11 класс.

Угол между векторами.

Скалярное произведение векторов.

МОУ СОШ №256

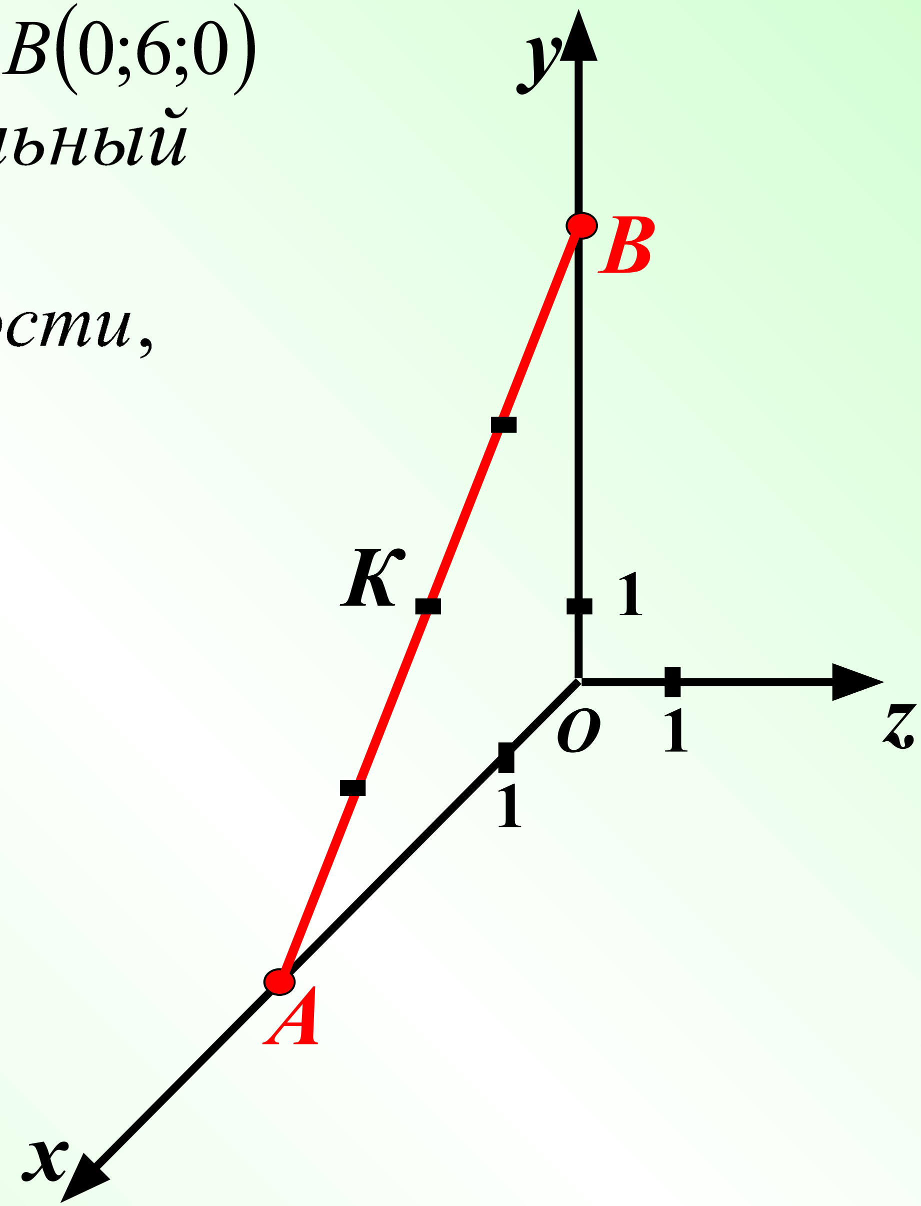
г.Фокино.

Цели урока:

- ***Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.***
- ***Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.***
- ***Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.***

Проверка выполнения д/з: № 439(а)

- ***Дано:*** $O(0;0;0)$ $A(4;0;0)$ $B(0;6;0)$
  ΔAOB - *прямоугольный*
- ***Найти:***
  1) $K(x;y;z)$ - *центр окружности, описанный около* ΔAOB.
  2) $AK = R$



Проверка выполнения д/з: № 439(а)

- ***Решение:***

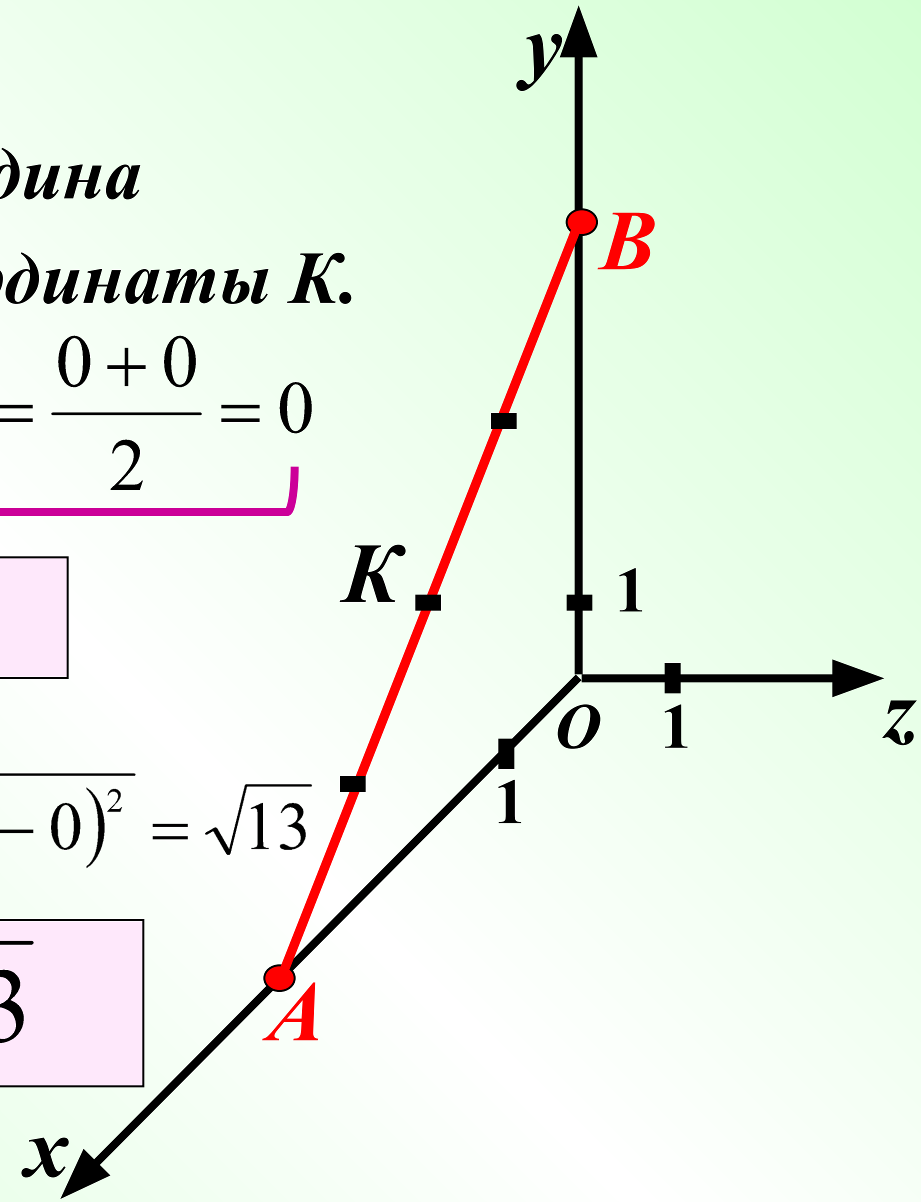
Центр окружности К – середина гипотенузы АВ. Найдем координаты К.

$$x=\frac{4+0}{2}=2 \qquad y=\frac{0+6}{2}=3 \qquad z=\frac{0+0}{2}=0$$

К (2; 3; 0)

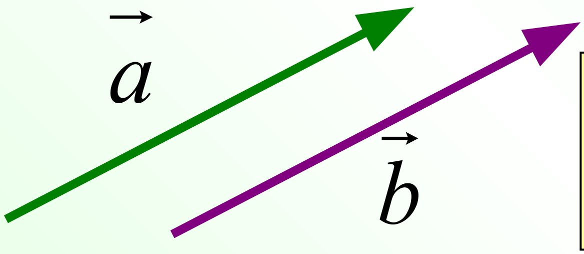
$$R=AK=\sqrt{(4-2)^2+(0-3)^2+(0-0)^2}=\sqrt{13}$$

Ответ: $(2;3;0);\ \sqrt{13}$



Повторение:

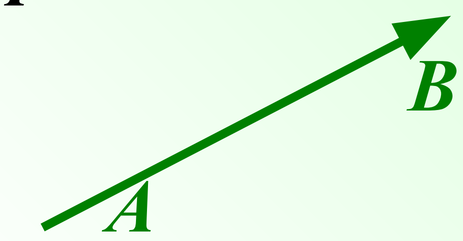
- ***Какие векторы называются равными?***



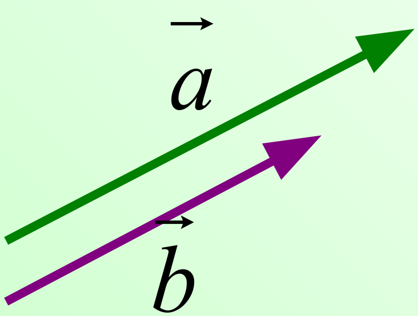
$$\boxed{\vec{a}=\vec{b},\ \text{если}\ \ |\vec{a}|=|\vec{b}|;\ \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}}$$

- ***Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?***

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}$$



- ***Какие векторы называются коллинеарными?***



$$\boxed{\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\quad \textbf{\textit{или}}\quad \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}}$$

$$\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}\qquad \begin{cases} x_1=\lambda\cdot x_2\\ y_1=\lambda\cdot y_2\\ z_1=\lambda\cdot z_2 \end{cases}$$

Повторение. *(Устно)*

Векторы в пространстве.

1) Дано: $A(-3;-2;4)$ $B(-4;3;2)$

Найти: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\sqrt{30}$

2) Дано: $A(2;-3;1)$ $B(4;-5;0)$ $C(5;0;-4)$ $D(7;-2;-3)$

Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ ***и*** $\overrightarrow{CD}$ ***?***

Нет, т.к.равные векторы имеют равные координаты.

$\overrightarrow{AB}\{2;-2;-1\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

3) Дано:

$A(1;-3;4)$

$B(5;1;-2)$

$C(2;0;1)$

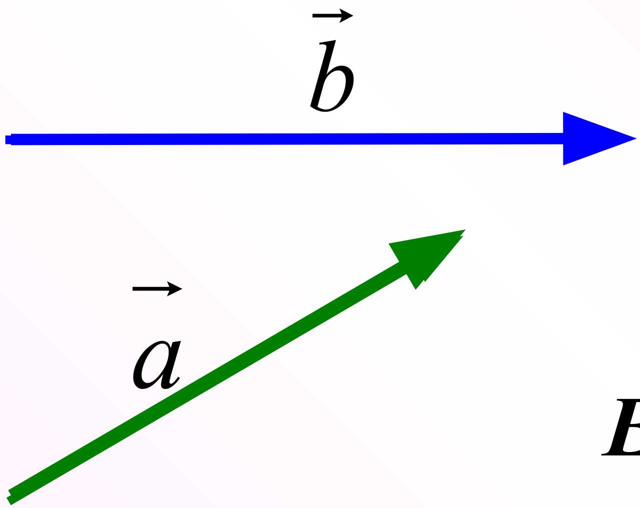
$D(4;-2;2)$

? Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ ***и*** $\overrightarrow{CD}$ ***?***

$\overrightarrow{AB}\{8;4;-6\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

Нет

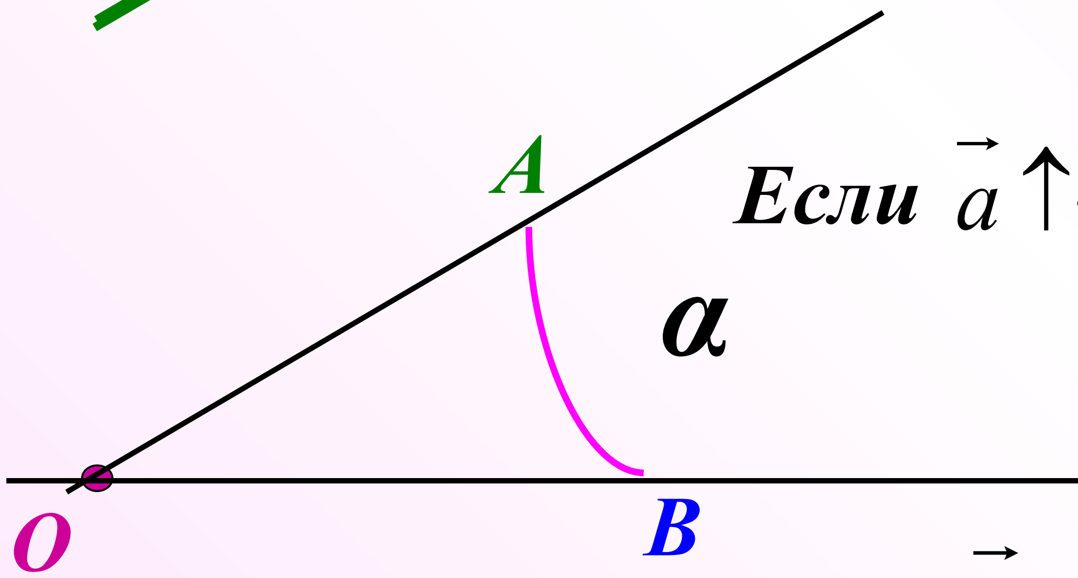
Угол между векторами.



$$\overrightarrow{OA}=\vec{a} \qquad \overrightarrow{OB}=\vec{b}$$

$$\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\alpha$$

Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=0^0$



Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=180^0$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=90^0$

Сопоставьте углы между векторами и их градусной мерой.

45^0

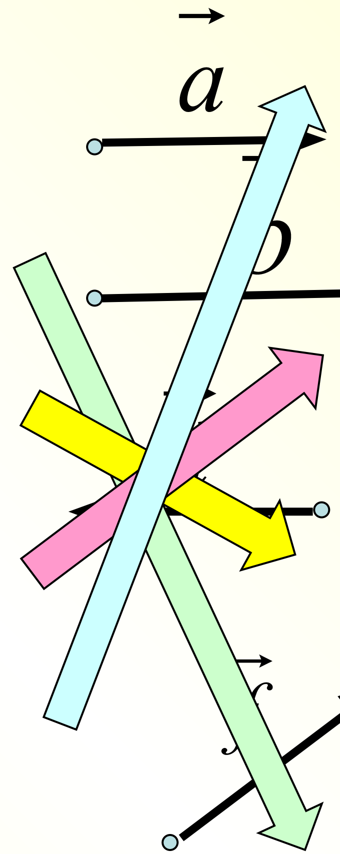
o

$\vec{c}$ и $\vec{f}$

$\vec{d}$ и $\vec{a}$

$\vec{a}$ и $\vec{f}$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$



0^0

30^0

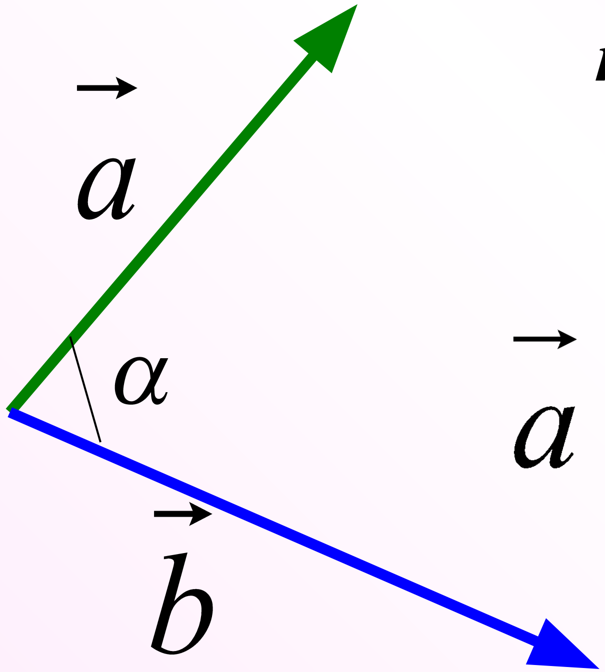
45^0

180^0

115^0

135^0

Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Скаляр – лат. scale – шкала.

Ввел в 1845 г.
У. ГАМИЛЬТОН,
английский
математик.

Вспомним планиметрию…

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$***, то*** $\cos 90^0=0 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ ***, то*** $\cos 180^0=-1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

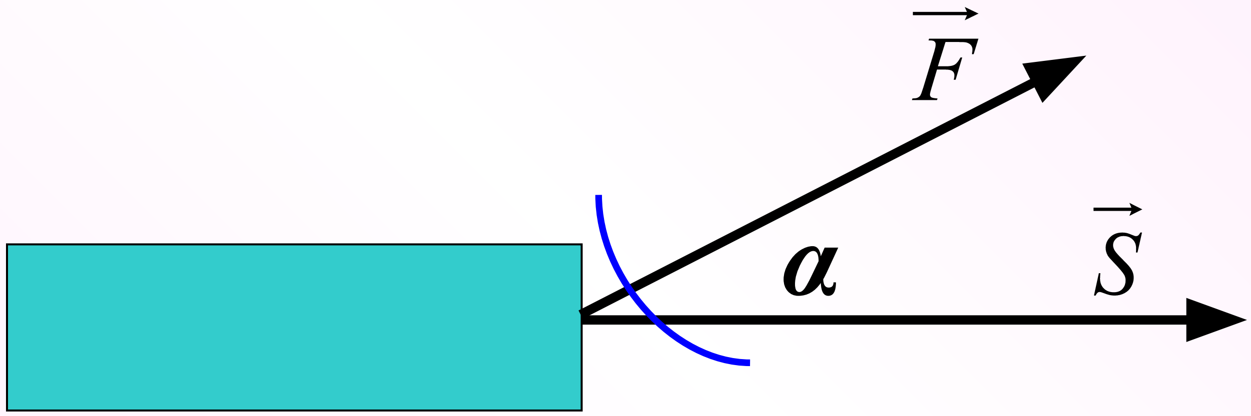
Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ***, то*** $\cos 0^0=1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

Если $\vec{a}=\vec{b}$ ***, то*** $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^2}$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ***называется***

скалярным квадратом вектора

Пример применения скалярного произведение векторов в физике.



Если $\left(\widehat{\vec{F}\,\vec{S}}\right) = \alpha,$ ***то***

$$A = \underbrace{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha}$$

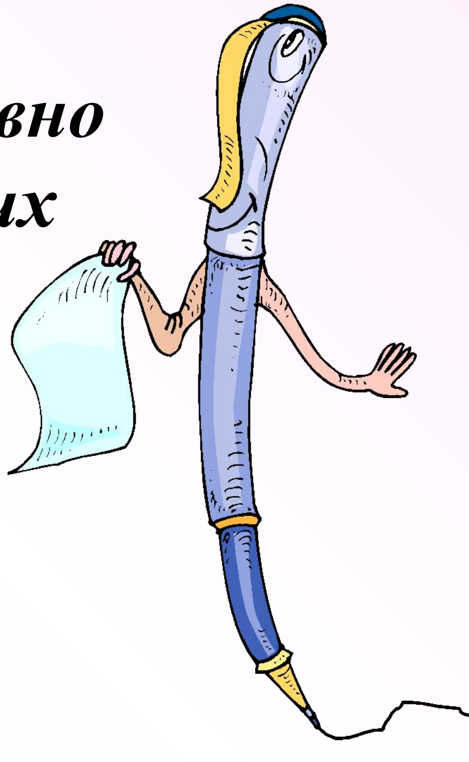
Скалярное произведение векторов.

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

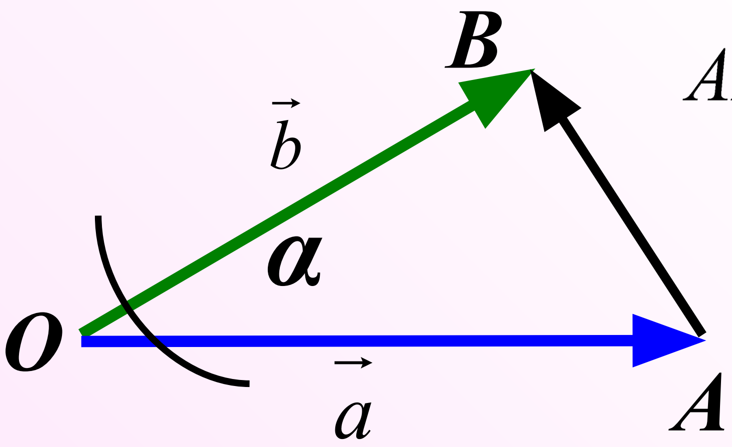
Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.



Докажем формулу скалярного произведения в координатах для случая, когда векторы неколлинеарны.

Желающий выходит к доске. Подсказки - на экране.

Для доказательства потребуется вспомнить теорему косинусов.



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$$

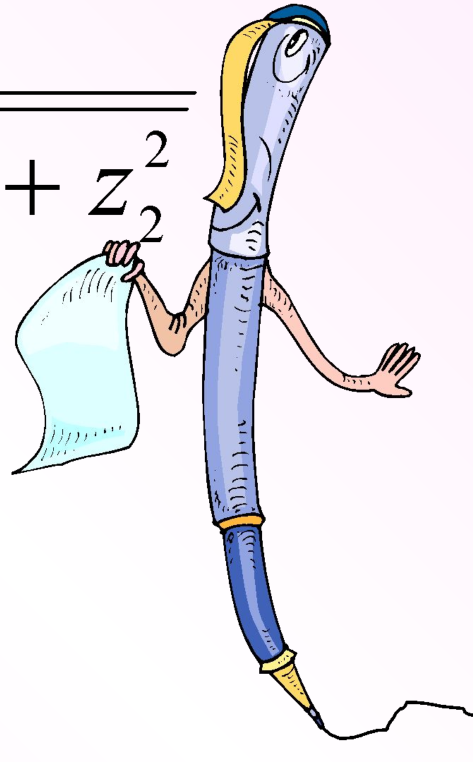
$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

Ваше доказательство:

Дома, следуя рекомендациям в учебнике, вывести формулу $\cos\alpha$ для двух ненулевых векторов в пространстве, зная их координаты.

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



«Геометрия 10-11», глава V, § 2, п.47.

+

№№ 141 (в – з); 443 (д; е)

Решение задач.

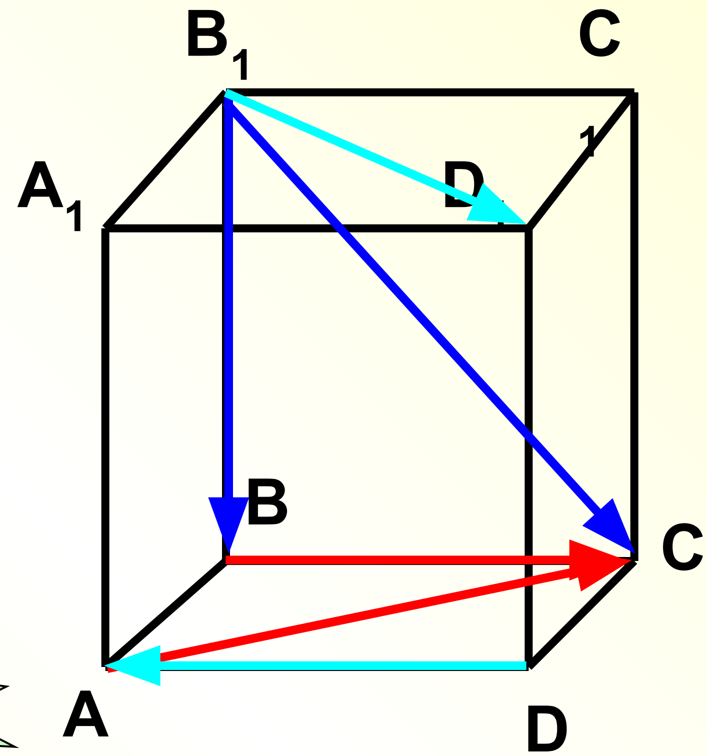
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$ — 45^0

б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ — 45^0

в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$ — 135^0



№ 443 (г)

Дано: ***куб*** $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$; O_1 – ***центр грани*** $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

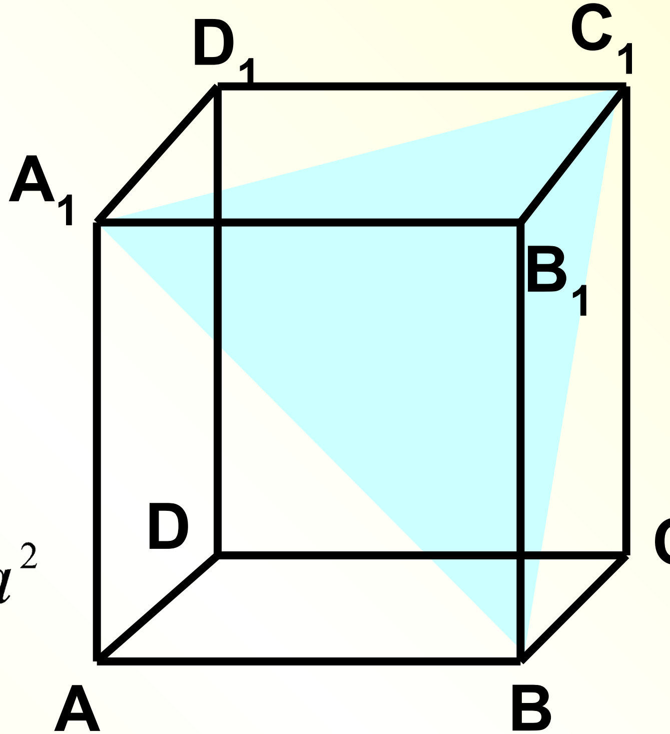
1 способ:

ΔBA_1C_1 – правильный

$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$

$\left(\overrightarrow{BA_1} \wedge \overrightarrow{BC_1}\right) = 60^0$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^0 = a^2$



Ответ: a^2

№ 443 (г)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

2 способ:

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

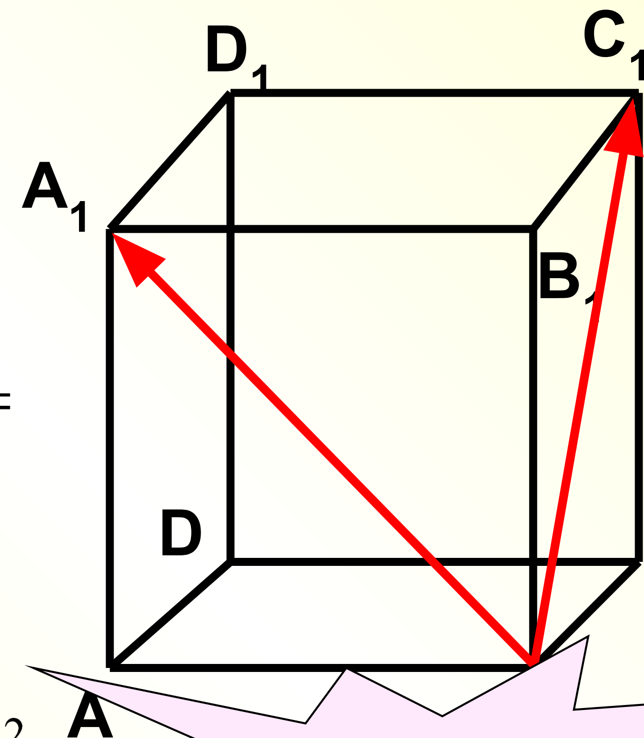
$$\boxed{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} - ?}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}\right) =$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} +$$

$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^0 = a^2$$



Ответ: a^2

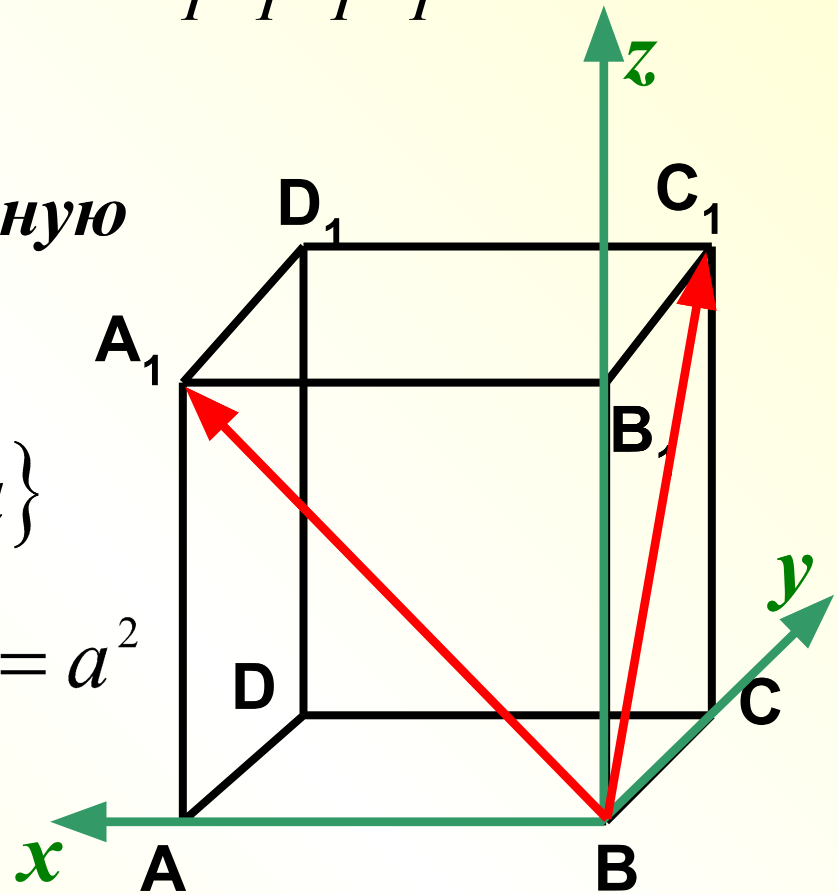
№ 443 (г)

Дано: *куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$; O_1 – *центр грани* $A_1B_1C_1D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

3 способ: Введем прямоугольную систему координат.



$\overrightarrow{BA_1}\{a;0;a\}$ $\overrightarrow{BC_1}\{0;a;a\}$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$

Ответ: a^2

Решаем по группам:

№ 443

1 – а)

а
2

2 – б)

-2
a^2

3 – в)

0

Дополнительная задача:

Вычислите угол между вектором а и координатным вектором i.

$$\vec{a}\{2;1;2\}$$

Спасибо за урок!