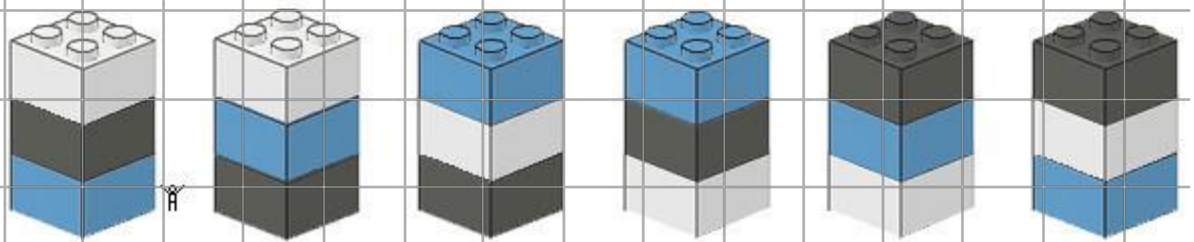
Введение в комбинаторику.



Комбинаторика.

«комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare* – «соединять, сочетать».

Определение. *Комбинаторика* – это раздел математики, посвящённый задачам выбора и расположения предметов из различных множеств.

Что такое комбинаторика?

1. Комбинаторика – это наука о расположении элементов в определенном порядке и о подсчете числа способов такого расположения.

2. Комбинаторика — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них (например, частичного порядка).

3. Комбинаторикой называют область математики, которая изучает вопросы о числе различных комбинаций, которые можно составить из данных элементов.

Как всё начиналось…

- Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

известный немецкий учёный
Готфрид Вильгельм Лейбниц.
(1.07.1646 - 14.11.1716)

- Первоначально комбинаторика возникла в XVI в. в связи с распространением различных азартных игр.

- Основы комбинаторики и теории вероятностей создали и разработали французские математики XVII века Пьер Ферма и Блез Паскаль.

Пьер Ферма (1601-1665)

Блез Паскаль (1623-1662)

После появления математического анализа обнаружилась тесная связь комбинаторных и ряда аналитических задач. Абрахам де Муавр и Джеймс Стирлинг нашли формулы для аппроксимации факториала.

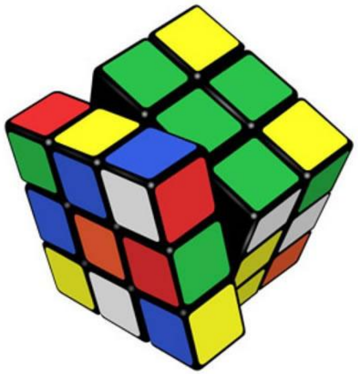
Абрахам де Муавр, английский математик (1667-1754)

Джеймс Стирлинг, шотландский математик (1692-1770)

Комбинаторика и ее применение в реальной жизни.

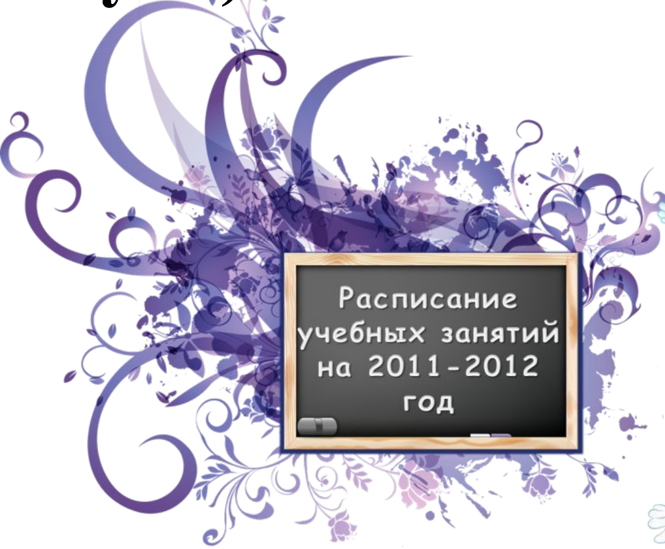
Замечательно, что наука, которая начала с рассмотрения азартных игр, обещает стать наиболее важным объектом человеческого знания. Ведь большей частью жизненные вопросы являются на самом деле задачами из теории вероятностей.

П. Лаплас



Области применения комбинаторики:

- учебные заведения (составление расписаний);
- сфера общественного питания (составление меню);
- лингвистика (рассмотрение вариантов комбинаций букв).



•география (раскраска карт);

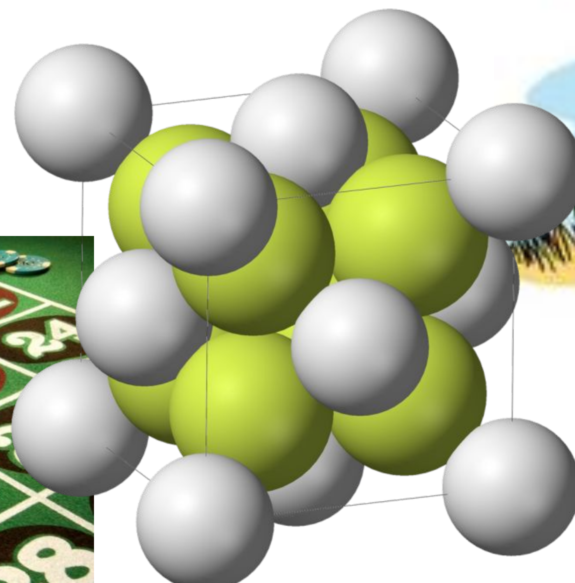
•спортивные соревнования (расчёт количества игр между участниками);

•производство (распределение нескольких видов работ между рабочими);

•агротехника (размещение посевов на нескольких полях);

•азартные игры (подсчёт частоты выигрышей);

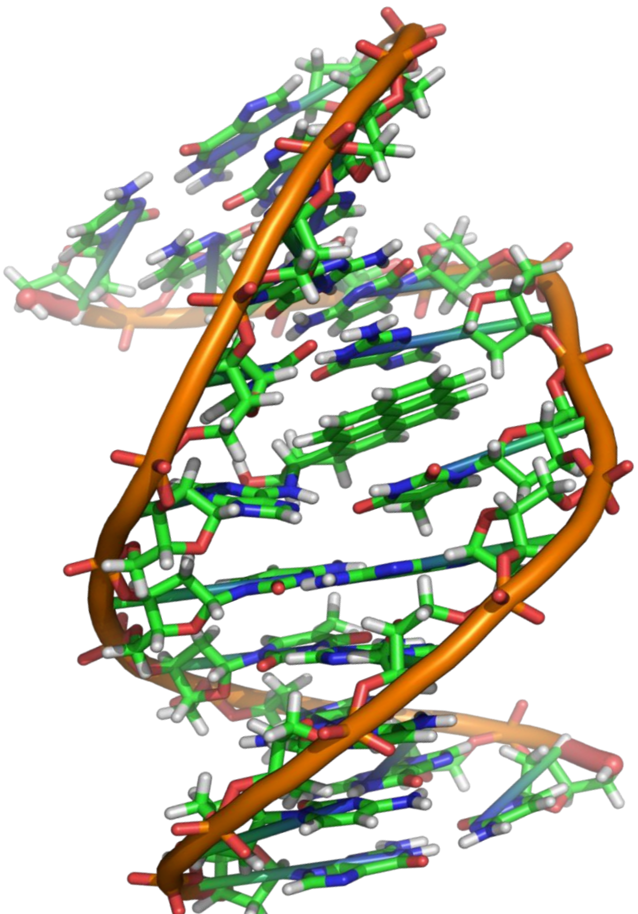
•химия (анализ возможных связей между химическими элементами);

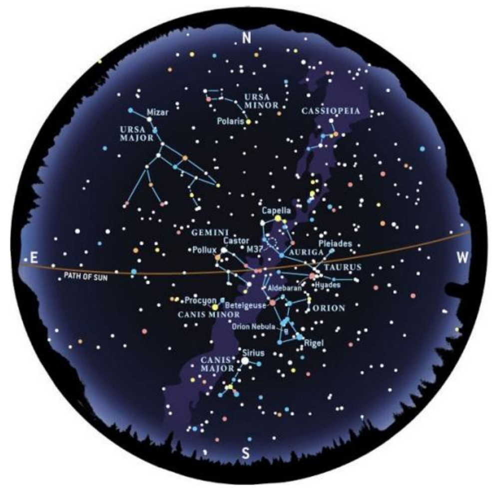


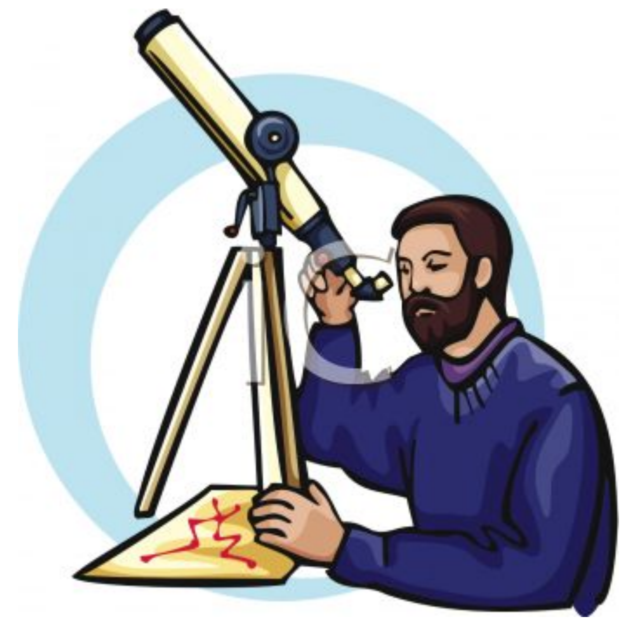
•биология (расшифровка кода ДНК);

•военное дело (расположение подразделений);

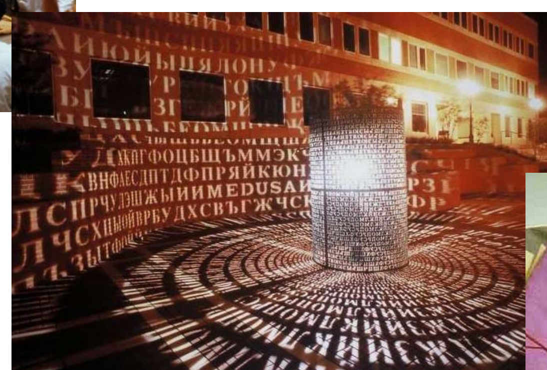
•астрология (анализ расположения планет и созвездий);







- экономика (анализ вариантов купли-продажи акций);
- криптография (разработка методов шифрования);
- доставка почты (рассмотрение вариантов пересылки).



Правило сложения:

Если некоторый объект А можно выбрать m способами, а другой объект В можно выбрать n способами, то выбор «либо А, либо В» можно осуществить m + n способами.

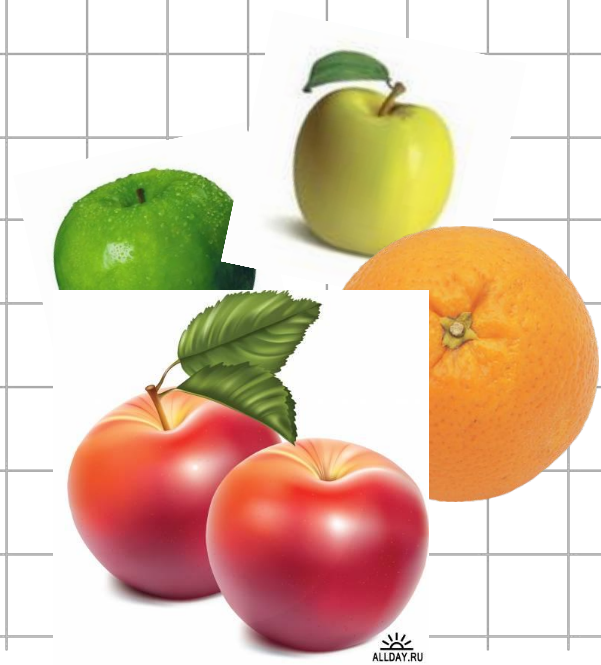
Пример:

На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение:

По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин – четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе «либо яблоко, либо апельсин», то его, согласно правилу сложения, можно осуществить 5+4=9 способами.

Ответ: 9 способов.



Задача:

Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,4,7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

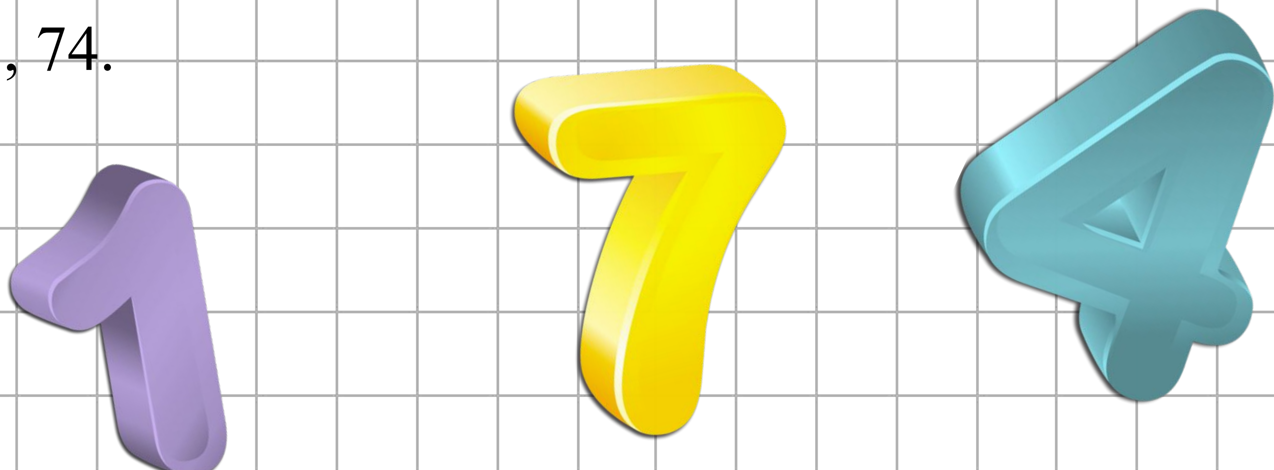
Решение:

1 способ: перебор вариантов.

Для того, чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, будем записывать их в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 1, затем с цифры 4, и, наконец, с цифры 7:

14, 17, 41, 47, 71, 74.

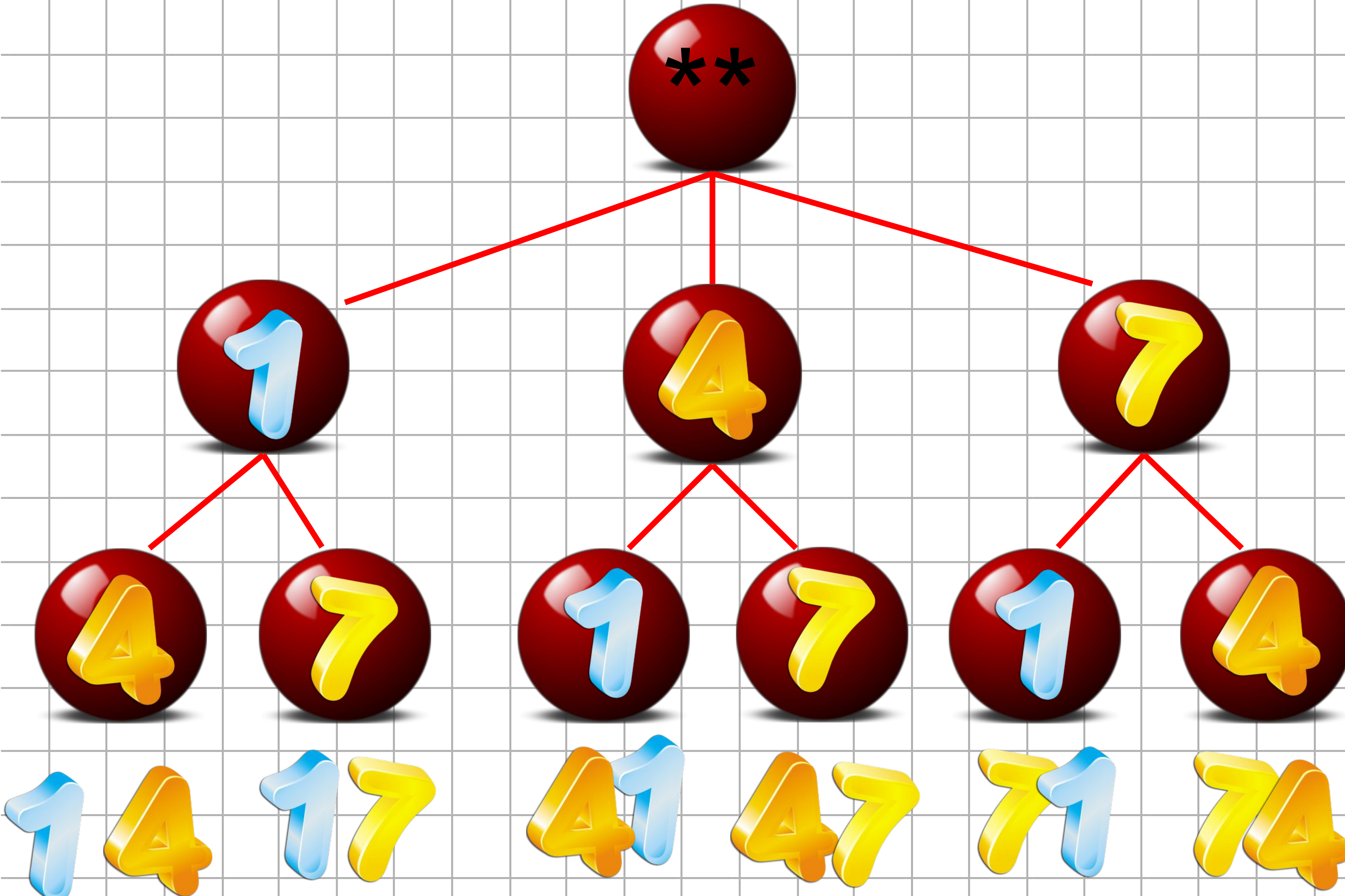
Ответ: 6 чисел.



Задача:

2 способ: дерево возможных вариантов.

Для этой задачи построена специальная схема.
Ставим звездочку. Далее отводим от звездочки 3 отрезка. Так как в условии задачи даны 3 цифры – 1, 4, 7, то на концах отрезков ставим цифры 1, 4, 7.
Далее от каждой цифры проводим по 2 отрезка. На концах этих отрезков записываем также цифры 1, 4, 7. Получились числа: 14, 17, 41 47, 71, 74. То есть всего получилось 6 чисел. Эта схема действительно похожа на дерево, правда «вверх ногами» и без ствола.



Ответ: 6 чисел.

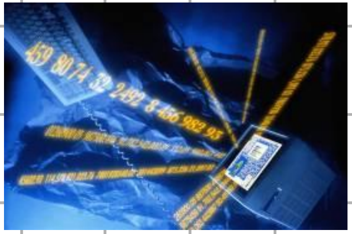
Правило умножения:

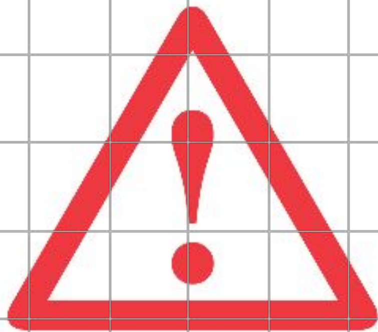
Если объект А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то выбор пары (А, В) в указанном порядке можно осуществить m · n способами.

3 способ решения задачи:

Эту задачу можно решить по-другому и намного быстрее, не строя дерева возможных вариантов. Рассуждать будем так. Первую цифру двузначного числа можно выбрать тремя способами. Так как после выбора первой цифры останутся две, то вторую цифру можно выбрать из оставшихся цифр уже двумя способами. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению 3·2, т.е. 6.

Ответ: 6 чисел.





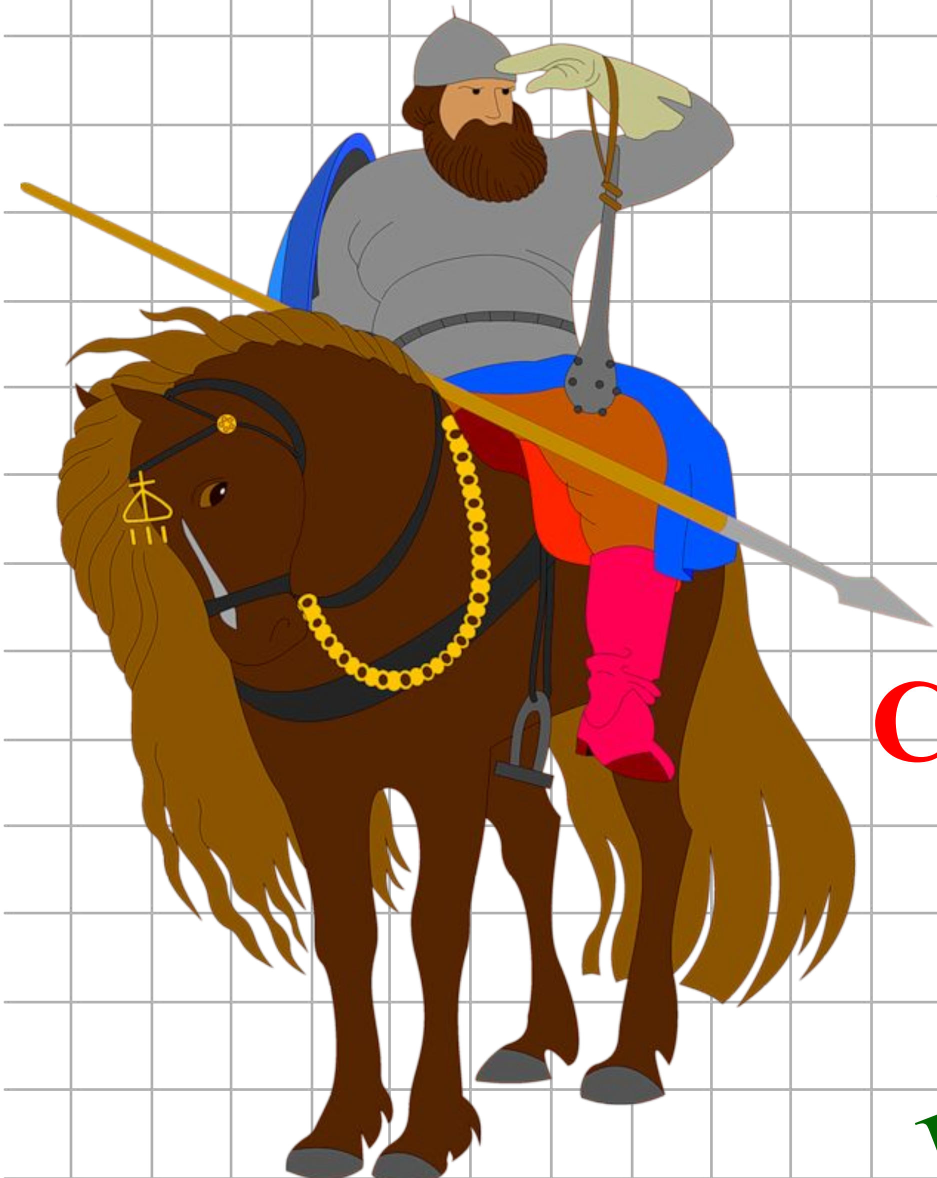
Факториал.

Определение. *Факториалом* натурального числа *n* называется произведение всех натуральных чисел от 1 до *n*. Обозначение *n!*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Таблица факториалов:

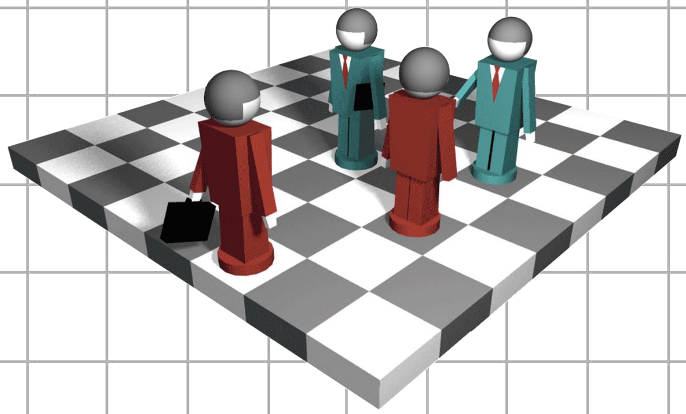
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800



Перестановки

Сочетания

Размещени



Перестановки.

Определение. *Перестановкой* называется конечное множество, в котором установлен порядок элементов.

Число всевозможных перестановок из *n* элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Перестановки с повторениями.

Определение .

Число перестановок n – элементов, в котором элементов *i* –того типа ( ) вычисляется по формуле $i=\overline{1,k}$

$$P_n(n_1,n_2,\dots,n_k)=\frac{(n_1+n_2+\dots+n_k)!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Задача: Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», а в слове «математика»?

Решение: экзамен – 7 букв (без повт.) , $7!=5040$

Математика - 10 букв (с повт. м=2,а=3,т=2,е=и=к=1) ,

$$\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151200$$

Пример 1.

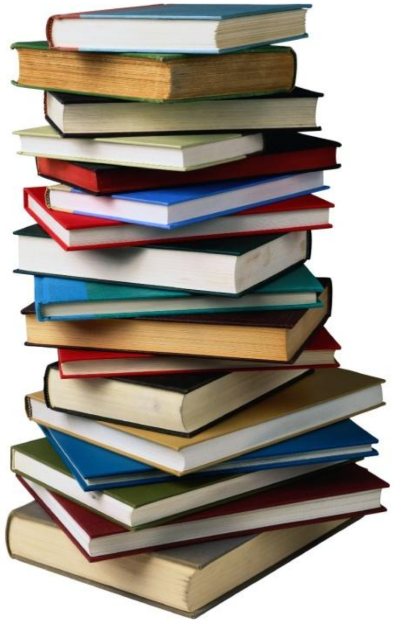
Сколькими способами могут быть расставлены восемь участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение: $P_8 = 8! = 40\ 320$

Пример 2.

Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, причём в каждом числе цифры должны быть разные?

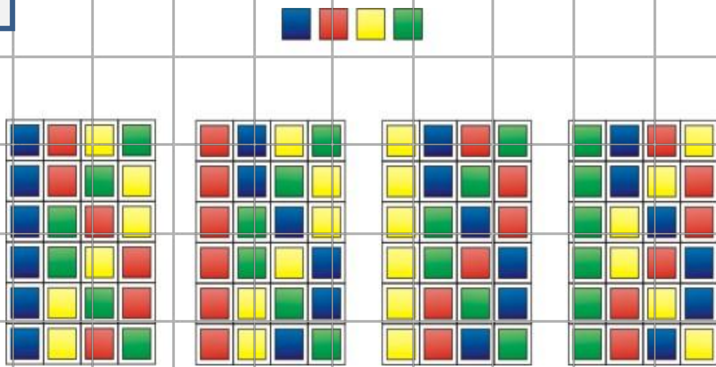
Решение: $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18.$



Пример 3.

Имеется 10 различных книг, среди которых есть трёхтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, если книги трёхтомника должны находиться вместе, но в любом порядке?

Решение: $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 241\ 920$



Размещения.

Определение. Размещением A_n^k из n элементов конечного множества по k, где $k \le n$, называют упорядоченное множество, состоящее из k элементов.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещения с повторениями.

Определение.

k – размещением с повторениями n–элементного множества называется упорядоченный набор длины k элементов данного множества.

Пример.

$A = \{a; b; c\}$ 2- размещения с повторениями:

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b);(a;a);(b;b);(c;c)$$

Число k – размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Задача: Сколько существует номеров машин?

$$\overline{A}_{10}^3 \cdot \overline{A}_{29}^3 = 29^3 \cdot 10^3$$

Пример 1.

Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$A_{12}^{4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 11\,880$$

Пример 2.

Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?

Решение:

$$A_{10}^{7} - A_{9}^{6} = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9! \cdot 9}{3!} = 544\ 320$$

Сочетания.

Определение. Подмножества, составленные из n элементов данного множества и содержащие k элементов в каждом подмножестве, называют ***сочетаниями*** из n элементов по k. (Сочетания различаются только элементами, порядок их не важен: ab и ba – это одно и тоже сочетание).

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Равенство:

Число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

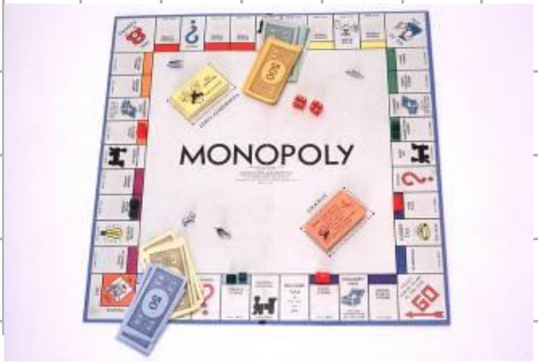
$$\boxed{A_n^m = P_m \cdot C_n^m}$$

Учимся различать виды соединений.

Перестановки из n элементов P_n	Сколькими способами можно с помощью букв A,B,C,D обозначить вершины четырехугольника?	Меняется только порядок расположения выбранных элементов
Сочетания из m элементов по n элементов C_m^n	У лесника три собаки: Астра, Вега и Граф. На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислите все варианты выбора лесником пары собак.	Меняется только состав входящих в комбинацию элементов, порядок их расположения не важен
Размещения из m элементов по n элементов A_n^m	Сколькими способами могут быть распределены I, II и III премии между 15-ю участниками конкурса?	Меняется состав входящих в комбинацию элементов и важен порядок их расположения

Различие между перестановками, размещениями, сочетаниями

- В случае перестановок берутся все элементы и изменяется только их местоположение.
- В случае размещений берётся только часть элементов и важно расположение элементов друг относительно друга.
- В случае сочетаний берётся только часть элементов и не имеет значения расположение элементов друг относительно друга.



Пример 1.

Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из класса, в котором 20 человек?

Решение:

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1\,140$$

Пример 2.

Из вазы с цветами, в которой стоят 10 красных гвоздик и 5 белых, выбирают 2 красные гвоздики и одну белую. Сколькими способами можно сделать такой выбор букета?

Решение:

$$C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{1} = \frac{10! \cdot 5!}{2! \cdot 8! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5}{2} = 225$$

ер 3.

огурцов и три помидора
ь в два пакета так, чтобы
те был хотя бы один помидор и
чтобы овощей в пакетах было поровну.
Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_3^1 \cdot C_7^4 = \frac{3!\cdot 7!}{1!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105$$

$$C_3^2 \cdot C_7^3 = \frac{3!\cdot 7!}{2!\cdot 1!\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105$$

Бином Ньютона.

- **«Би»-удвоение, раздвоение …**
- **«Ном»(фран. nombre) –номер, нумерация.**
- **«Бином» -»два числа»**
- Бином Ньютона – это выражение вида $(a+b)^m$
- Треугольником Паскаля пользуются при возведении бинома $(a+b)$ в натуральные степени.

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^{m-1} a b^{m-1} + C_m^m b^m$$

Свойства бинома и биномиальных коэффициентов.

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

2) Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, то есть равно (n+l).

3) Сумма показателей степеней *a* и *b* каждого члена разложения равна показателю степени бинома,
то есть *n*.

4) Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $C_n^m = C_n^{n-m}$

(правило симметрии).

Свойства бинома и биномиальных коэффициентов.

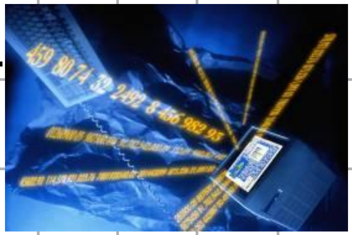
5) Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n.

6) Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах и равна

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$$

7) Правило Паскаля:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$



Свойства бинома и биномиальных коэффициентов.

8)Любой биномиальный коэффициент, начиная со второго, равен произведению предшествующего биномиального коэффициента и дроби $\frac{n-(m-1)}{m}$.

$$C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m}$$

Пример .

Доказать, что при любом натуральном n число $\left(4^n+15n-1\right)$ делится на 9.

Доказательство:

Начнем рассматривать бином в общем виде:

$$(x+1)^n = x^n + n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^2 + n\cdot x + 1 =$$

$$= x^2\cdot\underbrace{\left(x^{n-2} + n\cdot x^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-4} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^0\right)}_{\text{обозначим выражение в скобках за } A} + n\cdot x + 1 =$$

$$= A\cdot x^2 + n\cdot x + 1$$

Тогда $4^n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 = A\cdot 3^2 + n\cdot 3 + 1 + 15n - 1 =$

$$= 9A + 18n = 9(A+2n)\ \vdots\ 9$$

Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

…

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

…

Треугольник Паскаля

столбцы / строки	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…	…							

Треугольник Паскаля

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

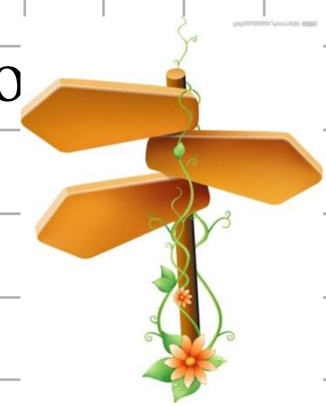
$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

$$\cdots$$

Проверь себя

- Что такое комбинаторика?
- В чём состоит правило суммы?
- В чём состоит правило произведения?
- Что такое размещения?
- Запишите формулу для нахождения числа размещений.
- Что такое перестановки?
- Запишите формулу для нахождения числа перестановок.
- Что такое факториал?
- Что такое сочетания?
- Запишите формулу для нахождения числа со
- В чём различие между перестановками, размещениями, сочетаниями?



О пользе комбинаторики или лишних знаний не бывает

отгадай ребусы

1.

2.

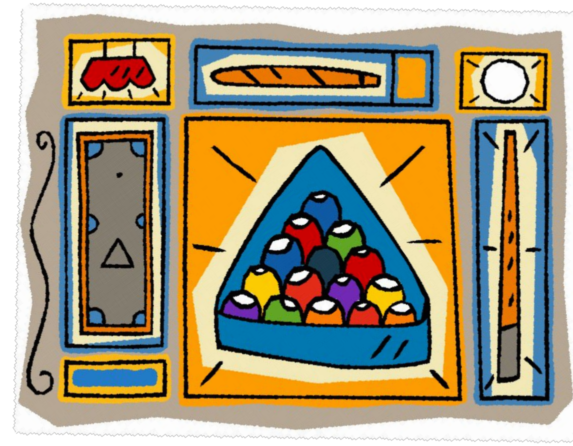
отгадай ребусы

3.

4.

5.

Ответы:



1) Вариант
2) Сочетания
3) Факториал
4) Событие
5) Исход

Спасибо за внимание!