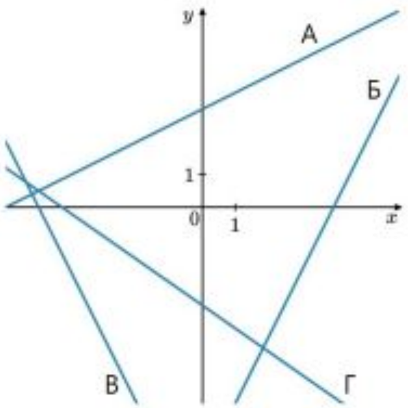
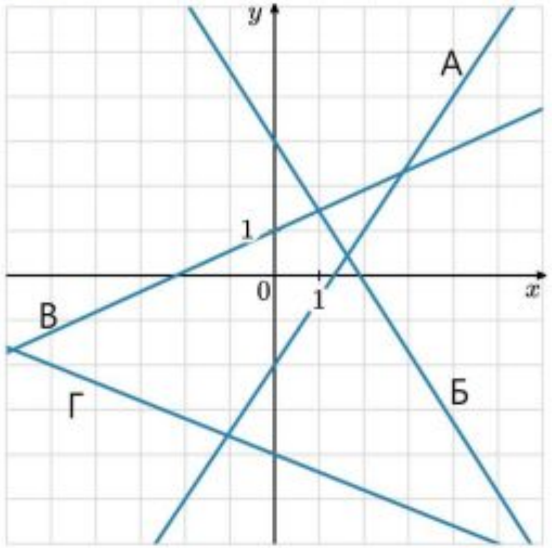
Урок 14
Основное свойство линейной функции

Проверка выполнения домашнего

Задача 1. На рисунке изображены 4 графика линейных функций. У каких из них угловой коэффициент положительный?

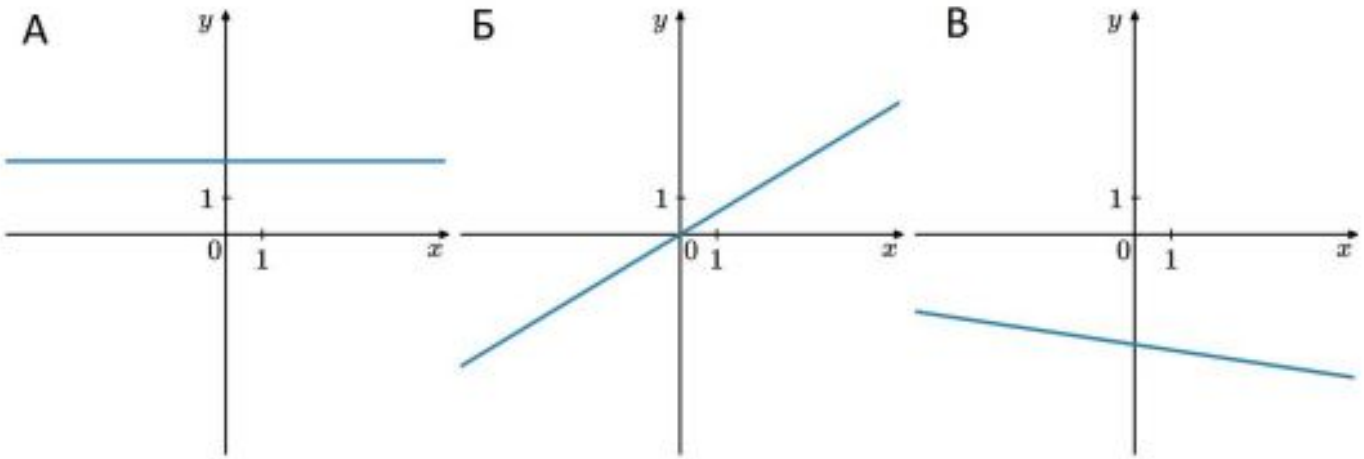


Задача 2. На рисунке изображены графики нескольких функций вида $y = kx + b$. Для каждой из них определите, чему равно b.



Задача 3. Постройте прямую, являющуюся графиком линейной функции $y = kx + b$ с положительным коэффициентом k и отрицательным коэффициентом b.

Задача 4. Установите соответствие между функциями и их графиками.



$y = -0{,}15x - 3$	$y = 2$	$y = 0{,}6x$

Задача 5. Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x) = -9x - 18$ с осями координат.

Задача 6. Через какие координатные четверти проходит прямая $y = -5x + 4$?

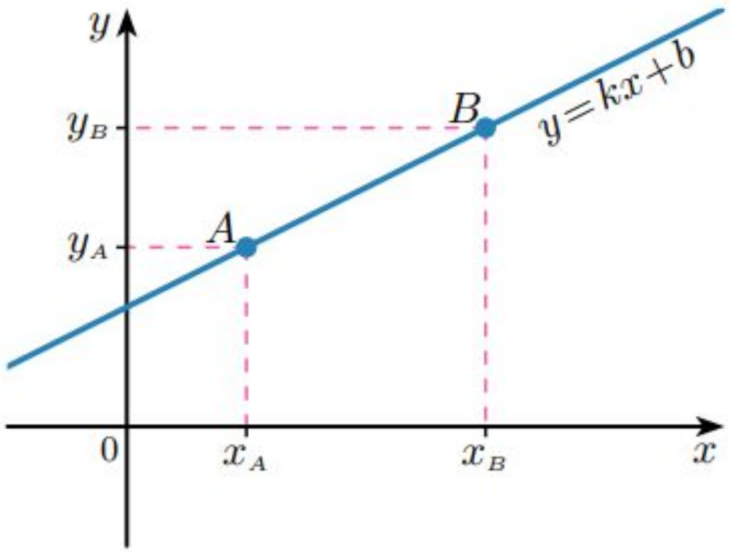
Самостоятельная работа (5 мин)

Что такое угловой коэффициент прямой?

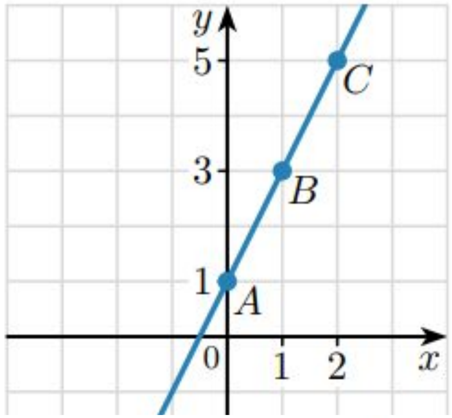
Утверждение (основное свойство линейной функции).

Рассмотрим функцию $y = kx + b$. *Возьмём две произвольные точки* $A(x_A; y_A)$ *и* $B(x_B; y_B)$, *лежащие на её графике (то есть такие, что* $y_A = k \cdot x_A + b$ *и* $y_B = k \cdot x_B + b$*). Тогда*

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Давайте на примере разберёмся, что это значит. Пусть у нас есть линейная функция $y = 2x + 1$ и её график. На этом графике лежат, например, точки A (0; 1), B (1; 3) и C (2; 5).



Возьмём точки $A(0;1)$ и $B(1;3)$ и посмотрим, что получится, если подставить их координаты в формулу $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Для начала выпишем все координаты: $x_A = 0$, $x_B = 1$, $y_A = 1$ и $y_B = 3$. Тогда

$$k = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Как мы видим, найденное значение совпало с коэффициентом k рассматриваемой функции. Теперь рассмотрим какую-нибудь другую пару точек, например A и C. Снова выпишем координаты: $x_A = 0$, $x_C = 2$, $y_A = 1$ и $y_C = 5$. Тогда

$$k = \frac{5-1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2.$$

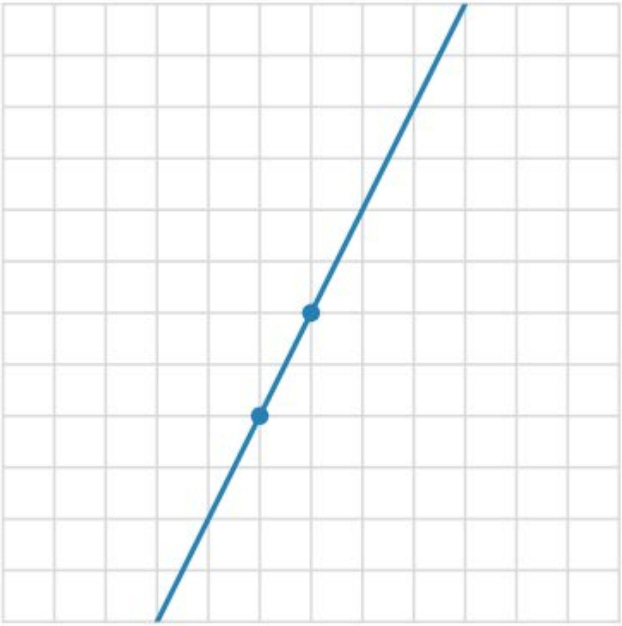
Опять совпало! Теперь возьмём две точки, расположенные подальше от начала координат. Например, точку D с абсциссой $x_D = 100$ и точку E с абсциссой $x_E = -50$ (на наш рисунок они не попадают). Найдём их ординаты, подставив абсциссы в формулу $y = 2x + 1$:

$$y_D = 2 \cdot x_D + 1 = 2 \cdot 100 + 1 = 201,$$
$$y_E = 2 \cdot x_E + 1 = 2 \cdot (-50) + 1 = -99.$$

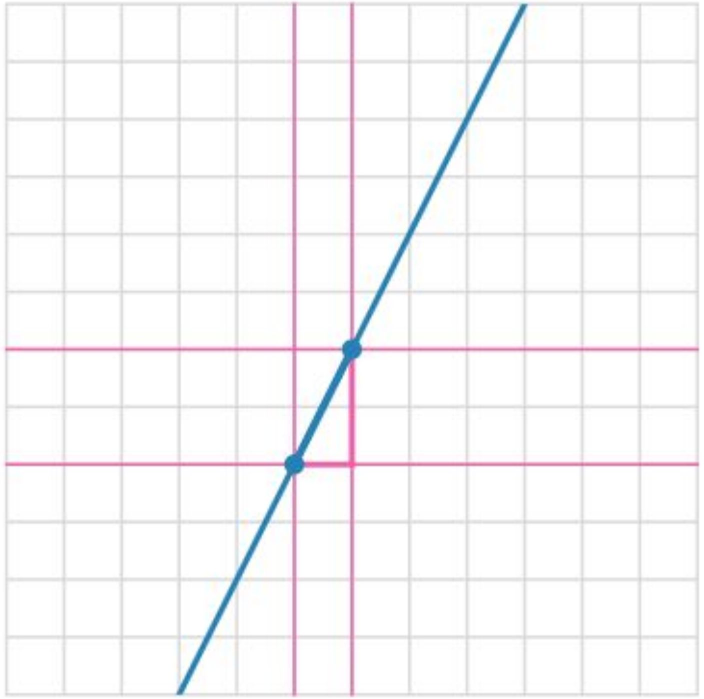
Проверим, что наша формула верна и для точек D и E:

$$k = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{201 - (-99)}{100 - (-50)} = \frac{300}{150} = 2.$$

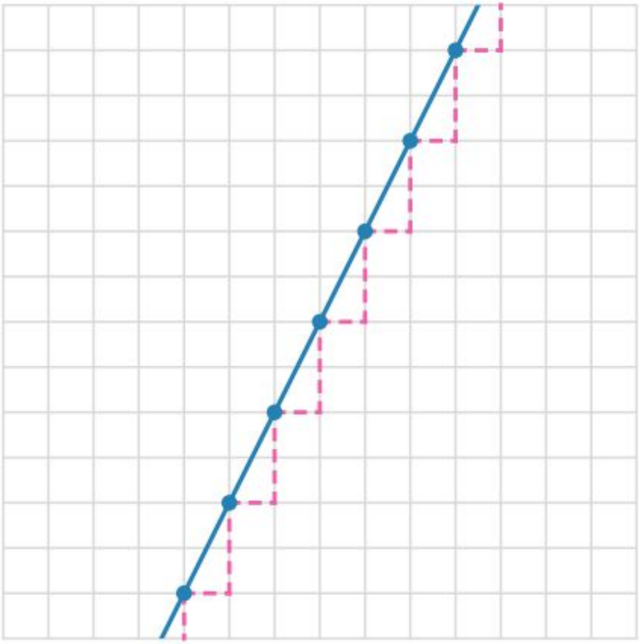
Отметим на клетчатой бумаге две точки, стоящие в углах клеточек, и проведём через них п



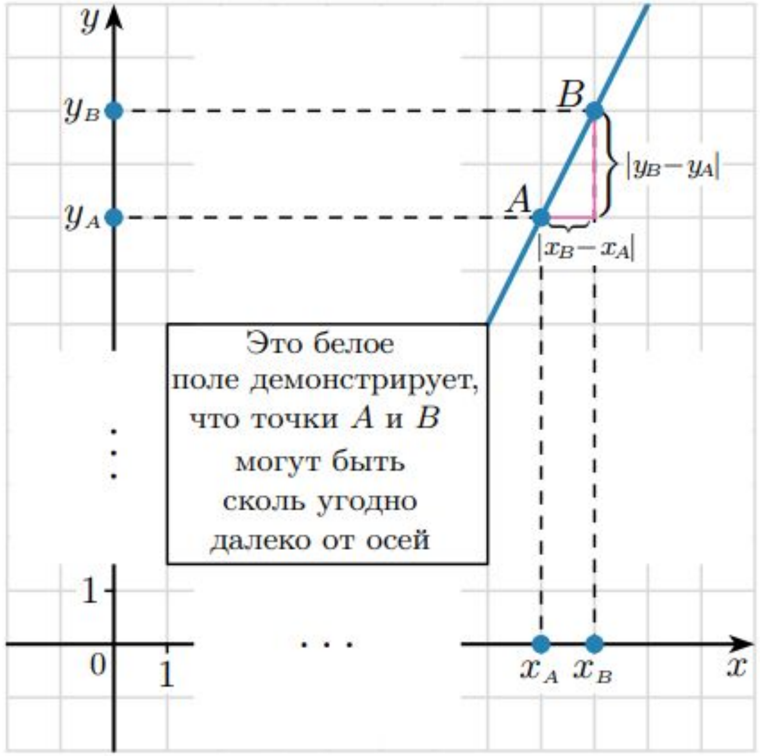
Теперь проведём через каждую из этих точек вертикальную и горизонтальную прямые.



Получился треугольничек. Дальше мы будем рисовать только такие треугольнички, не проводя вертикальные и горизонтальные прямые. Эти треугольнички мы будем называть «ступеньками», потому что если нарисовать много таких треугольничков друг за другом, то их катеты образуют «лесенку».

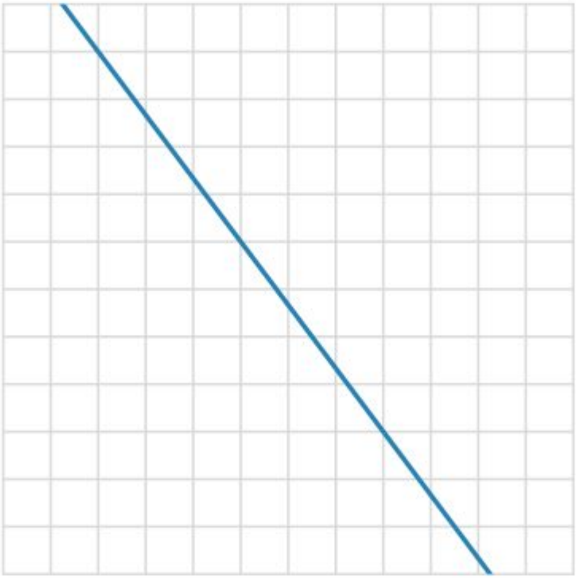


Чем нам поможет этот треугольничек? Давайте рассмотрим наш клетчатый лист как часть координатной плоскости: будем считать, что где-то на этой плоскости проведены координатные оси, просто их не видно на рисунке (как всегда, ось x направлена вправо, а ось y — вверх, то есть оси параллельны сторонам клеточек). Длину единичного отрезка будем считать равной стороне клеточки, тогда вертикальные и горизонтальные прямые на нашем листе будут соответствовать целочисленной сетке. Теперь мы можем сказать, что нижняя сторона треугольничка (ширина «ступеньки») равна модулю разности абсцисс наших двух точек. Понятно, что эта разность не зависит от того, где именно на этой координатной плоскости проходят оси.



Боковая сторона треугольничка (высота «ступеньки») равна модулю разности ординат наших двух точек (мы говорим про модуль, поскольку длина стороны треугольника не может быть отрицательной, а разность координат может). Получается, что угловой коэффициент прямой можно найти как отношение высоты этой «ступеньки» к её ширине, взятое с нужным знаком. Значит, мы можем найти угловой коэффициент прямой, даже не зная координат рассматриваемых двух точек: достаточно знать высоту и ширину «ступеньки». Покажем это на примере.

Считая, что клетки соответствуют целочисленной сетке на координатной плоскости, определите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



Утверждение (альтернативная формулировка). При прибавлении к аргументу линейной функции $f(x) = kx + b$ числа s к значению этой функции прибавляется число $k \cdot s$. Иначе говоря, $f(x + s) = f(x) + ks$.

Пример. Известно, что точки (1; −2) и (2; 3) лежат на прямой $y = kx + b$. Найдите ещё какую-нибудь точку, лежащую на этой прямой.

Пример. Как изменятся значения функций $f(x) = 0{,}5x - 1$ и $g(x) = 5 - x$, если увеличить аргумент на 4?

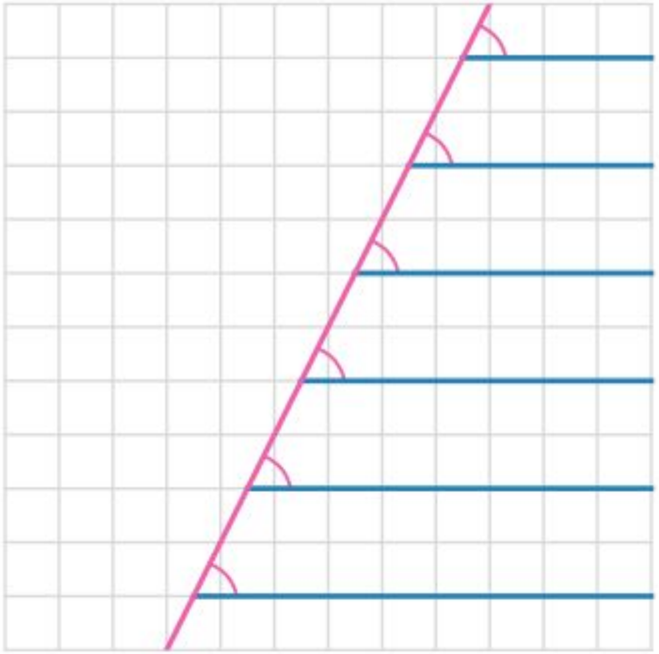
Пример. Заполните пропуски в таблице, пользуясь основным свойством линейной функции.

x	-2	0	2	4	10
y		-6	5		

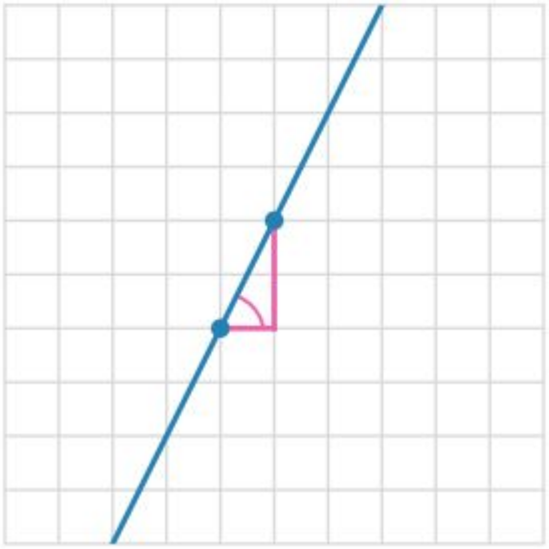
Пример. Определите линейную функцию, график которой пересекает ось x в точке с координатами (1; 0), а ось y в точке с координатами (0; 2).

Геометрический смысл k

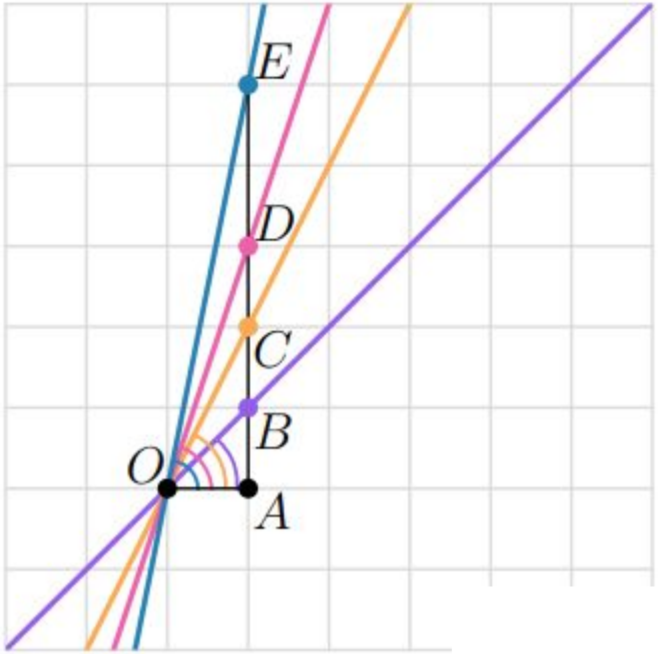
Попробуем разобраться, что такое угол наклона прямой. Посмотрите на рисунок.



Заметим, что все отмеченные углы равны, поскольку это соответственные углы при параллельных прямых (горизонтальных линиях сетки) и секущей. Поскольку ось x тоже является горизонтальной линией сетки, угол наклона прямой можно определить как угол между этой прямой и любой горизонтальной прямой. Давайте рассмотрим этот угол как угол в треугольнике-«ступеньке».



Рассмотрим несколько прямых, проходящих через одну точку, и нарисуем для каждой из них соответствующие «ступеньки» единичной ширины. Из основного свойства линейной функции мы знаем, что высота «ступеньки» равна произведению $|k|$ и её ширины, то есть в нашем случае высота каждой «ступеньки» равна угловому коэффициенту соответствующей прямой.



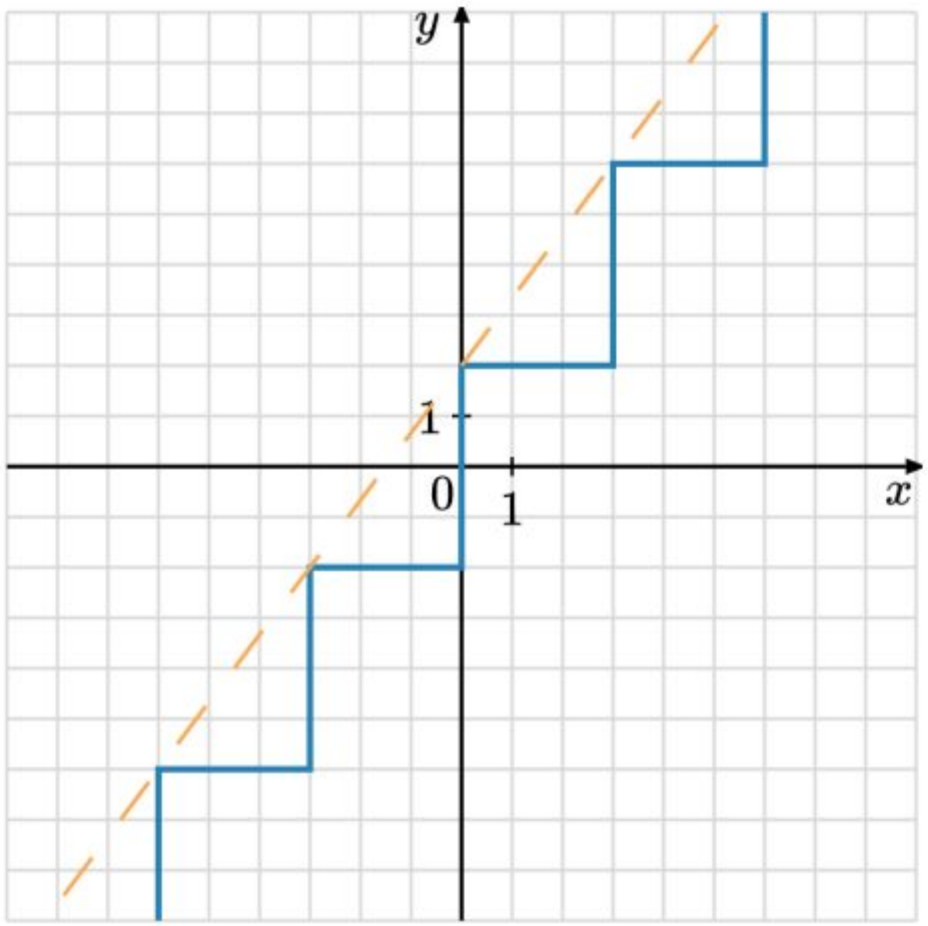
Мы видим, что чем выше «ступенька» (

тем больше угол наклона соответствую

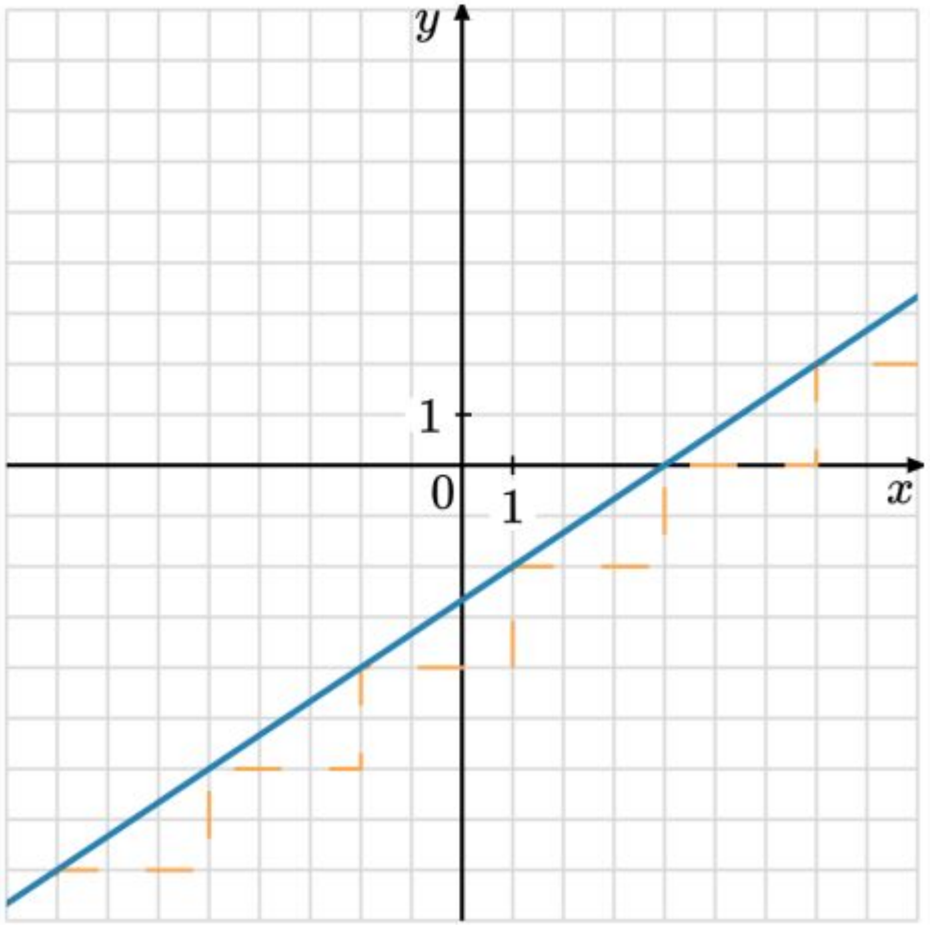
$$AB < AC < AD < AE,$$
$$\angle AOB < \angle AOC < \angle AOD < \angle AOE.$$

Таким образом, основное свойство линейной функции помогло нам показать, что чем больше модуль углового коэффициента прямой, тем больше её угол наклона и наоборот.

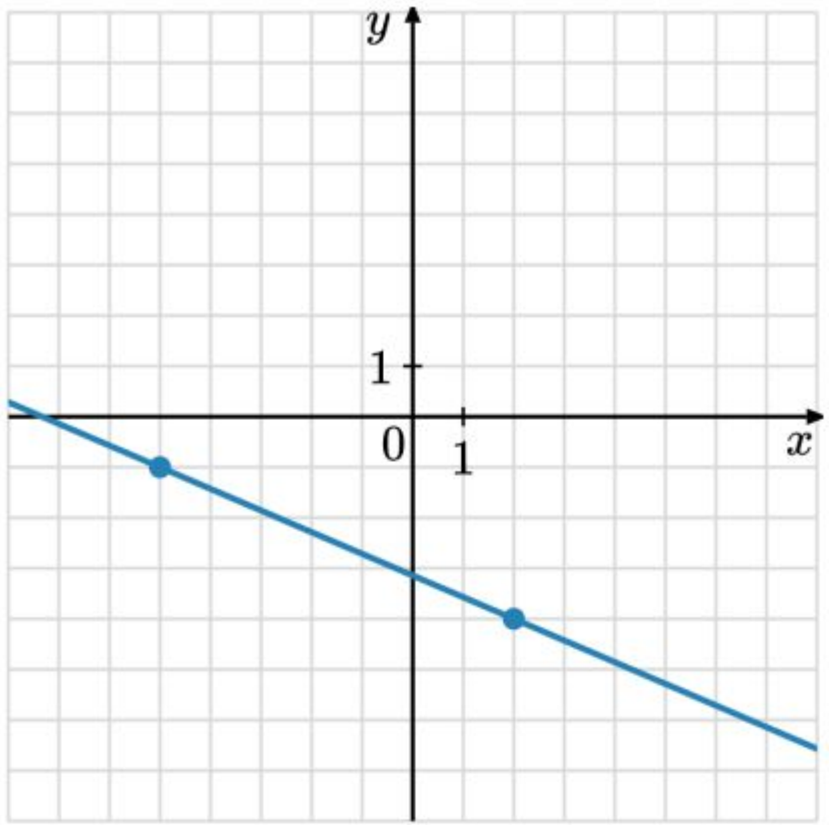
Задача 1. Чему равны ширина и высота ступеньки?



Задача 2. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



Задача 3. Определите угловой коэффициент прямой, проходящей через две отмеченные точки.

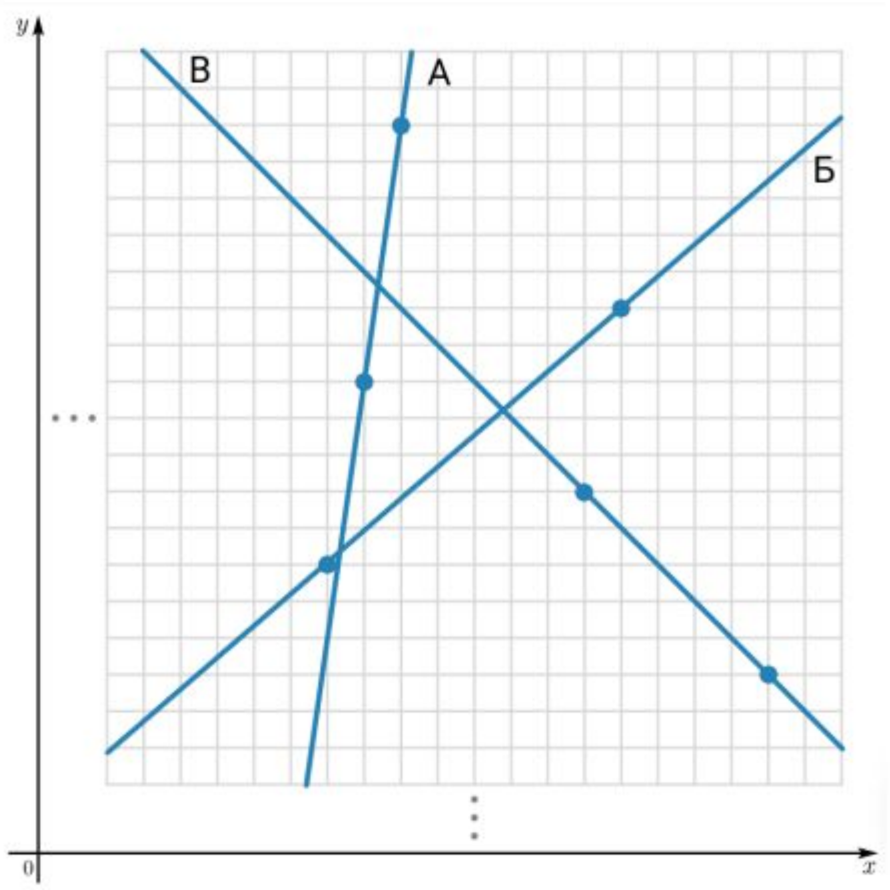


Задача 4. Как изменится значение функции $f(x) = 5 + 3x$, если увеличить аргумент на 8?

Задача 5. Как изменится значение функции $f(x) = -\frac{2}{3}x + 8$, если увеличить аргумент на 9?

Задача 6. График линейной функции $f(x)$ пересекает оси координат в точках $(-2; 0)$ и $(0; 8)$. Напишите формулу, которая задаёт данную функцию.

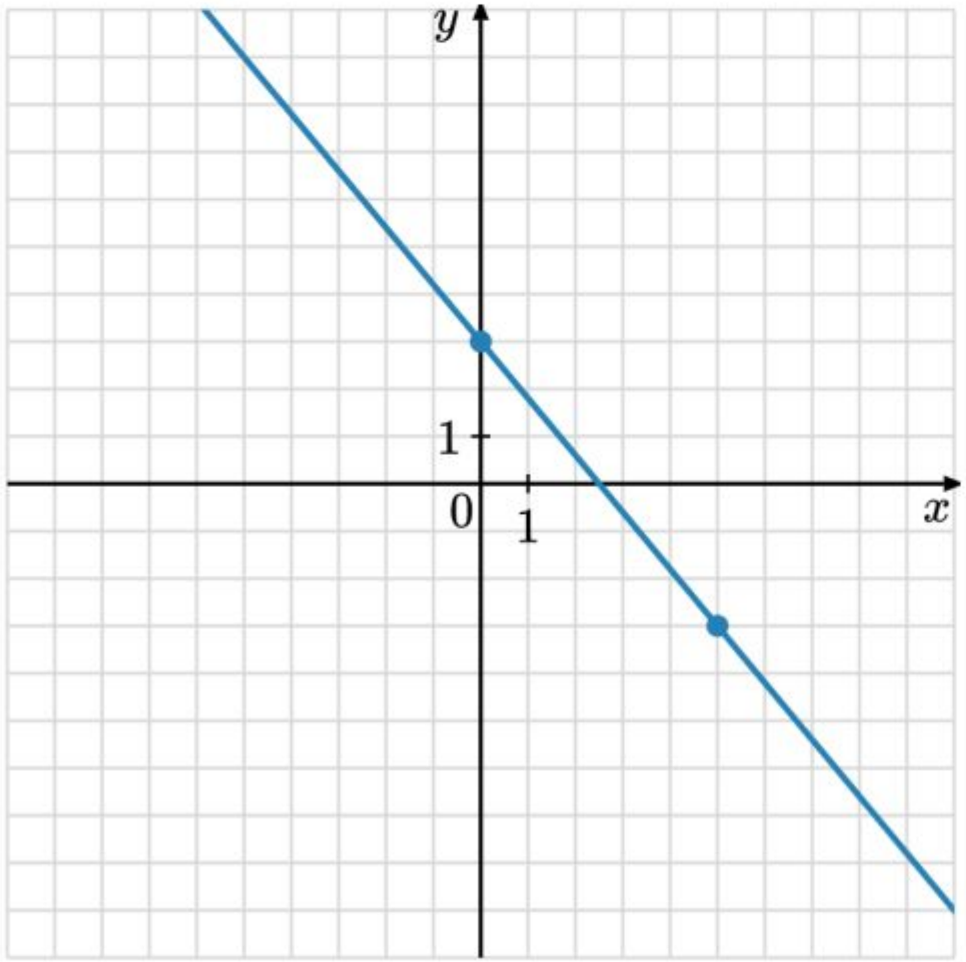
Задача 7. Найдите угловые коэффициенты графиков линейных функций, изображённых на рисунке. Сторона квадрата сетки является единичным отрезком.



Задача 8. Пользуясь основным свойством линейной функции, заполните таблицу значений некоторой линейной функции $f(x)$.

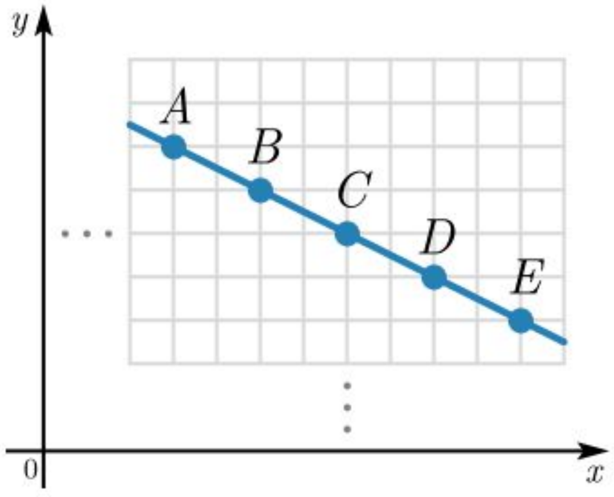
x		-50	0	40	80	
$f(x)$	-36		-10	-2		26

Задача 9. Найдите координаты точек пересечения графика линейной функции с осями координат. Чтобы восстановить уравнение прямой, используйте основное свойство линейной функции, выбрав на графике две точки с целочисленными координатами.

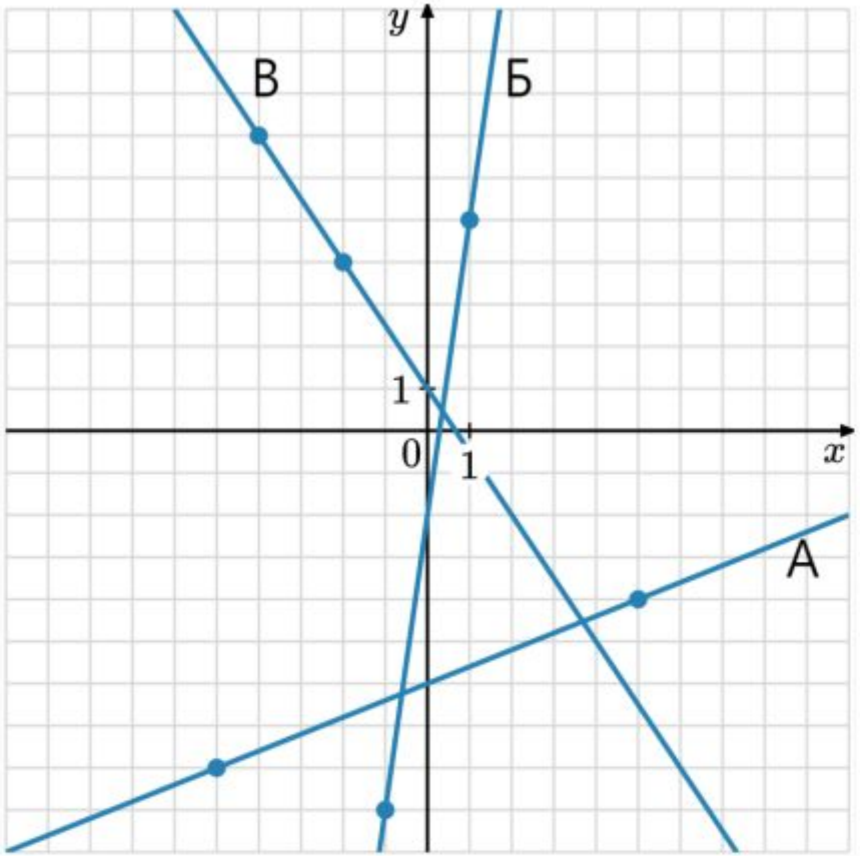


Домашнее

Задача 1. На координатной сетке изображён график линейной функции $f(x)$. За единичный отрезок взята сторона клетки. Известно, что точка B имеет координаты $(17; 9)$. Найдите координаты остальных отмеченных точек.



Задача 2. Найдите угловые коэффициенты графиков, изображённых на рисунке.



Задача 3. Как изменится значение функции $f(x) = 12 - 6x$, если увеличить аргумент на 2?

Задача 4. Пользуясь основным свойством линейной функции, заполните таблицу значений некоторой линейной функции $f(x)$.

x	-3	0	3	6	9
$f(x)$		4	-20		

Задача 5. График линейной функции $f(x)$ пересекает оси координат в точках $(-3; 0)$ и $(0; 9)$. Напишите формулу, которая задаёт данную функцию.

Задача 6. Известно, что $f(x)$ — линейная функция и $f(7) - f(2) = 16$. Чему равно $f(4) - f(3)$?