

Лекция № 8. Предел функции

Учебные вопросы:

1. Предел функции в точке и на бесконечности.
2. Основные свойства предела функции.
3. Бесконечно малые функции и их свойства.

В1. Предел функции в точке и на бесконечности

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на множестве X и точку x_0 , быть может, и не принадлежащую множеству X , но обладающей тем свойством, что в любой её окрестности есть точки множества X .

Определение 1. (по Гейне)

Число A называется **пределом функции** $y=f(x)$ в точке x_0 , если для любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к x_0 ($x_n \in X$ и $x_n \neq x_0$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A .

Определение 2. (по Коши)

Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке x_0 , если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ и $x \neq x_0$ и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или

$$f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Геометрическая интерпретация

$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta < x < x_0+\delta,$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon,$$

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

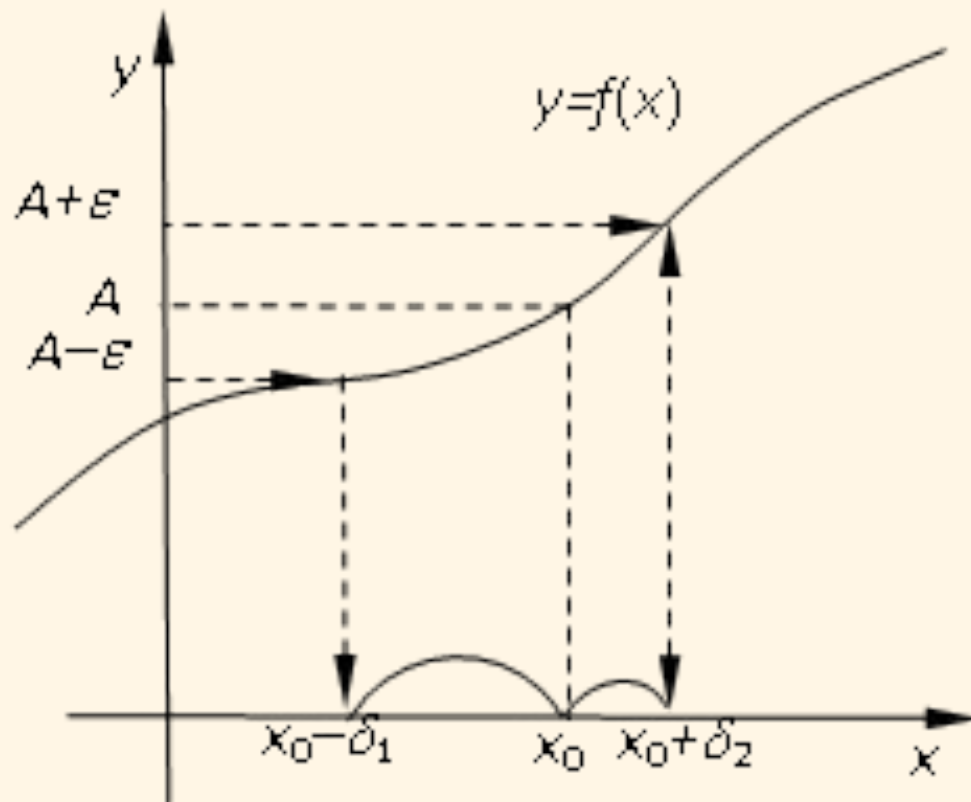


Рисунок 1

Предположим, что $f(x)$ определена при сколь угодно больших значениях x , то есть $X = D(f)$ неограниченна.

Определение 3. (по Гейне). Число A называется **пределом функции $f(x)$ на бесконечности**, то есть при $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$), ~~соответствующая~~ $\{x_n\}$ последовательность $\{f(x_n)\}$ ~~Обозначают:~~

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ или } f(x) \rightarrow A, \text{ при } x \rightarrow \infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ или } f(x) \rightarrow A, \text{ при } x \rightarrow -\infty \right).$$

Определение 4. (по Коши)

Число A называется **пределом** функции $f(x)$ на бесконечности, то есть при $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$),

если $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, что

$$\forall x > M \quad (\forall x < -M)$$

выполняется условие

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрическая интерпретация

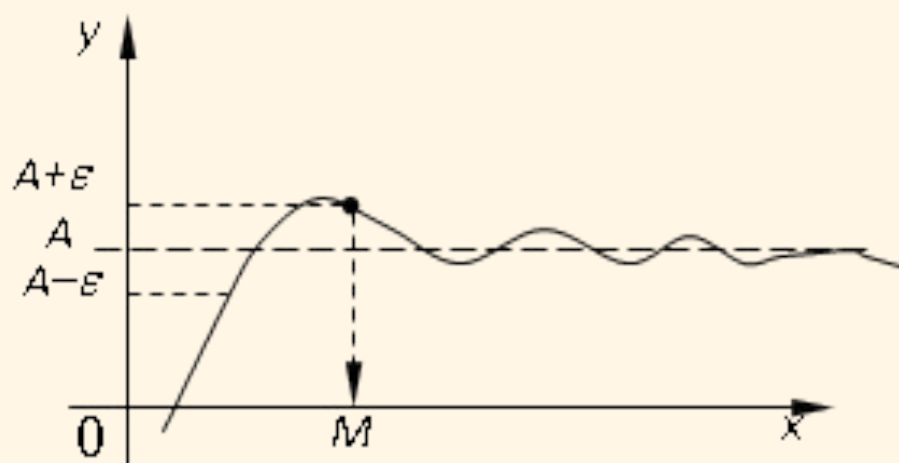


Рисунок 2

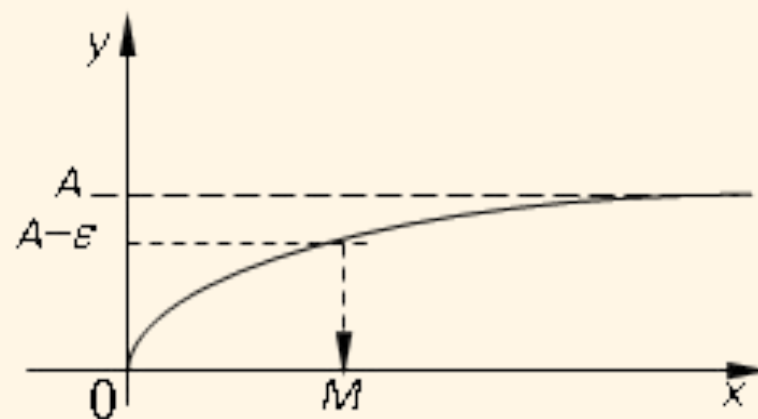


Рисунок 3

Односторонние пределы

Определение 5. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow x_0$ только при $x < x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$

- называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ **слева**,

а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow x_0$ только при $x > x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$

называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ **справа**.

Определение 6.

Число A_1 (A_2) называется *правым* (*левым*) *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in X$ и удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$ и $x > x_0$ ($x < x_0$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначения односторонних пределов

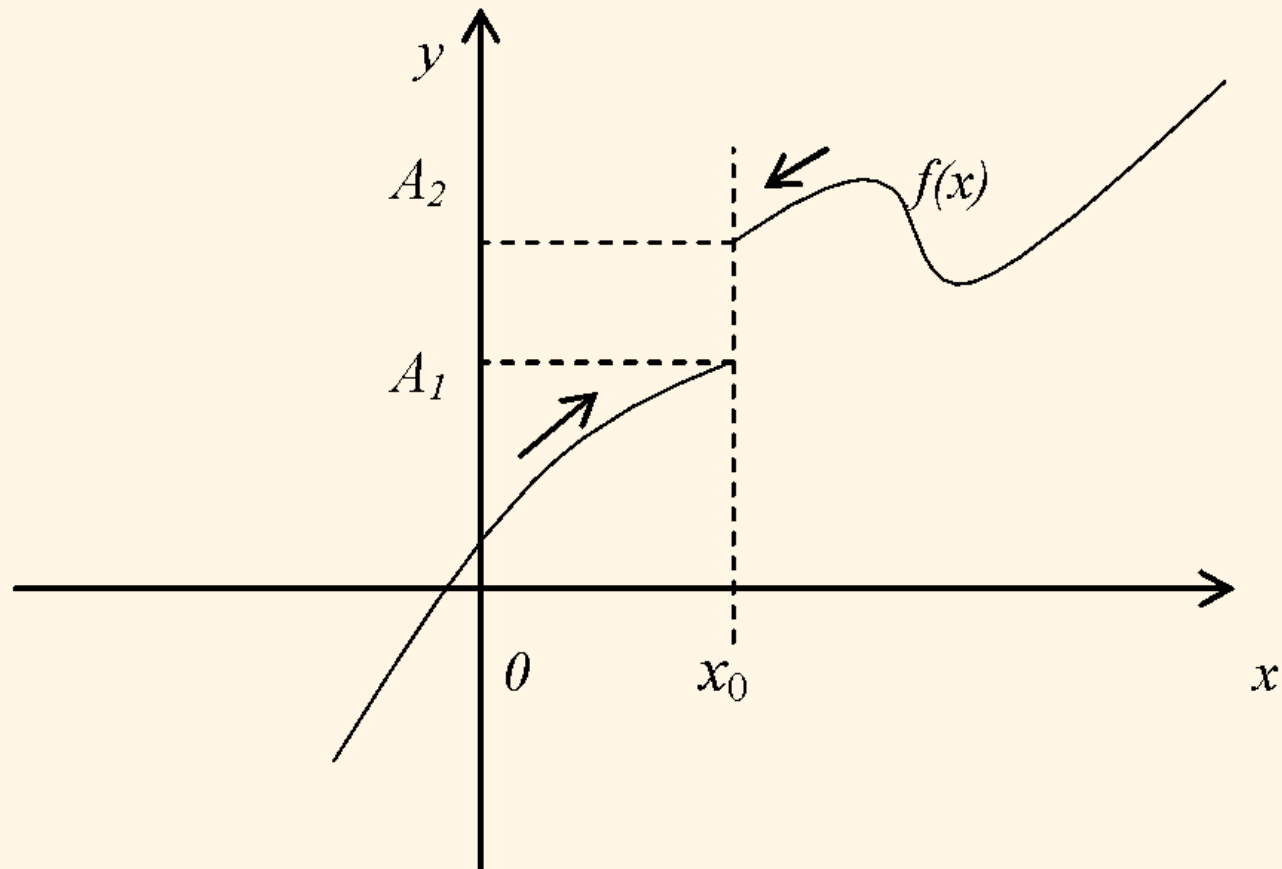
Обозначение предела справа

$$f(x_0+0) \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x),$$

Обозначение предела слева

$$f(x_0-0) \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

Односторонний предел функции



2. Основные свойства предела функции

Свойство 1. (Единственность предела). Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B, \quad A=B.$$

Свойство 2. Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0 .

Свойство 3.

Если $f(x)$ монотонна и ограничена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, то существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

СВОЙСТВО 4.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 конечные пределы A и B , то

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} C = C ;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) ;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Свойство 5.

Если в окрестности точки x_0 , (исключая быть может саму точку x_0), выполняется условие $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A,$$

то функция $\phi(x)$ также имеет предел в точке x_0 и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A.$$

Свойство 6.

Если в окрестности точки x_0 , (исключая быть может саму точку x_0), выполняется условие $f(x) \leq g(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B,$$

то $A \leq B$.

3. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение 7. *Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0 , если*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Обозначают $\alpha(x)$, $\beta(x)$.

Определение 8.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$

– бесконечно малые величины при $x \rightarrow a$,
то функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Определение 9.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \quad A \neq 0, \quad A = \text{const},$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *называются бесконечно малыми одного порядка.*

Определение 10.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и

$\beta(x)$ называются **эквивалентными**
бесконечно малыми.

Записывают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример. Сравнить бесконечно малые
функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

Определение 11.

Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$, если предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)^k}$$

конечен и отличен от нуля.

Свойства бесконечно малых функций

Свойство 1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Свойство 2. Произведение конечного

числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Свойство 3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную в окрестности точки $x = x_0$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow x_0$.

Свойство 4.

Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Свойство 5.

Для того, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

необходимо и достаточно выполнение условия $f(x) - A = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция.

Свойство 6.

Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

Свойство 7.

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = k$$

ИЛИ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин
Вся высшая математика. Том 1. Учебник.
(линейная алгебра и аналитическая
геометрия, введение в математический
анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 –
с.194-206.