11 класс.

Угол между векторами.

Скалярное произведение векторов.

МОУ СОШ №256

г.Фокино.

Цели урока:

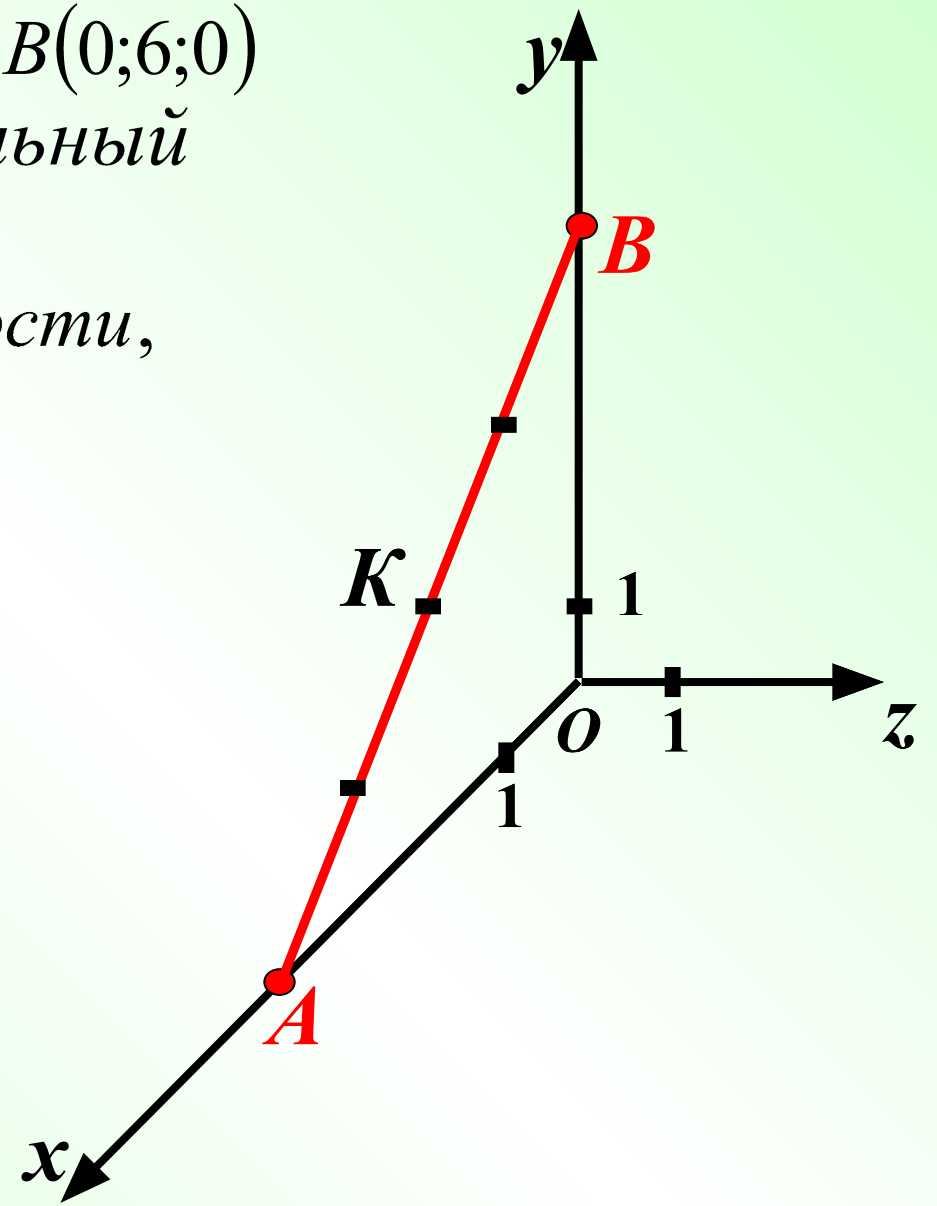
- ***Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.***
- ***Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.***
- ***Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.***

Проверка выполнения д/з: № 439(а)

- ***Дано:*** $O(0;0;0)$ $A(4;0;0)$ $B(0;6;0)$
  ΔAOB *- прямоугольный*
- ***Найти:***

1) $K(x;y;z)$ *- центр окружности,*
описанный около ΔAOB.

2) $AK = R$



Проверка выполнения д/з: № 439(а)

- ***Решение:***

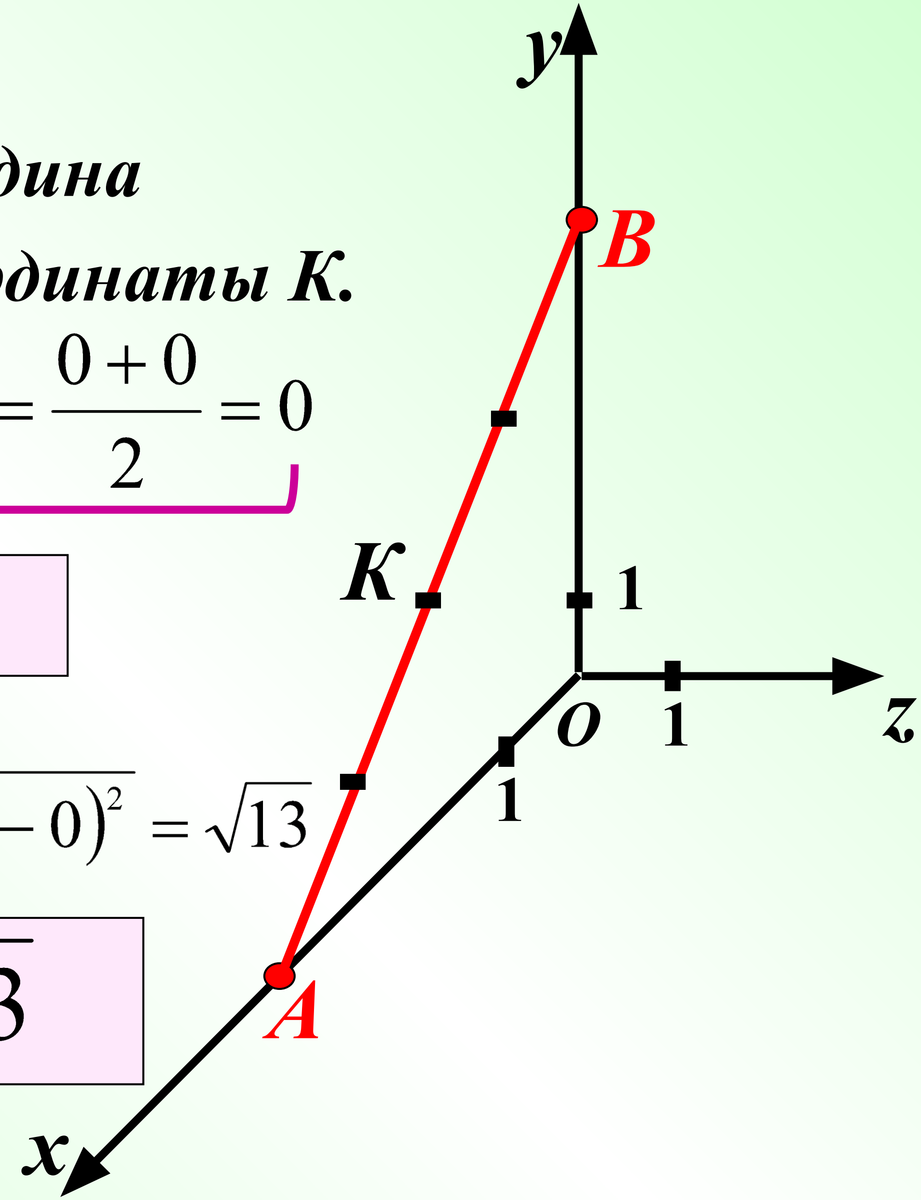
Центр окружности К – середина гипотенузы АВ. Найдем координаты К.

$$x = \frac{4+0}{2} = 2 \qquad y = \frac{0+6}{2} = 3 \qquad z = \frac{0+0}{2} = 0$$

К (2; 3; 0)

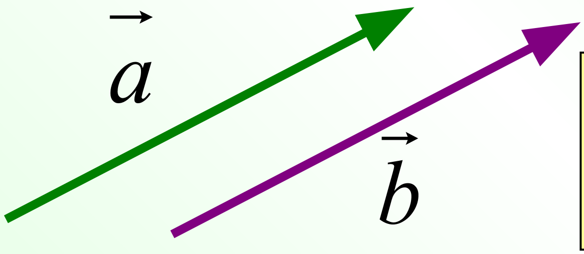
$$R = AK = \sqrt{(4-2)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{13}$$

Ответ: $(2;3;0);\ \sqrt{13}$



Повторение:

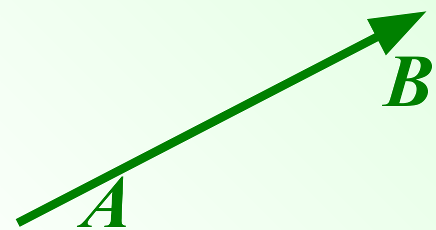
- ***Какие векторы называются равными?***



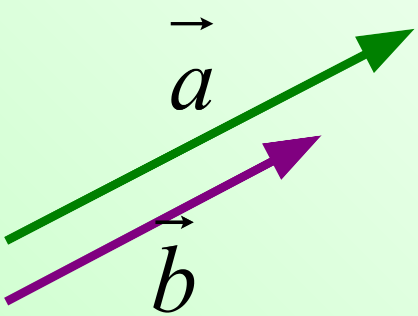
$$\vec{a} = \vec{b},\ \text{если}\quad \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|;\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- ***Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?***

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$



- ***Какие векторы называются коллинеарными?***



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \textbf{\textit{или}} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

Повторение. (Устно)

Векторы в пространстве.

1) Дано: $A(-3;-2;4)$ $B(-4;3;2)$

Найти: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\sqrt{30}$

2) Дано: $A(2;-3;1)$ $B(4;-5;0)$ $C(5;0;-4)$ $D(7;-2;-3)$

Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

Нет, т.к.равные векторы имеют равные координаты.

$\overrightarrow{AB}\{2;-2;-1\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

3) Дано:

$A(1;-3;4)$

$B(5;1;-2)$

$C(2;0;1)$

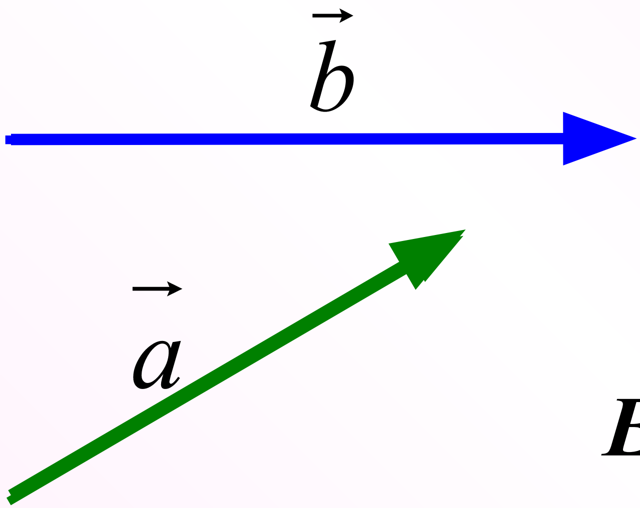
$D(4;-2;2)$

? Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$\overrightarrow{AB}\{8;4;-6\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

Нет

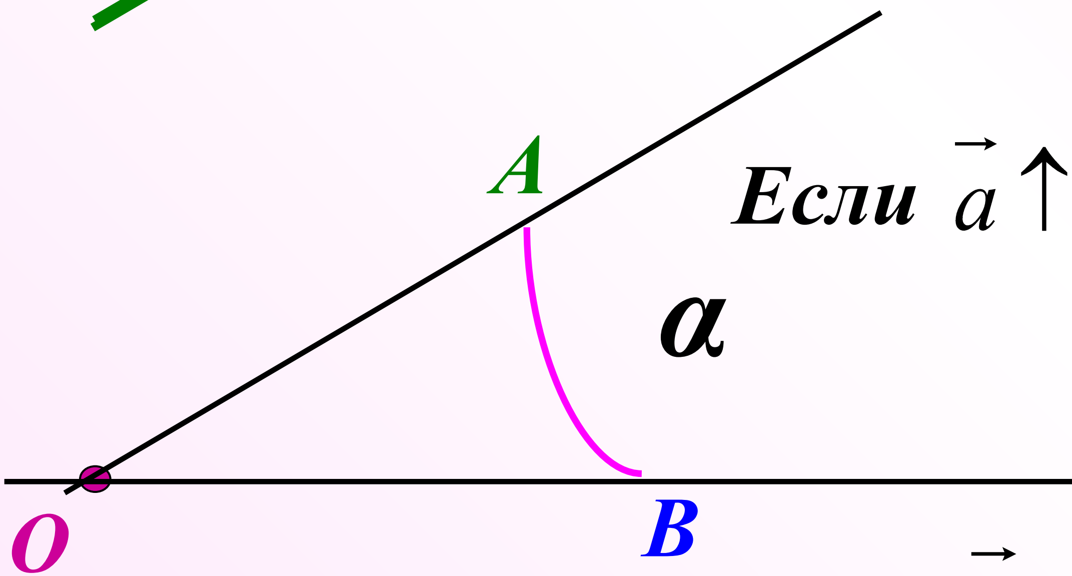
Угол между векторами.



$\overrightarrow{OA}=\vec{a} \quad \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$$\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\alpha$$

Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=0^0$



Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=180^0$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=90^0$

Сопоставьте углы между векторами и их градусной мерой.

45^0

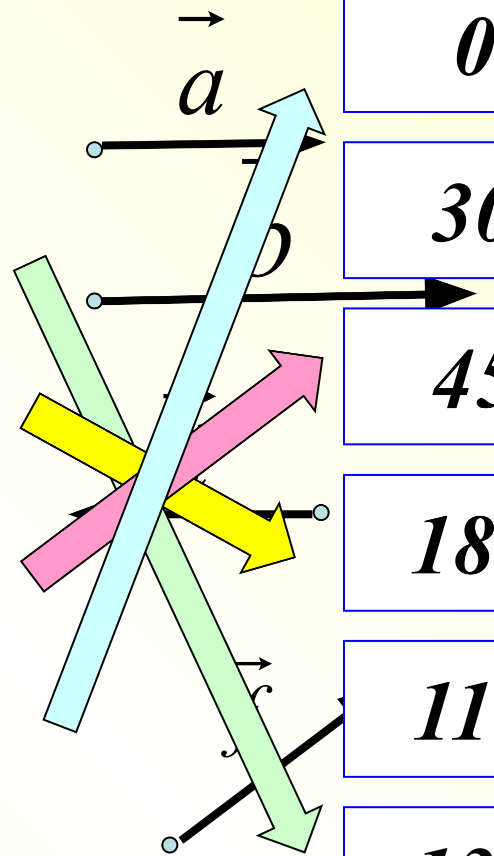
o

$\vec{c}$ и $\vec{f}$

$\vec{d}$ и $\vec{a}$

$\vec{a}$ и $\vec{f}$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$



0^0

30^0

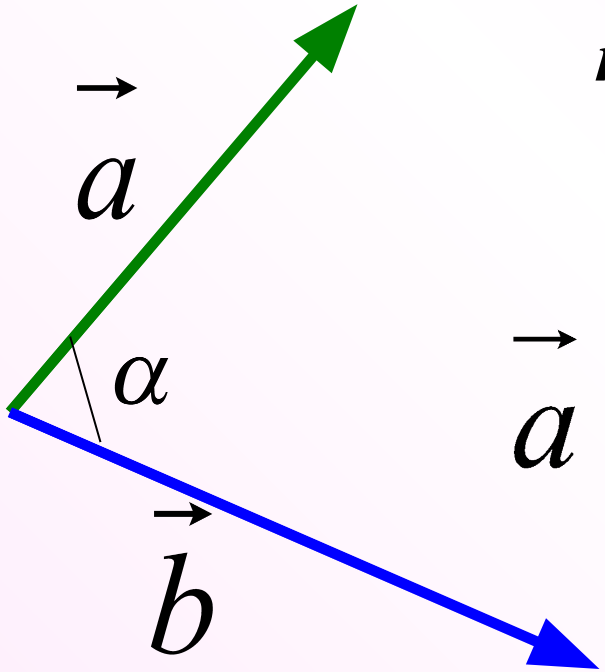
45^0

180^0

115^0

135^0

Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Скаляр – лат. scale – шкала.

Ввел в 1845 г.

У. ГАМИЛЬТОН,

английский

математик.

Вспомним планиметрию…

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$***, то*** $\cos 90^0=0 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ ***, то*** $\cos 180^0=-1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

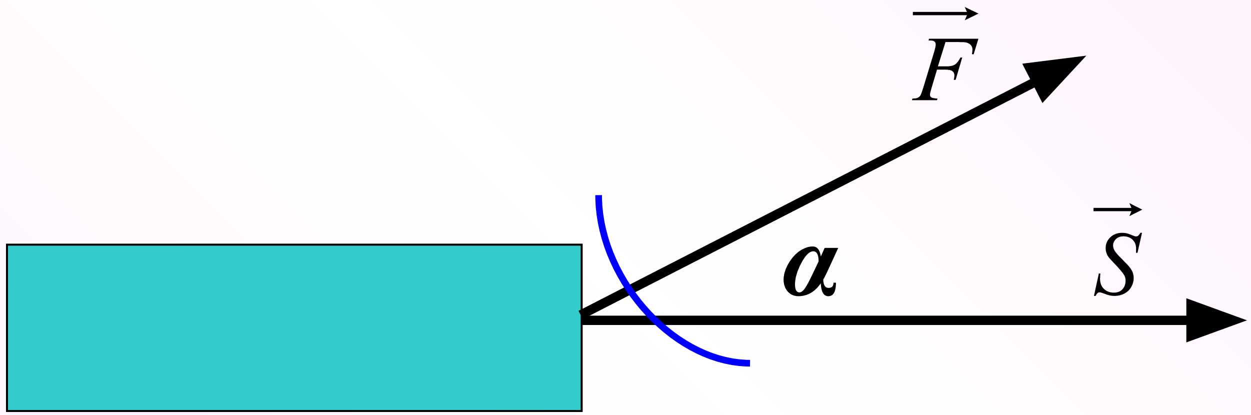
Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ***, то*** $\cos 0^0=1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

Если $\vec{a}=\vec{b}$***, то*** $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^{\,2}}$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ***называется***

скалярным квадратом вектора

Пример применения скалярного произведение векторов в физике.



Если $\left(\widehat{\vec{F}\,\vec{S}}\right) = \alpha,$ **то**

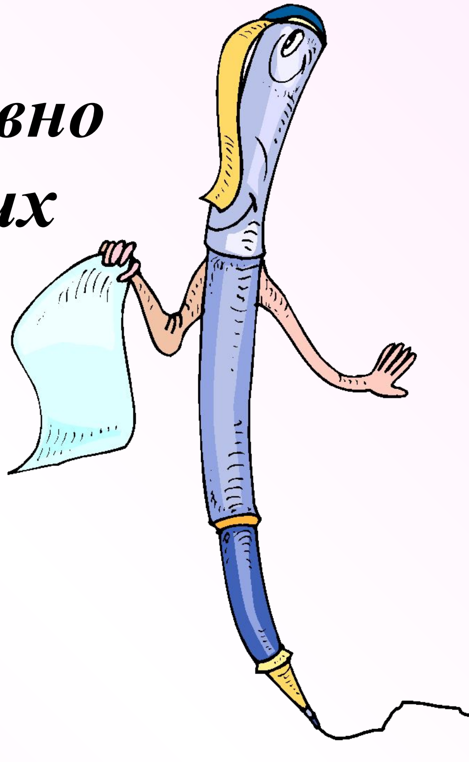
$$A = \underbrace{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha}_{\text{Скалярное произведение векторов.}}$$

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

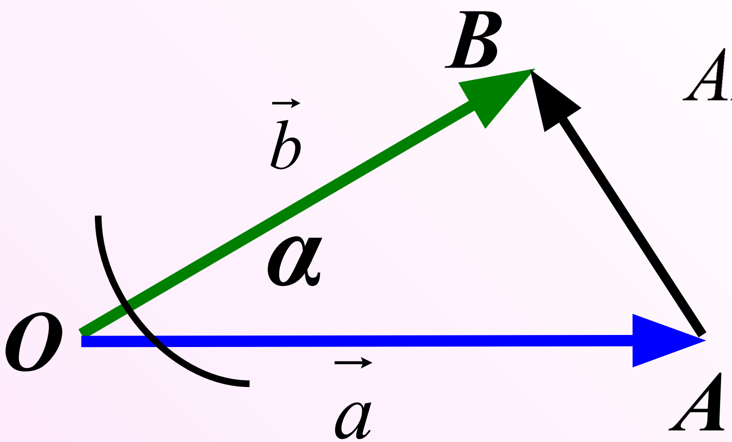
Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.



Докажем формулу скалярного произведения в координатах для случая, когда векторы неколлинеарны.

Желающий выходит к доске. Подсказки - на экране.

Для доказательства потребуется вспомнить теорему косинусов.



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

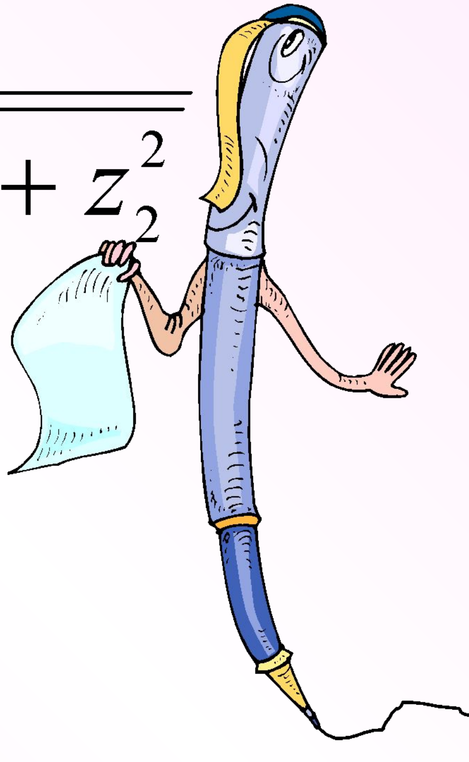
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

Ваше доказательство:

Дома, следуя рекомендациям в учебнике, вывести формулу $\cos\alpha$ для двух ненулевых векторов в пространстве, зная их координаты.

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

«Геометрия 10-11», глава V, § 2, п.47.



№№ 141 (в – з); 443 (д; е)

Решение задач.

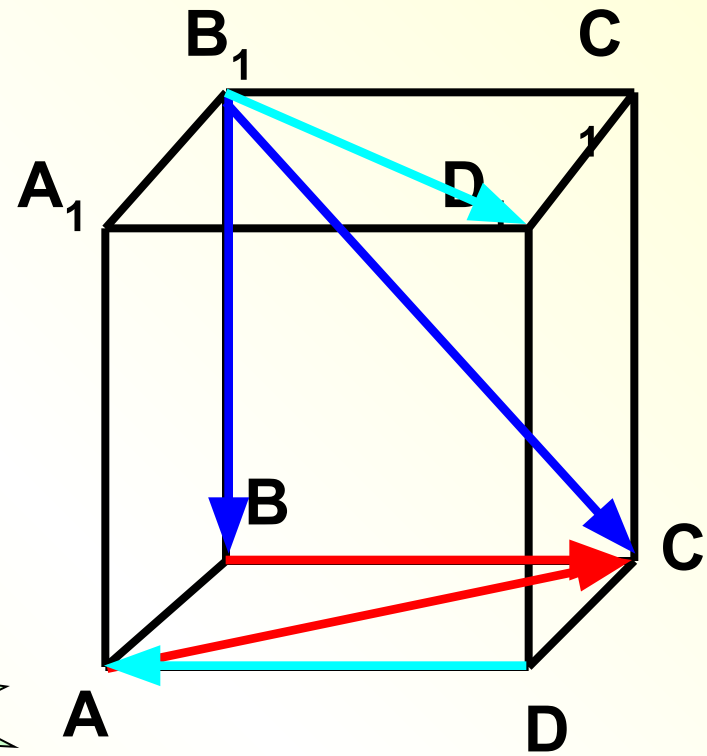
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1B}$ *и* $\overrightarrow{B_1C}$ **45^0**

б) $\overrightarrow{BC}$ *и* $\overrightarrow{AC}$ **45^0**

в) $\overrightarrow{DA}$ *и* $\overrightarrow{B_1D_1}$ **135^0**



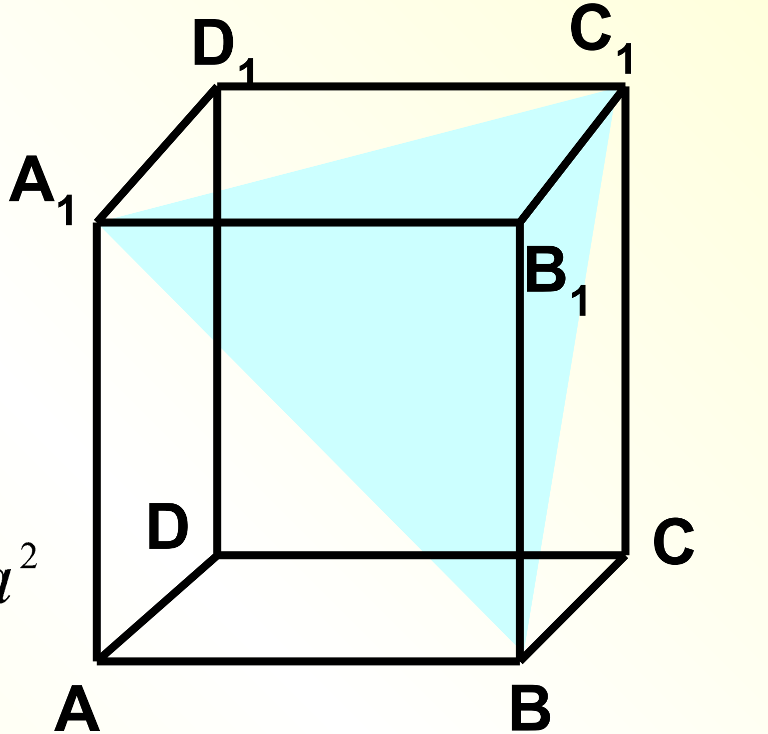
№ 443 (г)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

1 способ:



ΔBA_1C_1 – правильный

$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$

$(\overrightarrow{BA_1} \wedge \overrightarrow{BC_1}) = 60^0$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^0 = a^2$

Ответ: a^2

№ 443 (г)

Дано: *куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;*

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

2 способ:

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

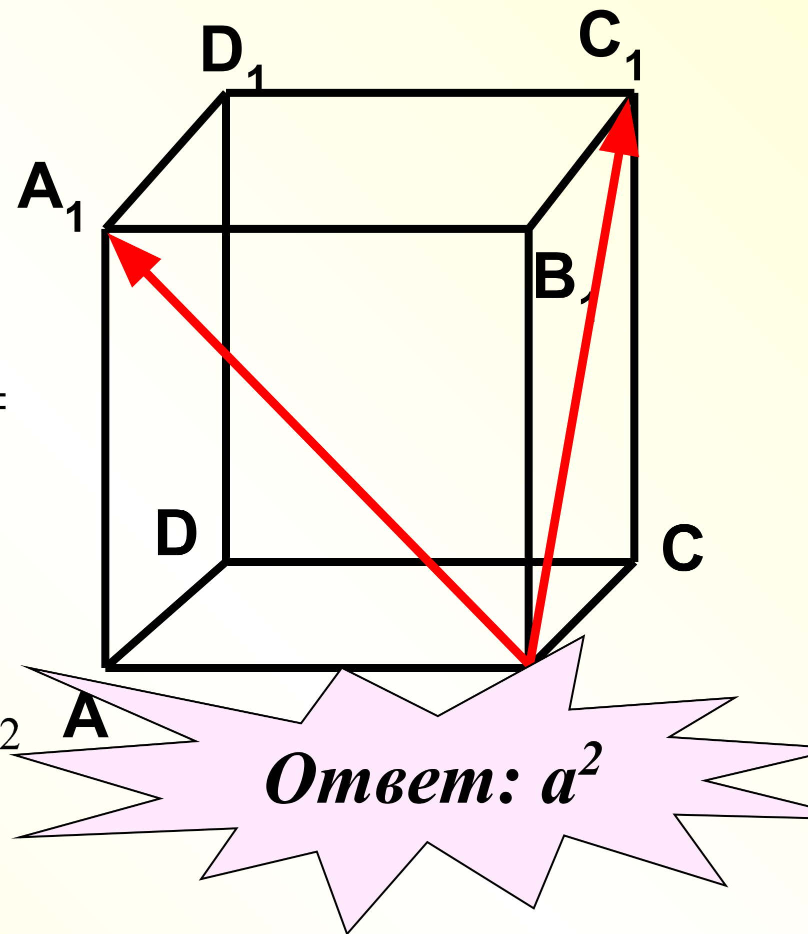
$$\boxed{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} - ?}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}\right) =$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} +$$

$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^0 = a^2$$



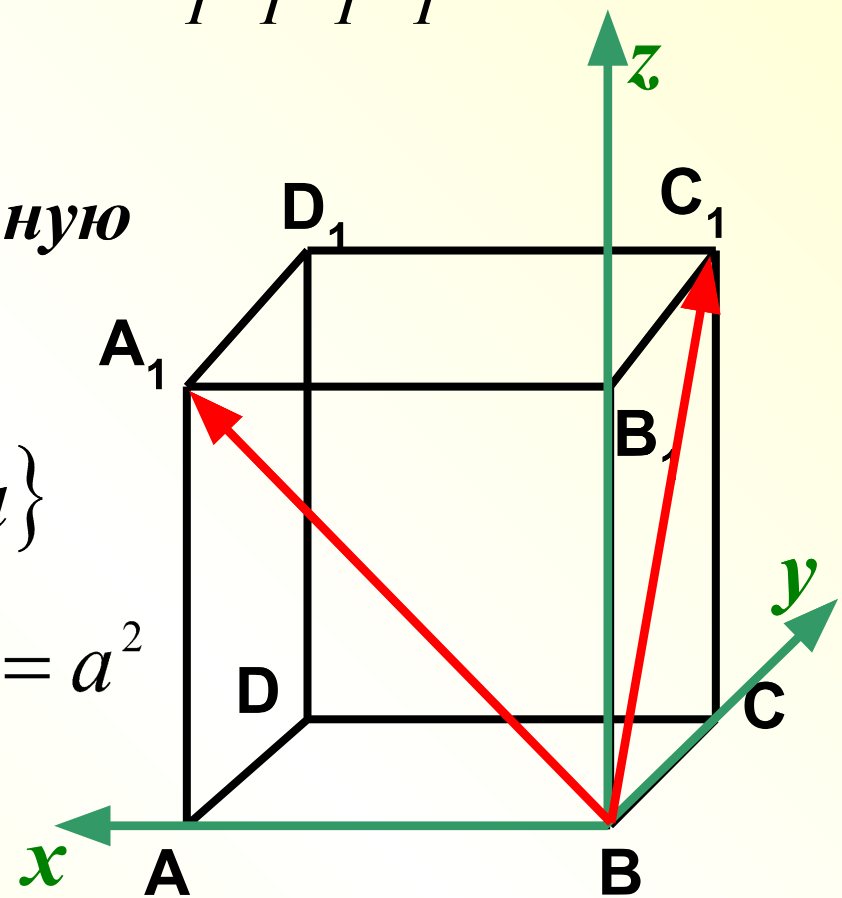
№ 443 (г)

Дано: *куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;*

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

3 способ: ***Введем прямоугольную систему координат.***



$$\overrightarrow{BA_1}\{a;0;a\} \qquad \overrightarrow{BC_1}\{0;a;a\}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$

Ответ: *a^2*

Решаем по группам:

№ 443

1 – а)	2 – б)	3 – в)
a^2	$-2a^2$	0

Дополнительная задача:

Вычислите угол между вектором а и координатным вектором i.

$$\vec{a}\{2;1;2\}$$

Спасибо за урок!