Сириус
IT-Колледж

Однородные и неоднородные СЛУ

Однородные и неоднородные СЛУ

Пусть дана однородная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

или в матричной форме $AX = 0$.

Однородная система всегда совместна, так как существует *тривиальное* решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Однородная система неопределенна тогда и только тогда, когда $r(A) < n$.

Однородные и неоднородные СЛУ

Положим $r = r(A)$. Пусть общее решение системы (3.1) записано в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix},$$

где $x_1, \ldots, x_r$ — главные переменные, $t_1, \ldots, t_{n-r}$ — значения свободных переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Выберем $n-r$ решений системы (3.1), полученных из общего решения слѐдующим образом: одно из значений свободных переменных полагается равным 1, а остальные — равными 0:

Однородные и неоднородные СЛУ

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,...,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,...,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,...,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,...,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; ..., X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,...,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,...,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти решения образуют *нормальную фундаментальную систему решений* однородной системы (3.1). Они обладают следующим свойством:

Любое решение X системы (3.1) может быть единственным образом представлено в виде:

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ — некоторые числа.

Сириус
IT-Колледж

Однородные и неоднородные СЛУ

Любой набор из $n-r$ решений системы (3.1), обладающих указанным свойством, называется *фундаментальной системой решений* системы (3.1).

Пусть дана некоторая неоднородная система линейных уравнений

$$AX = B, \tag{3.2}$$

а $AX = 0$ (система (3.1)) — соответствующая ей однородная система. Общее решение системы (3.2) может быть представлено в виде суммы общего решения системы (3.1) и какого-то одного (частного) решения системы (3.2).

Однородные и неоднородные СЛУ

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ x + 3y = 0. \end{cases}$$

Совместна и неопределенна; о. р. $(-3t; t; 5t)$; ч. р. $(0; 0; 0)$.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

Совместна и определенна; о. р. = ч. р. $(2; -1; 3)$.

Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу и формулы Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y \qquad\;\; = 2. \end{cases}$$

$(-2; 2; 1)$.

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - \;\; x_2 + \;\; x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$(t_1; t_2; t_2 - 2t_1)$, $(1; 0; -2)$; $(0; 1; 1)$.

Спасибо за пару!