920.1ис 920.2ис

Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: Схема Бернулли. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Вопрос 1. Схема Бернулли.

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях. Например, необходимо определить вероятность определенного числа попаданий в мишень при нескольких выстрелах, вероятность некоторого числа бракованных изделий в данной партии и т.д.

Если вероятность наступления события A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются *независимыми относительно события А*. Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то *вероятность наступления события А в каждом испытании одна и та же*. Описанная последовательность независимых испытаний получила название *схемы Бернулли*.

Вопрос 2. Формула Бернулли.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A.

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием *сложного события*, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют *простыми*.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n-k$ раз.

Вероятность появления k раз события в А в n испытаниях равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p=0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p=0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q=1-p=1-0,75=0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4)=C_6^4p^4q^2=C_6^2p^4q^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(0,75)^4\cdot(0,25)^2=0,30.$$

Вопрос 3. Локальная теорема Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

при $x = (k - np)/\sqrt{npq}$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = (k - np)/\sqrt{npq}$.

Пример 1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, $n=400$; $k=80$; $p=0,2$; $q=0,8$. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x = (k - np)/\sqrt{npq} = (80 - 400 \cdot 0,2)/8 = 0.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0) = 0,3989$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(80) = (1/8) \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены):

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352

Вопрос 3. Интегральная теорема Лапласа.

Теорема. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу*

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2}\, dz, \qquad (*)$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз,

$$P_n(k_1,\ k_2) \simeq \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Функция Ф(х)- функция Лапласа

Функция Ф(х)-нечетная, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p=0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $p=0,2$; $q=0,8$; $n=400$; $k_1=70$; $k_2=100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70,\ 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,\ 100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

По таблице приложения 2 находим:

$$\Phi(2,5) = 0,4938; \quad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{400}(70,\ 100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931