2)$$

З*акон Гука для стержня*: *относительное приращение длины стержня прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга.*



Растяжение или сжатие стержней сопровождается соответствующим изменением их поперечных размеров

Отношение относительного поперечного сужения (расширения) $\frac{\Delta d}{d}$ *стержня к относительному удлинению (сжатию)* $\frac{\Delta l}{l}$ *называют* **коэффициентом Пуассона**

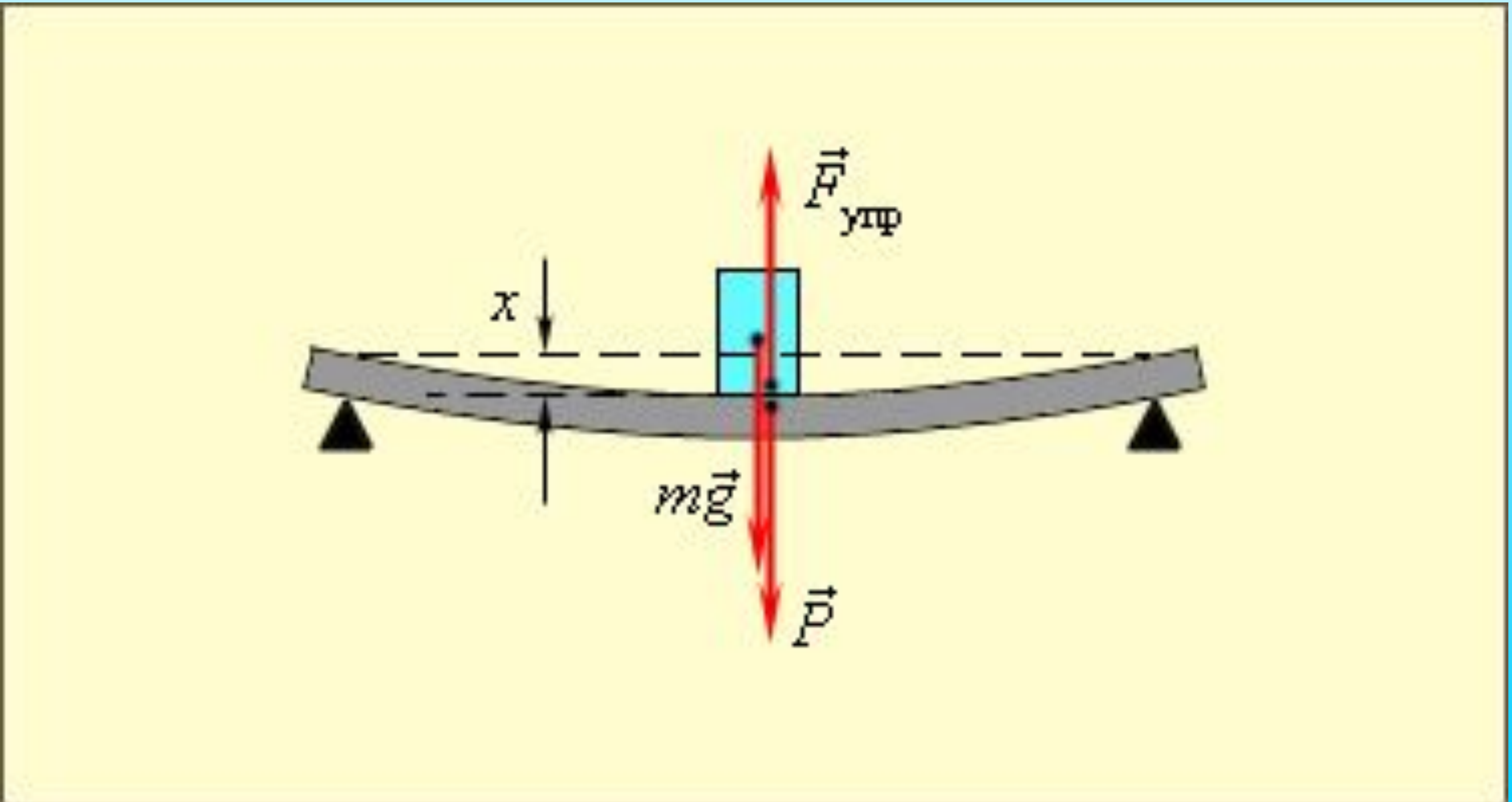
$$\boxed{M = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l}.} \qquad (2.10.3)$$

Объемная плотность потенциальной энергии тела ω_σ при растяжении (сжатии) определяется удельной работой по преодолению упругих сил $A_{\text{упр}}$ рассчитанной на единицу объема тела:

$$\boxed{\omega_\sigma = A_{\text{упр.}} = \frac{\sigma^2}{2E}.} \quad (2.10.4)$$

Деформация сдвига

Изгиб



Деформация сдвига

Под действием силы $\vec{F}$ приложенной касательно к верхней грани, брусок получает **деформацию сдвига**

Пусть *AB* – плоскость сдвига

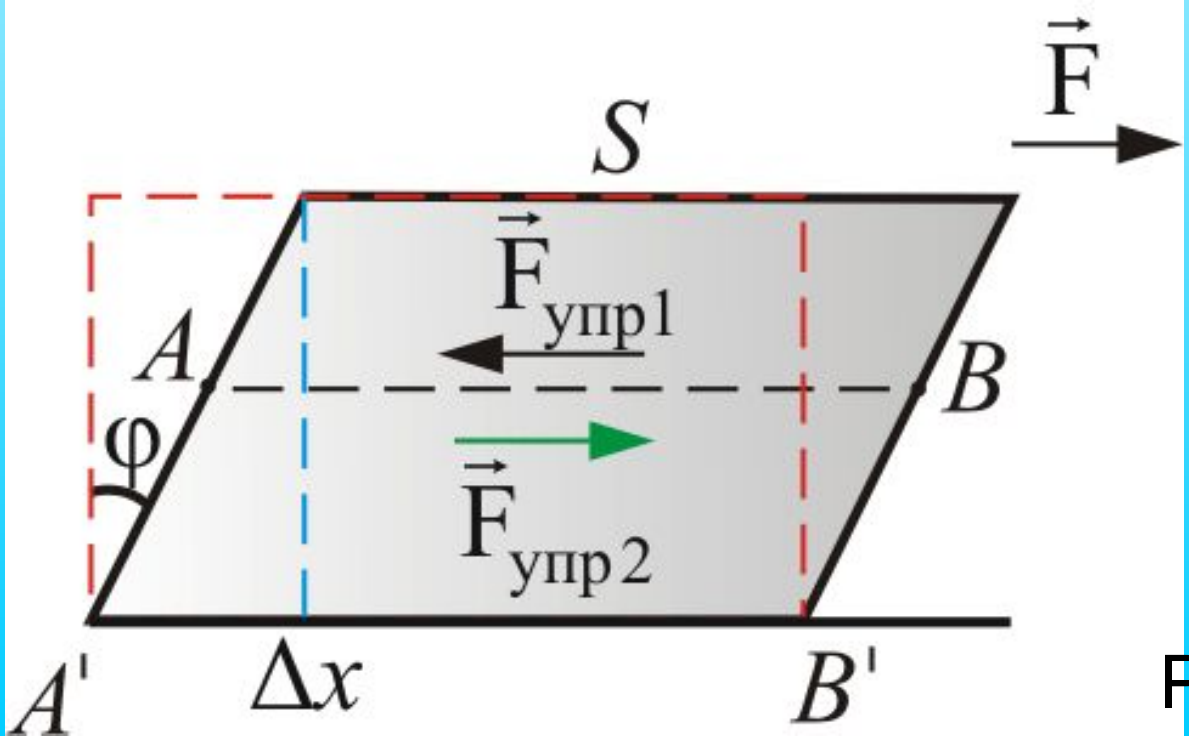


Рисунок 2.4

2.11. Силы трения

Трение подразделяется на ***внешнее и внутреннее.***

Внешнее трение *возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел* (*трение скольжения или трение покоя*).

Внутреннее трение *наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела* (*например, жидкость или газ*).

Различают ***сухое*** и ***жидкое*** (или ***вязкое***) *трение.*

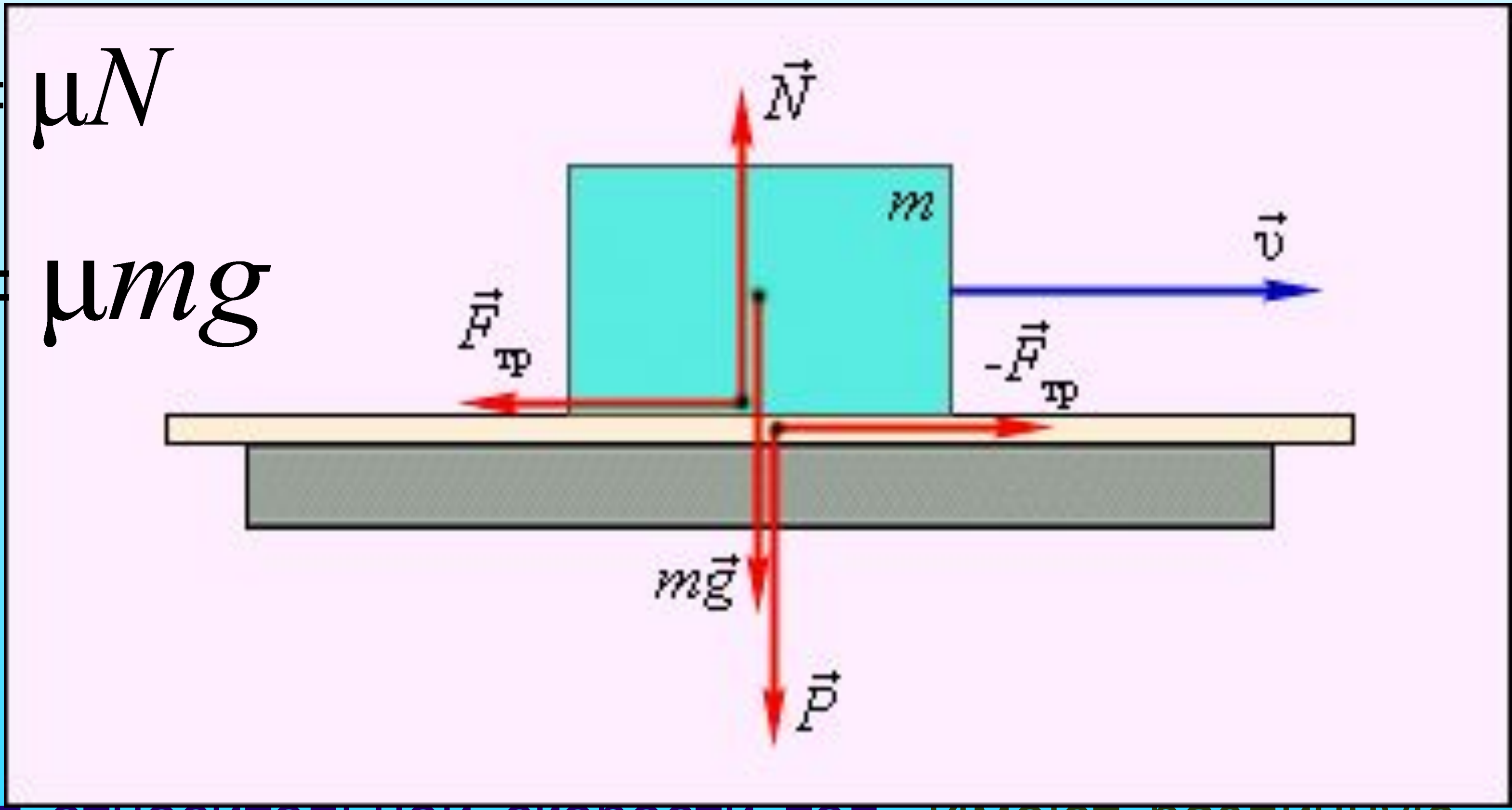
Жидким (***вязким***) *называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.*

Сухое трение*, в свою очередь, подразделяется на* ***трение скольжения*** *и* ***трение качения****.*

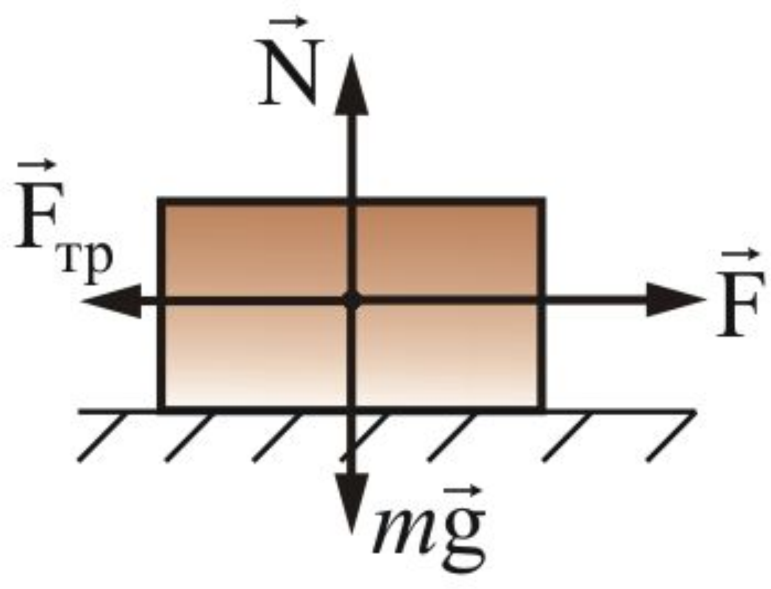
Силы трения - тангенциальные силы, возникающие при соприкосновении поверхностей тел и препятствующие их относительному перемещению.

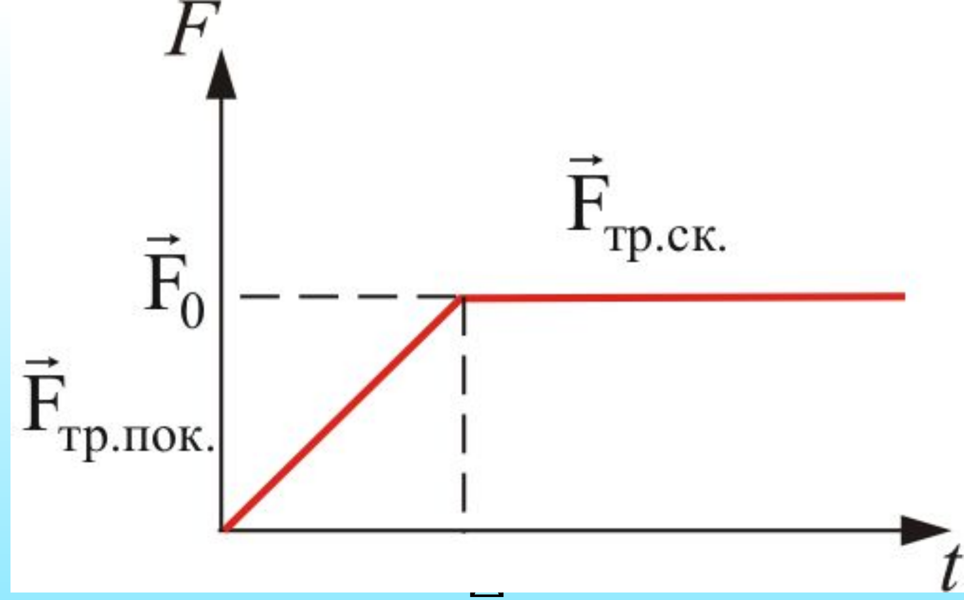
$$F_{тр} = \mu N$$

$$F_{тр} = \mu mg$$



Зависят от относительной скорости тел. Имеют различную природу. В результате действия сил трения механическая энергия превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел (диссипация энергии).





Подействуем на тело, внешней силой $\vec{F}$ постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит внешняя сила уравновешивается некоторой силой $\vec{F}_{тр.}$

В этом случае $\vec{F}_{тр.}$ – и есть ***сила трения покоя***.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0, тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{тр.пок.}$ сменится трением скольжения $F_{тр.ск}$

Установлено, что ***максимальная сила трения покоя*** не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно ***пропорциональна модулю силы нормального давления N***

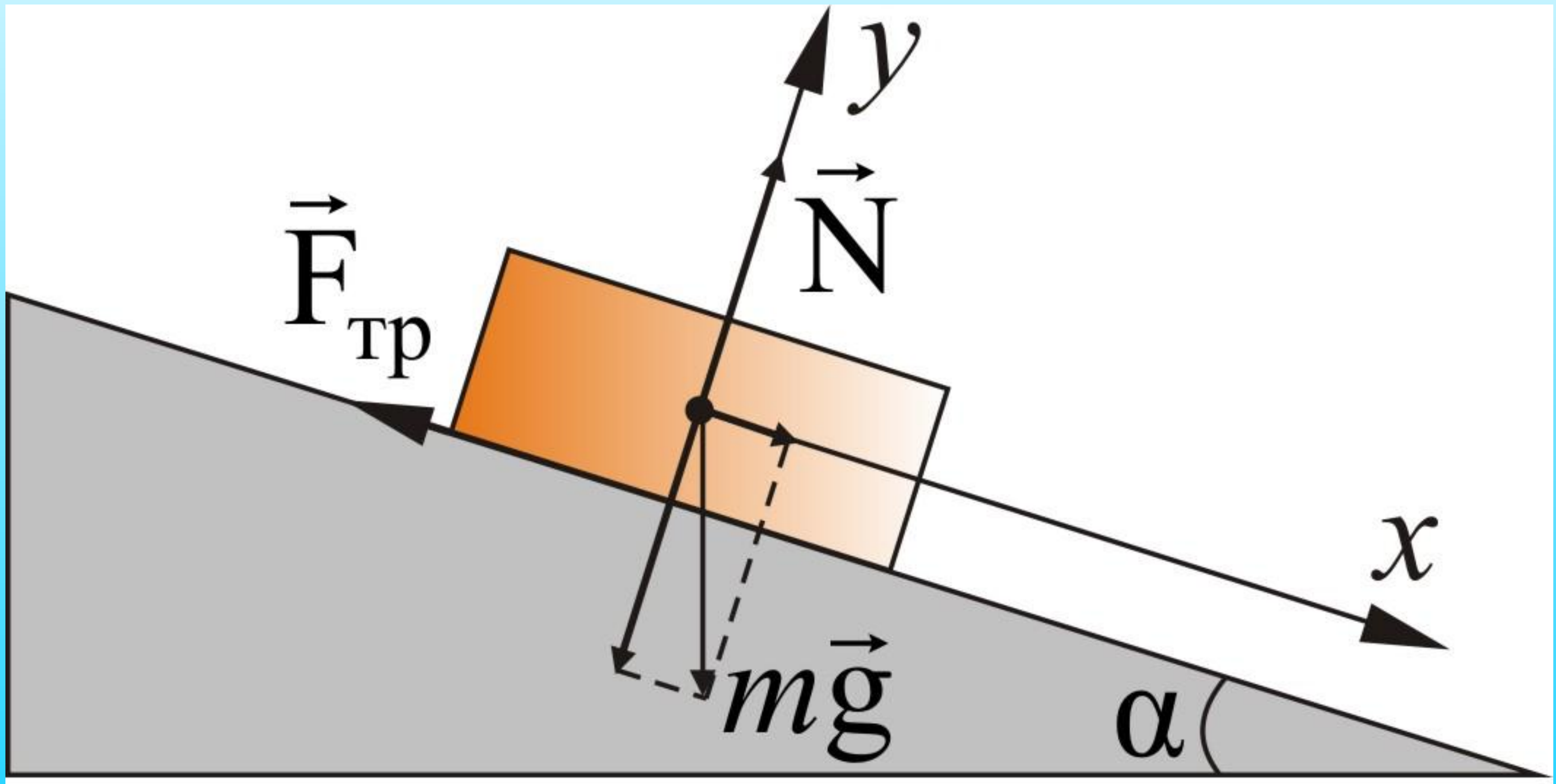
$$\boxed{F_0 = \mu_0 N,}$$

μ_0 – коэффициент трения покоя – зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

Аналогично и *для **силы трения скольжения***:

$$\boxed{F_{тр.} = \mu N} \qquad (2.11.1)$$

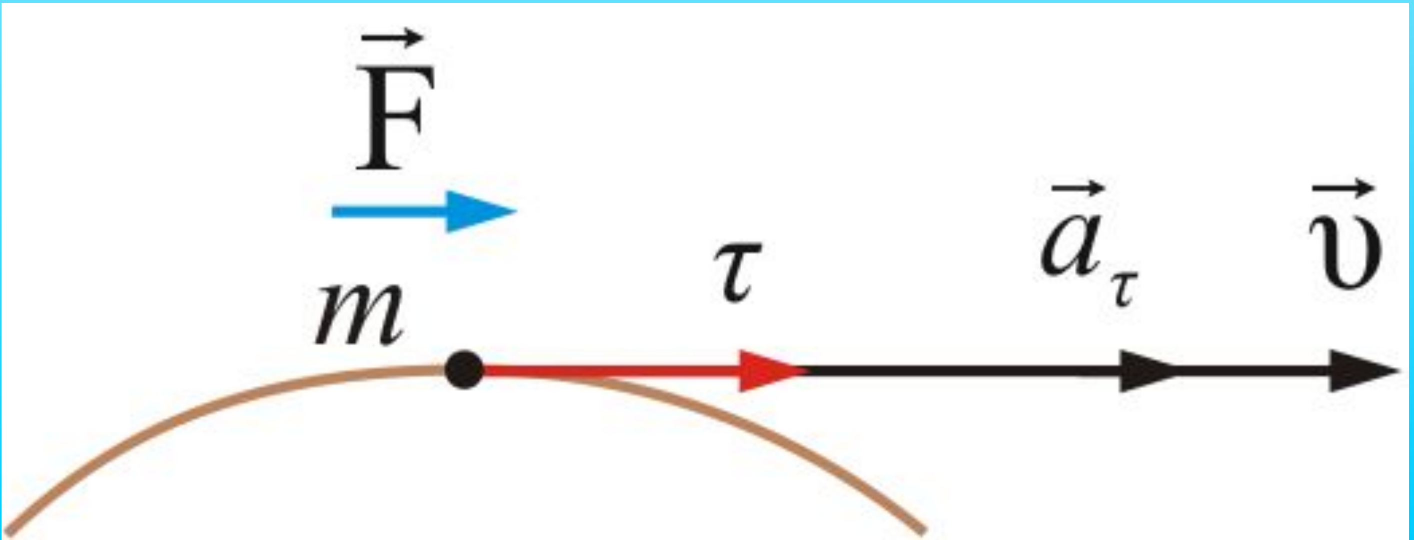
Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и скольжения, но коэффициент трения μ здесь значительно меньше.


y
$\vec{N}$
$\vec{F}_{тр}$
x
$m\vec{g}$
α

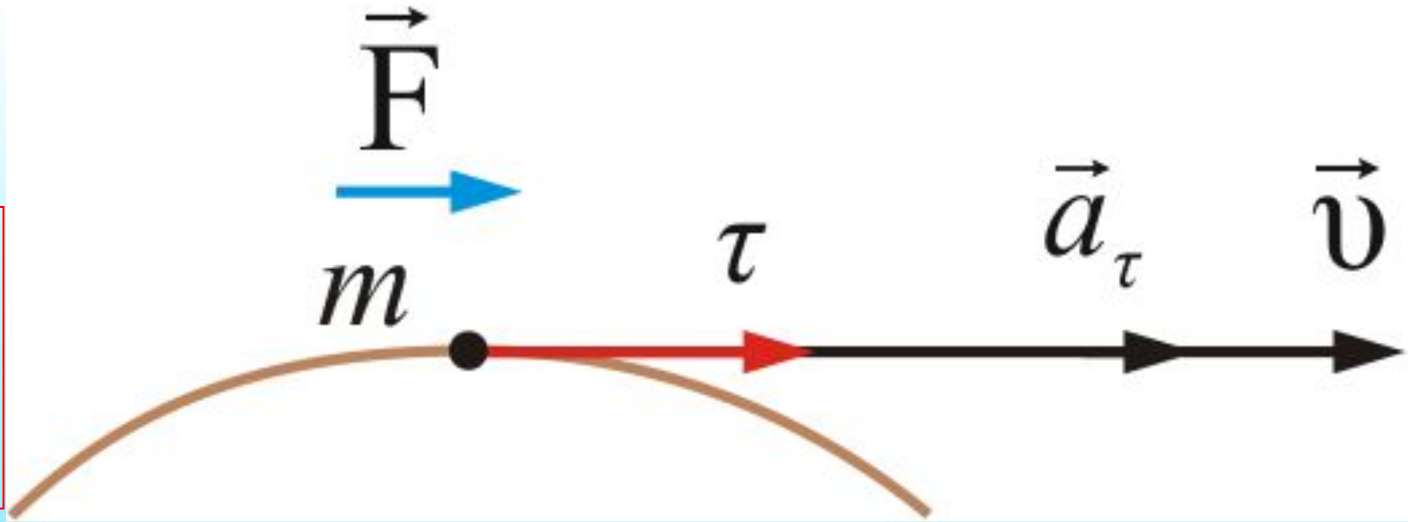
2.12. Кинетическая энергия.

Уравнение движения тела под действием внешней силы $\vec{F}$ имеет вид:

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F},} \quad \text{или} \quad \boxed{m\frac{d\upsilon}{dt} = F_{\tau}.} \qquad (2.12.1)$$



$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau.$$



Умножим обе части этого равенства на $\upsilon\,dt = dr$, получим: $m\upsilon\,d\upsilon = F_\tau\,dr.$

Левая часть равенства, есть ***полный дифференциал некоторой функции***:

$$m\upsilon\,d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)$$ или $$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau dr.$$

Т.о. $$\boxed{\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau \mathrm{d}r.}$$

Если система замкнута, то $\vec{\mathrm{F}}^{\text{внеш.}} = 0$ и

$F_\tau = 0,$ тогда и $\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$

*Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы равен нулю, то эта функция может служить **характеристикой состояния** данной системы.*

Функция состояния системы, определяемая **только скоростью** ее движения, называется **кинетической энергией**.

$$\boxed{K = \frac{m\upsilon^2}{2}.} \qquad (2.12.2)$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы.

K – аддитивная величина:

$$\boxed{K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2},}$$

Энергия измеряется в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т.е. в ньютонах на метр: $1\,\text{Н}\cdot м = 1\text{Дж}$

Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (эВ): 1 эВ = 1,6 10-^{19} Дж.

Связь кинетической энергии с импульсом *p*.

Т.к. $$\frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right)=\frac{m^2\upsilon^2}{2m},$$ отсюда

$$\boxed{K=\frac{p^2}{2m}.}$$

Связь кинетической энергии с работой.

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда, элементарная работа по перемещению тела из т. 1 в т. 2, будет равна произведению силы *F* на перемещение d*r* :

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r$$

Следовательно, ***работа*** *силы приложенной к телу на пути r численно равна* ***изменению кинетической энергии этого тела***:

$$A = \Delta K. \qquad (2.12.4)$$

Или ***изменение кинетической энергии*** $\mathbf{d}\boldsymbol{K}$ ***равно работе внешних сил:***

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}A.$$

Работа, так же как и кинетическая энергия, измеряется **в джоулях**.

Скорость совершения работы (передачи энергии) называется ***мощность***.

Мощность есть работа, совершаемая в единицу времени.

Мгновенная мощность

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

или

$$N = F\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = F\upsilon.$$

Средняя мощность

$$< N >= \frac{A}{\Delta t}.$$

Измеряется мощность в ваттах. 1 Вт = 1 Дж/с.

Силы, ***работа которых не зависит от пути***, *по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела называются* **консервативными**.

Обозначим *А* – работа консервативных сил, по перемещению тела из т. 1 в т. 2

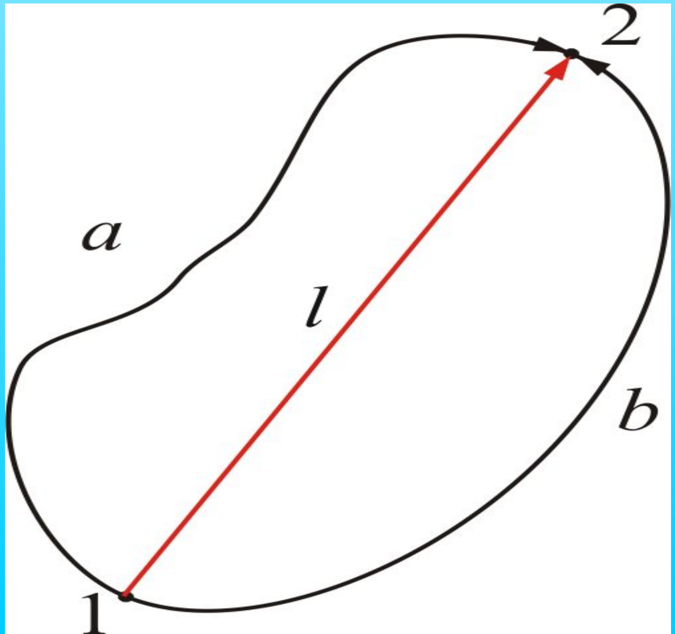


Рисунок 12.2

$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1l2} = A_{12}.$$

Изменение направления движения на противоположное – вызывает изменение знака работы консервативных сил. Отсюда следует, что *работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю*:

$$\oint_S F\mathrm{d}r = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0 \quad (2.12.1)$$

Интеграл по замкнутому контуру *S*, $\boxed{\oint_S \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}\vec{r}}$

– называется *циркуляцией вектора* $\vec{\mathrm{F}}$

Если циркуляция какого-либо вектора силы равна нулю, то эта сила консервативна.

Консервативные силы: сила тяжести, электростатические силы, силы центрального стационарного поля.

Неконсервативные силы: силы трения, силы вихревого электрического поля.

Консервативная система – такая, внутренние силы которой только консервативные, внешние – консервативны и стационарны.

Пример консервативных сил – гравитационные силы.

2.13. Потенциальная энергия

Если на систему материальных тел ***действуют консервативные силы****, то* ***можно*** *ввести понятие* ***потенциальной энергии.***

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, то есть при изменении положения тел относительно системы отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение. Работа определяется только начальной и конечной конфигурациями системы:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \qquad (2.13.1)$$

здесь **потенциальная энергия** $\boldsymbol{U}\,(x,\ y,\ z)$ – *функция состояния системы,* ***зависящая только от координат*** *всех тел системы в поле консервативных сил.*

Итак, $\boldsymbol{K}$ – определяется скоростью движения тел системы, а $\boldsymbol{U}$ – их взаимным расположением.

Из (2.13.1) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U.$$

Потенциальная энергия упругой деформации (пружины)

Найдём работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx,$ Сила непостоянна, поэтому элементарная работа

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$$

знак минус говорит о том, что работа совершена над пружиной.

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \quad (2.13.4)$$

2.14. Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения сводит воедино результаты, полученные нами раньше.

В сороковых годах девятнадцатого века трудами Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля (все в разное время и независимо друг от друга) был доказан закон сохранения и превращения энергии.

Для консервативной системы частиц полная энергия системы:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} + U_{\text{внеш.}} = \mathrm{const}$$

Для механической энергии **закон сохранения** звучит так: ***полная механическая энергия консер-вативной системы материальных точек остаётся постоянной***.

Для замкнутой системы,

т.е. для системы на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} = \text{const} \qquad (2.14.2)$$

т.е. **полная механическая энергия замкнутой системы** *материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы,* ***остаётся постоянной***.

Ñîõðàíåíèå ìåõàíè÷åñêîé ýíåðãèè.avi

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется – частично она переходит в другие виды энергии – неконсервативные.

Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется ***диссипативной****,*

а сам процесс перехода называется ***диссипацией энергии***.

Применение законов сохранения

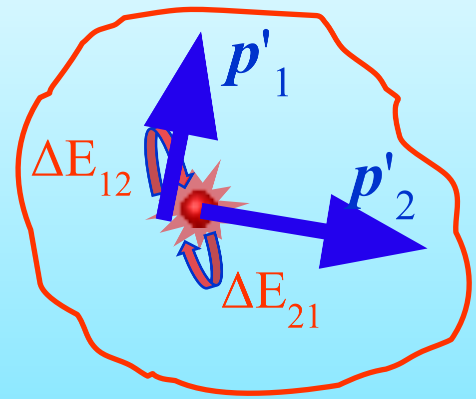
. Абсолютно упругий центральный удар

При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не работает.

Применим закон сохранения механической энергии для расчета скорости тел при ***абсолютно упругом ударе*** *– это такой удар, при котором не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии.*

Удар частиц

Ударом точечных частиц ***будем называть***
такое **механическое взаимодействие**
- при непосредственном контакте
- за бесконечно малое время
при котором **частицы обмениваются**
- энергией и
- импульсом
при условии, что
система частиц ***остается замкнутой***



Различают **два вида ударов**
абсолютно неупругий удар
такой **удар,** ***при котором*** **после удара** ***частицы***
движутся как **единое целое**

Абсолютно упругий ***удар*** **бывает** ***двух типов***
- нецентральный удар
- центральный удар

и абсолютно упругий удар
удар, ***при котором*** **после удара** ***частицы***
движутся с **различными** ***скоростями и*** **в течении удара выполняются законы сохранения**
(энергии и импульса)

Пример 1. Абсолютно-упругий центральный удар

Разберем на ВК

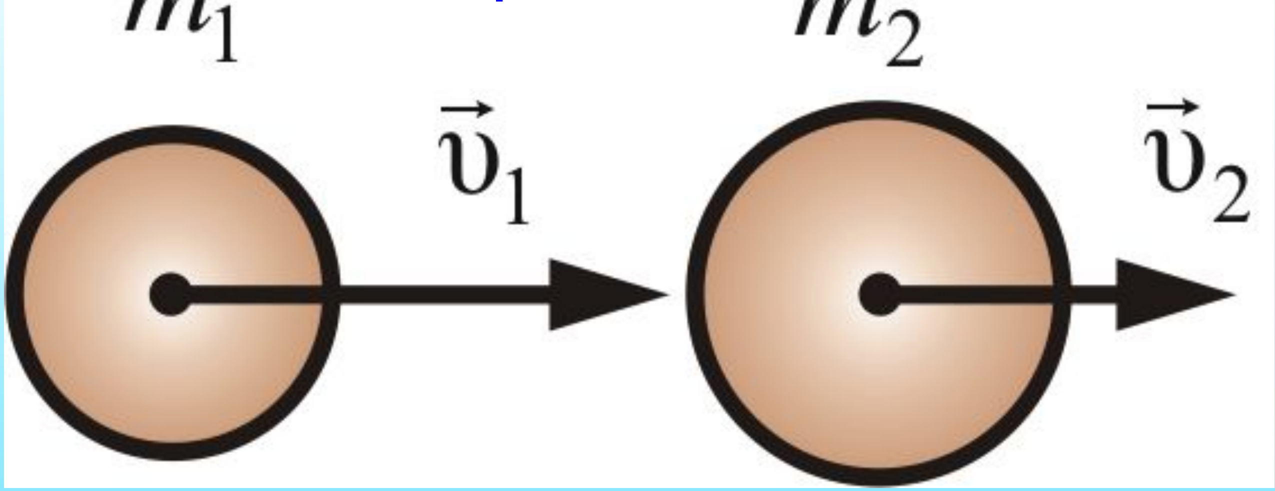


Рисунок 2.7

На рисунке 2.7 изображены два шара m_1 и m_2. Скорости шаров $\vec{\upsilon}_1 > \vec{\upsilon}_2$ (поэтому, хотя скорости и направлены в одну сторону все равно будет удар).

Систему можно считать замкнутой. Кроме того, при абсолютно упругом ударе она консервативна.

Обозначим $\vec{\upsilon}'_1$ и $\vec{\upsilon}'_2$ – скорости шаров после их столкновения.

В данном случае можно воспользоваться ***законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса*** (в проекциях на ось *x*):

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2}=\dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2}+\dfrac{m_2\upsilon_2'^2}{2} \\ m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon'_1+m_2\upsilon'_2. \end{cases}$$

По ЗСЭ

По ЗСИ

Пример 2. Абсолютно упругий удар шара о неподвижную массивную стенку.

Стенку можно рассматривать как неподвижный шар с $\upsilon_2 = 0$ массой $m_2 \to \infty$

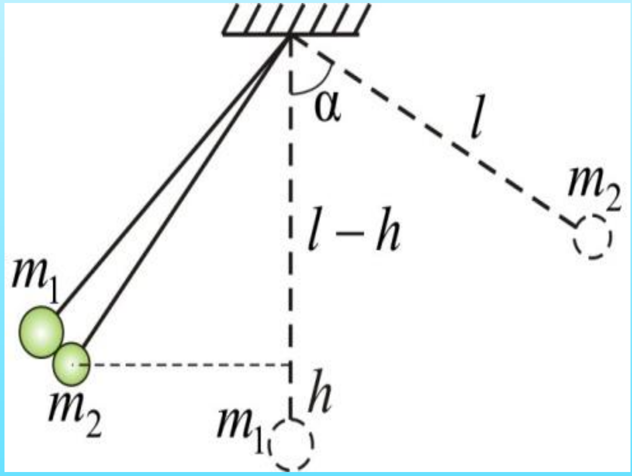
Разделим числитель и знаменатель на $\boldsymbol{m}_2$ и пренебрежем m_1 / m_2 тогда

$$\upsilon'_1 = \frac{2\upsilon_2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\upsilon_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{2\upsilon_2 - \upsilon_1}{1},$$

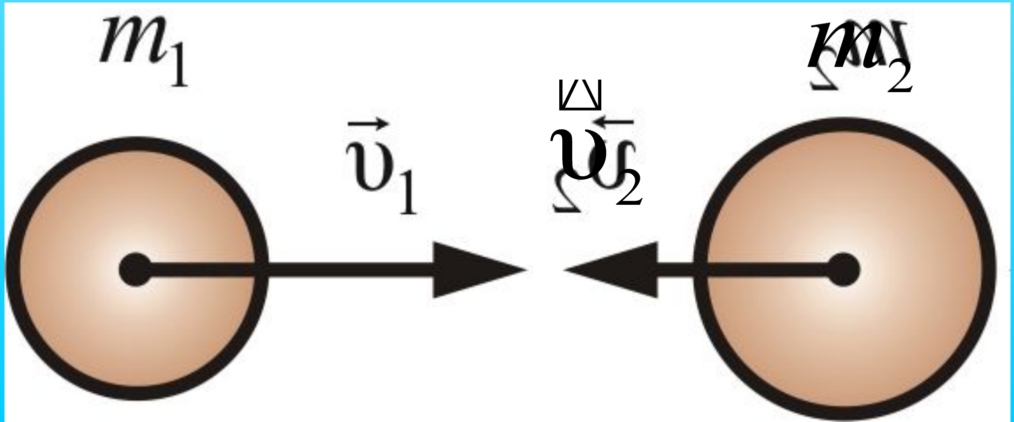
т.е.

Пример 3. Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар *– это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше, как единое целое.*



Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.



Если массы шаров m_1 и m_2, их скорости **до удара** υ_1 и υ_2 то используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon$$

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения шаров **после неупругого удара**:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Итак, скорость слипшихся шаров после неупругого удара $\upsilon = \dfrac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$.

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом.

В частном случае, **если массы и скорости шаров равны,** то

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} = 0$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе.

Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому **закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться.**

Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии (***диссипация энергии***). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

«Потеря» кинетической энергии, (*диссипация энергии*).

$$\Delta K = \left(\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2}$$

Отсюда, получаем

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2 . \quad (5.6.3)$$

Если ударяемое тело было первоначально **неподвижно** $\upsilon_2 = 0$ то

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$