Лекция № 8. Предел функции

Учебные вопросы:

1. Предел функции в точке и на бесконечности.
2. Основные свойства предела функции.
3. Бесконечно малые функции и их свойства.

В1. Предел функции в точке и на бесконечности

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на множестве X и точку x_0, быть может, и не принадлежащую множеству X, но обладающей тем свойством, что в любой её окрестности есть точки множества X.

Определение 1. (по Гейне)

Число A называется ***пределом функции*** *$y=f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к x_0* $(x_n \in X$ и $x_n \neq x_0)$, *соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.*

Определение 2. (по Коши)

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ *в точке* x_0, *если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* $\delta > 0$, *что для всех* $x \in X$ *и* $x \neq x_0$ *и удовлетворяющих неравенству* $|x - x_0| < \delta$, *имеет место неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *или*

$$f(x) \to A \text{ при } x \to x_0$$

Геометрическая интерпретация

$|x - x_0| < \delta \leftrightarrow$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$

$|f(x) - A| < \varepsilon \leftrightarrow$

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$

$\delta = min(\delta_1\ , \delta_2).$

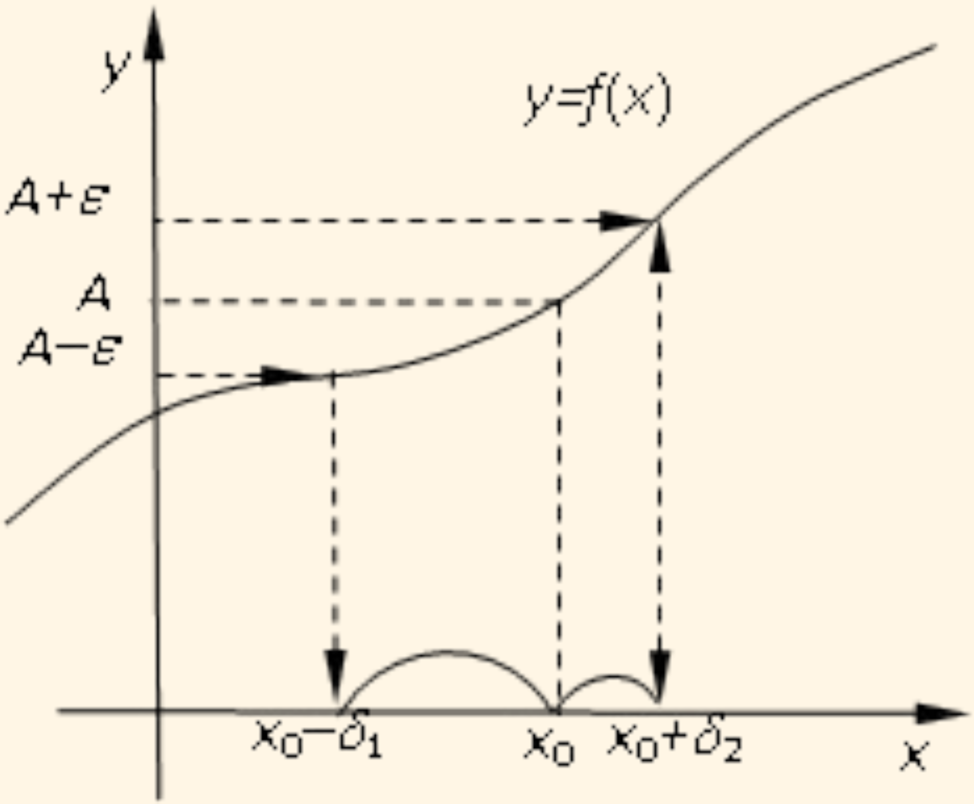


Рисунок 1

Предположим, что $f(x)$ определена при сколь угодно больших значениях x, то есть $X = D(f)$ неограниченна.

Определение 3. (по Гейне). *Число А называется* ***пределом функции*** *f(x) на бесконечности, то есть при* $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$, *если* $\forall x_n \to \infty$ $(x_n \to -\infty)$, *соответствующая последовательность* $\{f(x_n)\} \to A$. *Обозначают:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \;\; \textbf{\textit{или}} \;\; f(x) \to A, \textbf{\textit{ при }} \boldsymbol{x} \to \infty$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \;\; \textbf{\textit{или}} \;\; f(x) \to A, \textbf{\textit{ при }} \boldsymbol{x} \to -\infty \right).$$

Определение 4. (по Коши)

Число A называется ***пределом функции*** *f(x) на бесконечности, то есть при* $x \to \infty \; (x \to -\infty)$, *если* $\forall \varepsilon > 0, \; \exists M > 0$ *такое, что*

$$\forall x > M \;\; (\forall x < -M)$$

выполняется условие

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрическая интерпретация

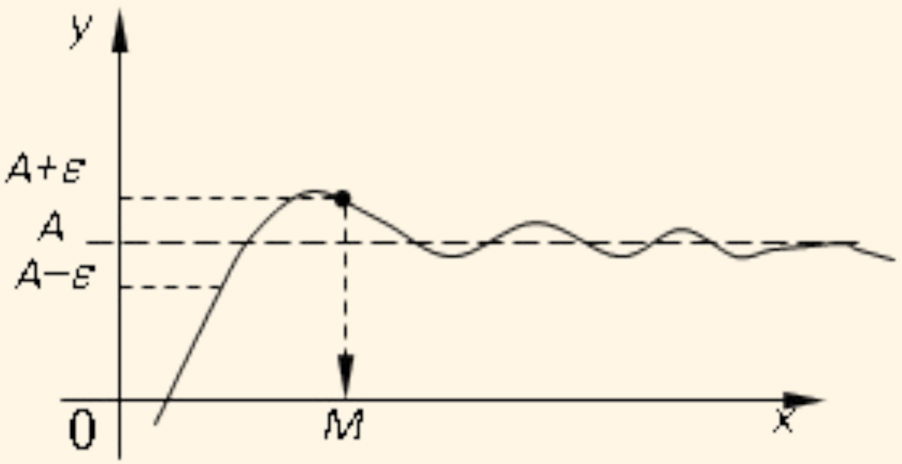


Рисунок 2

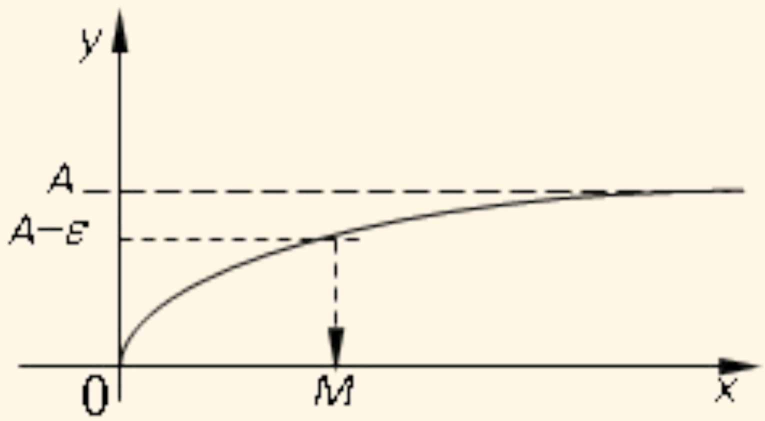


Рисунок 3

Односторонние пределы

Определение 5. *Если $f(x) \to A_1$ при $x \to x_0$ только при $x < x_0$, то* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$

*- называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ **слева**,*

а если $f(x) \to A_2$ при $x \to x_0$ только при $x > x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$

*называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ **справа**.*

Определение 6.

Число A_1 (A_2) *называется правым (левым) пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *если* $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ *такое, что* $\forall\,x\in X$ *и удовлетворяющих условиям* $|x-x_0|<\delta$ *и* $x>x_0$ $(x<x_0)$ *выполняется неравенство* $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначения односторонних пределов

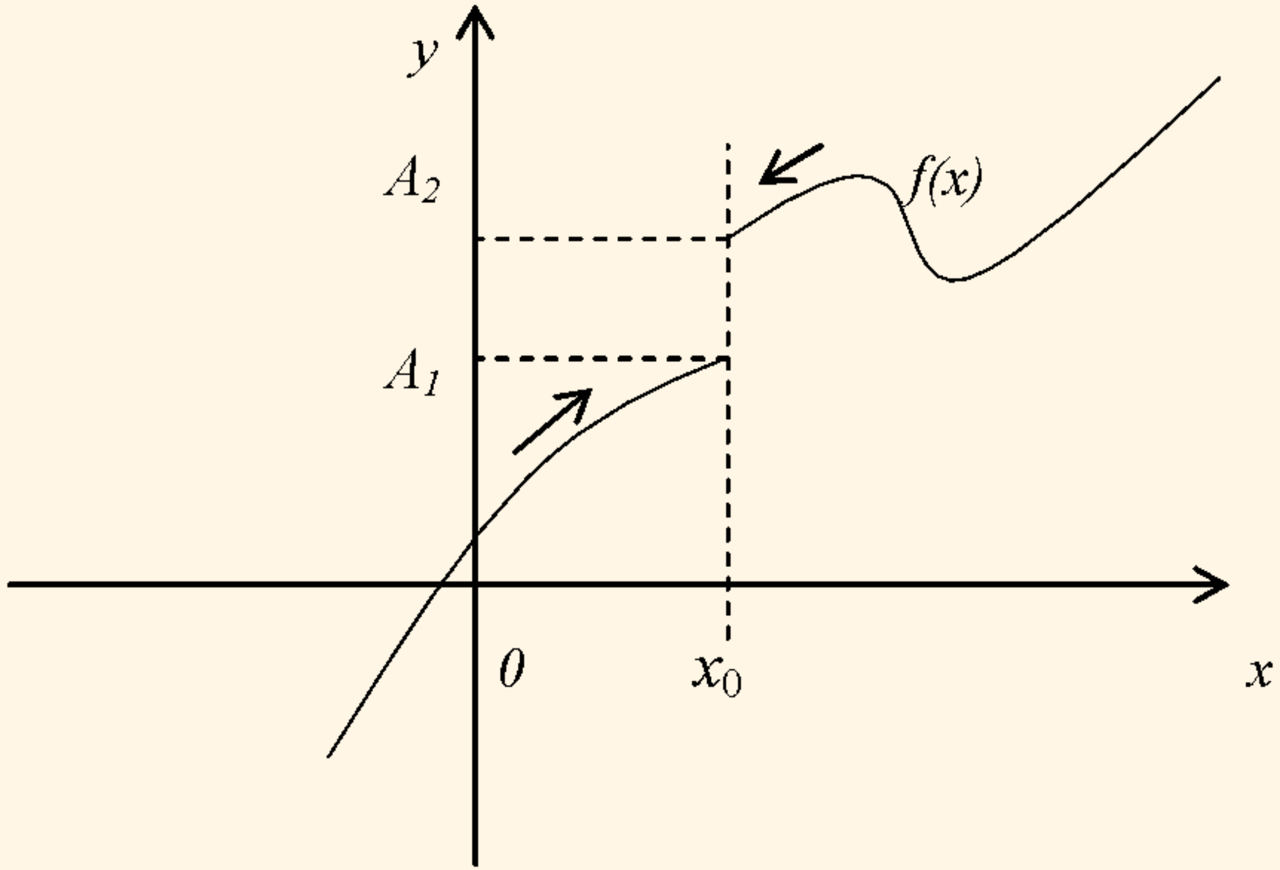
Обозначение предела справа

$f(x_0+0)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,

Обозначение предела слева

$f(x_0-0)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Односторонний предел функции



2. Основные свойства предела функции

Свойство 1. (Единственность предела). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, то $A=B$.

Свойство 2. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0.

Свойство 3.

Если $f(x)$ монотонна и ограничена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, то существует

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Свойство 4.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 конечные пределы A и B, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = A \pm B$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = A \cdot B$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, \quad (B \neq 0)$.

Свойство 5.

Если в окрестности точки x_0, (исключая быть может саму точку x_0), выполняется условие $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$ и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A,$$

то функция $\phi(x)$ также имеет предел в точке x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A.$$

Свойство 6.

Если в окрестности точки x_0, (исключая быть может саму точку x_0), выполняется условие $f(x) \le g(x)$ и

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \ \lim_{x\to\infty} g(x) = B,$$

то $A \le B$.

3. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение 7. *Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Обозначают $\alpha(x)$, $\beta(x)$.

Определение 8.

Если $$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$ *где* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$

– бесконечно малые величины при $x \to a$, *то функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой более высокого порядка****, чем функция* $\beta(x)$.

Определение 9.

Если $$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \quad A \neq 0, \quad A = \mathrm{const},$$

то $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***бесконечно малыми одного порядка***.

Определение 10.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, *то функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***эквивалентными*** *бесконечно малыми.*

Записывают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример. Сравнить бесконечно малые функции $f(x)=x^{10}$ и $f(x)=x$ при $x \to 0$.

Определение 11.

Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой порядка* k *относительно бесконечно малой функции* $\beta(x)$, *если предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)^k}$ *конечен и отличен от нуля.*

Свойства бесконечно малых функций

Свойство 1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ тоже бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Свойство 2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ тоже бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Свойство 3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную в окрестности точки $x = x_0$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.

Свойство 4.

Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Свойство 5.

Для того, чтобы

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

необходимо и достаточно выполнение условия $f(x) - A = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция.

Свойство 6.

Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\boldsymbol{\alpha(x) \sim \gamma(x)}$.

Свойство 7.

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ и

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = k$$

или

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин Вся высшая математика. Том 1. Учебник. (линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 – с.194-206.