

**Математические понятия  
и методика их изучения  
в школьном курсе математики**

# План

## 1. Математические понятия (сведения из логики)

- a) Сущность математических понятий;
- б) Логические характеристики понятий: содержание. Объем;
- с) Пути конструирования понятий;
- д) Классификация понятий

## 2. Определения математических понятий

- a) Способы определения, структура определения;
- б) Виды определений
- с) Требования к корректности определений

## 3. Методики изучения понятий и схемы их применения

- a) Методы формирования понятий;
- б) Организация усвоения понятий (этапы формирования);
- с) Основные приемы действий с понятиями;
- д) Система упражнений, направленная на формирование понятия.

# Сущность математических понятий

**Понятие** – форма мышления, отражающая общие и существенные свойства и отношения вещей и явлений материального мира.

**Математическое понятие** – отражение в мышлении отличительных свойств форм и количественных отношений действительного мира.

В познании понятия выражаются с помощью признаков посредством речи и символов

# Признаки понятия

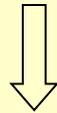
**Признак** – все то, с помощью чего объекты можно распознать, описать, в чем объекты могут быть сходными или различными



**Существенные признаки** - каждый из которых необходим, все вместе они достаточны, чтобы отделить данное понятие от других

# Образование понятия

Выделение с помощью анализа признаков объекта



Соединение с помощью синтеза существенных признаков объекта



Отбрасывание с помощью абстрагирования несущественных признаков



Образование с помощью обобщения единого целого, являющегося понятием

# Логические характеристики понятия

**Содержание понятия** - совокупность всех существенных признаков объектов, охватываемых данным понятием.

**Объем понятия** – совокупность всех объектов, на которое распространяется это понятие, к которым оно может быть применено.

Содержание и объем понятия жестко связаны между собой: изменение содержания влечет изменение объема и наоборот

# Закон обратного отношения

- Чем уже объем понятия, тем шире его содержание;
- Чем шире объем понятия, тем уже его содержание.

# Родо - видовое отношение между ПОНЯТИЯМИ

Если объем одного понятия входит в объем другого понятия, то

- понятие с меньшим объемом называется **«ВИДОВЫМ»**,
- понятие с большим объемом называется **«РОДОВЫМ»**.

Если в понятие входит только один элемент, оно называется **«ЕДИНИЧНЫМ»**

# Виды понятий (по соотношению объемов)

- **Сравнимыми** называются понятия, если можно указать общий для них универсум (множество объектов, в терминах которого определяются понятия);
- **Совместными** называются понятия, объемы которых имеют общие элементы
- **Равнозначными** называются понятия, объемы которых полностью совпадают.
- **Пересекающимися** называются понятия, объемы которых частично совпадают.
- **Находящимися в отношении включения** называются понятия, если объем одного входит в объем другого.

# Характеристики признаков понятия

Пусть понятие  $A$  включает класс объектов  $X$

- Признак  $a$  называется **необходимым** или основным признаком понятия  $A$ , если признаком  $a$  обладает любой объект из  $X$ .
- Признак  $a$  называется **отделимым** признаком понятия  $A$ , если признаком  $a$  обладают только некоторые объекты из  $X$ .
- Признак  $a$  называется **противоречивым** признаком понятия  $A$ , если признаком  $a$  не обладает ни один объект из  $X$ .

# Конструирование новых понятий

Осуществляется с помощью трех логических операций:

- Обобщения,
- Ограничения,
- классификации

# Обобщение понятий

**Обобщение понятия** – логическая операция конструирования нового понятия с большим объемом, чем данное (т.е. переход от видового к родовому понятию).

**Обобщение понятий** происходит путем отбрасывания из содержания понятия основных признаков понятия до тех пор, пока не получится предельно широкое понятие, называемое категорией (время, пространство, форма, количество, отношение), или к неопределяемому понятию, описываемому через категории.

# Ограничение понятий

**Ограничением понятий** - логическая операция конструирования нового понятия с меньшим объемом, чем данное (т.е. переход от родового к видовому понятию).

**Ограничение понятия** происходит добавлением к содержанию понятия отделяемого признака до тех пор, пока не получим единичное понятие, не имеющее отделяемого признака.

# Классификация понятий

## Классификация понятий-

последовательное многоступенчатое разделение множества объектов на классы с помощью некоторого свойства (или свойств)

Классификации считается правильной, если:

- Признак, по которому проводится классификация остается неизменным в процессе классификации;
- Понятия, получаемые в классификации, - взаимонезависимые;
- Сумма объемов понятий, получаемых при классификации, равна объему исходного понятия;
- В процессе классификации осуществляется переход к ближайшему в родовом понятии

# Виды классификаций

- **Дихотомическая** (трихотомическая), где осуществляется многоступенчатое разбиение на два (три) противоречащих понятия;
- **Иерархическая**, где каждый член является соподчиненным понятием;
- **Последовательная**, где классификация проводится по нескольким основаниям.

При помощи классификации на основе сходства и различий объектов раскрывается объем понятия.

# Определение понятия

Трактовки термина **«определение понятия»**:

- **Логическая операция**, при помощи которой раскрывается содержание нового понятия через перечисление его существенных признаков;
- **Математическое предложение**, в котором раскрывается содержание понятия через перечисление совокупности условий, необходимых, и достаточных для отделения класса объектов, принадлежащих какому-либо понятию, и вводится термин, обозначающий

# Что значит определить понятие?

- С точки зрения логической операции – это значит свести его к уже известным понятиям и тем самым раскрыть его содержание.
- В результате этой операции и появляется математическое предложение, именуемое как определение понятия.

# Типы определения понятия

- Определения
  - Вербальные
    - Явные
    - Неявные
      - Аксиоматические
      - (косвенные)
      - Описательные
  - Невербальные
    - (остенсивные)

- **Остенсивное определение** – описание объекта с помощью модели через показ, демонстрацию.
- **Вербальное определение** – описание объекта словами
- **Явное определение** – прямое указание на существенные признаки понятия. Определяемое и определяющее понятия выражены четко и однозначно.
- **Неявное определение** - не содержит четкого и однозначного определяющего элемента, содержание определяемого понятия

# Структура определений понятия

- **Конъюнктивная** структура – в определении все признаки связаны союзом «И»;
- **Дизъюнктивная** структура – в определении признаки связаны союзом «ИЛИ»;
- **Импликативная** структура – в определении признаки связаны отношением следования (в терминах «если ..., то...»)

# Виды определений

(в зависимости от определяемого объекта)

**Номинальные** определения – вводятся новые символы, термины, выражения или уточняется смысл ранее введенных объектов.

**Реальные** определения – фиксируются свойства новых определяемых объектов

# Виды определений

(в зависимости от способа выделения видовых отличий)

**Характеристические** определения, в которых указывается ближайший род и перечисляются видовые отличия понятия

**Генетические (конструктивные)** определения, в которых описывается или указывается способ происхождения или образования понятия

**Рекурсивные (индуктивные)** определения, в которых указываются исходные (базисные) объекты некоторого множества и правила, позволяющие получать другие объекты этого же множества

**Условные определения**, в которых вводится

некоторое соглашение, суть договоренности

# Формально-логические требования корректности определений

- Признаков должно быть достаточно, чтобы отделять данное понятие от других;
- Количество признаков должно быть минимальным для отделения данного понятия;
- Признаки должны быть независимыми.

# Логико – математический анализ определения понятия

- Определение способа получения нового понятия;
- Определение типа и вида определения;
- Определение структуры определения;
- Раскрытие математического содержания каждого элемента определения (термин, род, видовые отличия);

• Определение корректности

## Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны

- Конструируется с помощью ограничения: к свойствам прямоугольника добавляется отдельный признак равенства всех сторон;
- Определение явное и реальное: с помощью слов фиксируются свойства квадрата;
- Структура конъюнктивная: признаки соединены союзом «и»;
- Ближайший род – прямоугольник;
- Видовые отличия задаются перечислением: все стороны равны;
- Определение не вполне корректное: избыточное

# Формирование понятия – длительный процесс

## Начальные этапы работы с понятием

- **Профессиональный** – выполнение логико-математического анализа, выбор методов работы, отбор содержания;
- **Подготовительный** – актуализация необходимых знаний учащихся, установление связей с субъектным опытом ребенка, мотивация;
- **Введение понятия и его определения** – организация знакомства и первичное усвоение понятия и его определения учащимися.

# Введение понятия и его определения

- Подходы
  - к введению понятия
    - Конкретно- индуктивный
    - метод
      - Движение мысли
      - от частного к общему
  - Абстрактно – дедуктивный
  - метод
    - Движение мысли
    - от общего к частному

# Схема применения конкретно- индуктивного метода

- Анализируется эмпирический материал, при этом привлекаются такие мыслительные операции как сравнение, классификация, абстрагирование.
- Через обобщение выделяются признаки, характеризующие новое понятие;
- На основе синтеза конструируется формулировка определения, вводится термин, обозначающий понятие;
- Рассматриваются примеры и контрпримеры;
- Понятие и его определение усваивается в процессе его дальнейшего применения

# Схема применения абстрактно-дедуктивного метода

- Формулируется принятое в науке (или учебнике) определение нового понятия;
- Через рассмотрение частных примеров и контрпримеров осуществляется конкретизация определения;
- Понятие и его определение усваиваются в процессе дальнейшего применения.

# Усвоение понятия

- Методы
- организации
- усвоения
  - Раздельный
  - метод
  - Компактный
  - метод
  - Алгоритмический
  - метод

- **Раздельный метод** – сначала происходит запоминание формулировки определения. А затем формируется навык ее применения
- **Компактный метод** – запоминание формулировки происходит одновременно с приобретением навыка по ее применению
- **Алгоритмический метод** – запоминание и формирование навыка происходят в процессе выполнения предписаний алгоритма.

# Этапы организации усвоения понятия (в соответствии с концепцией обогащающей модели обучения М.А. Холодной)

- **Мотивировка** - создание условий для осознания учащимися недостаточности их прошлого математического опыта.
- **Категоризация** – введение знаково-символического обозначения нового понятия, ориентация ребенка на выделение отличительных признаков соответствующего понятия.
- **Обогащение** – накопление и дифференциация опыта оперирования вводимым понятием, расширение возможных ракурсов осмысления его содержания.
- **Перенос** – применение усваиваемого понятия в разных ситуациях, в том числе и в условиях самостоятельного выстраивания отдельных аспектов его содержания.
- **Свертывание** – представление образа понятия в сжатой форме

# Организация обучения учащихся работе с ПОНЯТИЯМИ

( в соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина )

- Формирование мотивации введения нового понятия;
- Представление основного содержания подлежащего усвоению понятия в краткой схематической форме, т.е. создание ООД;
- Организация работы учащихся с понятиями, позволяющей контролировать и ее ход, и ее результат;
- Организация постепенного перехода от пошагового контроля к самоконтролю

# Основные приемы действий с определениями понятий

- **Подведение объекта под понятие** – распознавание объектов, принадлежащих объему данного понятия, установление факта возможности называть объект связанным с понятием термином
- **Выведение следствий из определения понятия** – наделение конкретного объекта, именуемого термином, связанным с понятием, всеми характеристическими свойствами понятия, выделенными в определении

# Система упражнений, направленная на формирование понятий

Задачи и упражнения – основное средство формирования понятий.

**Системообразующий фактор**



**Этапы  
формирования  
понятия**  
(система Г.И. Саранцева)



**Структура понятийной  
познавательной  
деятельности**  
(система М.А. Холодной)

# Система задач Г.И. Саранцева

- На мотивацию (практического характера);
- На построение объектов, удовлетворяющих выделенным свойствам;
- На распознавание объектов, принадлежащих объему понятия;
- На выделение следствий из определения понятия;
- На дополнение условий (для распознавания и выведения следствий) на составление родословной понятия;
- На применение понятий в разных ситуациях;
- На систематизацию понятий.

# Система задач М.А. Холодной

- На формирования способности к словесно-образному переводу разной степени общности;
- На выделение признаков усвояемого понятия;
- На включение изучаемого понятия в систему связей с другими понятиями;
- На развитие мыслительных операций, лежащих в основе образования понятия;
- На подключение предметного опыта учащихся

Благодарю за  
внимание!