

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ  
(часть 2)

# План

- Погрешность прямых методов
- Устойчивость по входным данным
- Итерационные методы
  - Приведение СЛАУ к итерационной форме
  - Метод простой итерации
  - Метод Зейделя
  - Метод релаксации



# Погрешность прямых методов решения СЛАУ

Источники ошибок:

- ограниченность разрядной сетки ЭВМ;
- погрешность представления исходных данных (коэффициентов системы  $A$  и (или) вектора правой части  $F$ ).

# Уточнение корней

Обозначим приibl. решение системы (1) через  $\bar{x}_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Подставим это решение в исходную систему:

$$A\bar{x} = \bar{f}.$$

Вычтем эти системы:

$$A(x - \bar{x}) = f - \bar{f}.$$

невязка

Обозначим через  $y = x - \bar{x}$ ,  $\varepsilon = f - \bar{f}$

# Уточнение корней

Получим новую систему:

$$Ay = \varepsilon.$$

Решая ее, находим приibl. корни  $\bar{y}$ .

Это решение используется для  
уточнения  $\bar{x}$ :

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \bar{y}.$$

Этот процесс можно повторять.

# Устойчивость по входным данным

Фактически вместо исходной системы при наличии погрешности исходных данных решается не система (1), а «возмущенная система (2):

$$AX = f \quad (1)$$

$$A^* X^* = f^* \quad (2)$$

# Устойчивость по входным данным

Необходимо оценить, как связаны погрешность решения  $\Delta X = X^* - X$  с абсолютными погрешностями коэффициентов матрицы  $\Delta A = A^* - A$  и свободных членов  $\Delta f = f^* - f$ .

Это т.н. коэффициентная устойчивость и устойчивость по правой части.

# Устойчивость по входным данным

Для оценки погрешности и устойчивости системы обратимся к основным характеристикам СЛАУ, известным из курса алгебры.  
Напомним некоторые определения.



# Определение 1. Норма вектора

Нормой вектора  $X$  называется неотрицательное число  $\|X\|$  такое, что

$$1. \|X\| \geq 0, \quad 0 \neq \|X\| = 0 \iff X = 0$$

$$2. \|c \cdot X\| = |c| \cdot \|X\|, \quad c \in R;$$

$$3. \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

# Определение 2. Норма матрицы

Нормой матрицы  $A$  называется неотрицательное число  $\|A\|$  такое, что

$$1. \|A\| \geq 0, \quad \|0\| = 0;$$

$$2. \|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|, \quad c \in R;$$

$$3. \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|;$$

$$4. \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

# Виды норм

вектора:

матрицы:

$$\|X\|_I = \max_{i=1,n} |x_i|$$

кубическая

$$\|A\|_I = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|X\|_{II} = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

октаэдрическая

$$\|A\|_{II} = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|X\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

сферическая

$$\|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

# Упражнение. Найдите нормы вектора

$$X = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|X\|_I = ?$$

$$3$$

$$\|X\|_{II} = ?$$

$$7$$

$$\|X\|_{III} = ?$$

$$\sqrt{15}$$

# Упражнение. Найдите нормы матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 13 & 4 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

кубическую:

$$\|A\|_I = \max\{6, 20, 13\} = 20$$

октаэдрическую:

$$\|A\|_{II} = \max\{9, 23, 7\} = 23$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

сферическую:

$$\|A\|_{III} = \sqrt{23}$$

# Погрешность решения

Относительная погрешность решения связана с погрешностью правой части следующим образом:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq M_A \cdot \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}$$

Константа пропорциональности  $M_A$  - число обусловленности матрицы.

# Число обусловленности матрицы

$$M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Обусловленность – это внутреннее свойство матрицы, не связанное со способом решения системы уравнений. Если это число велико, матрица называется плохо обусловленной. Решение СЛАУ считается ненадежным, если

$$\Delta \epsilon_A \geq \frac{\delta}{\epsilon_{\text{маш}}} \text{ допустимая отн. погрешность}$$

# Примеры

Классическим примером плохо обусловленной матрицы является матрица Гильберта с элементами

$$h_{ij} = 1 / (i + j + 1)$$

Уже при  $n=8$   $M_H \geq 10^{10}$ .



$$\begin{cases} 1.00x + 0.99y = 1.99, \\ 0.99x + 0.98y = 1.97. \end{cases}$$

Точное решение:  
 $x=1, y=1.$

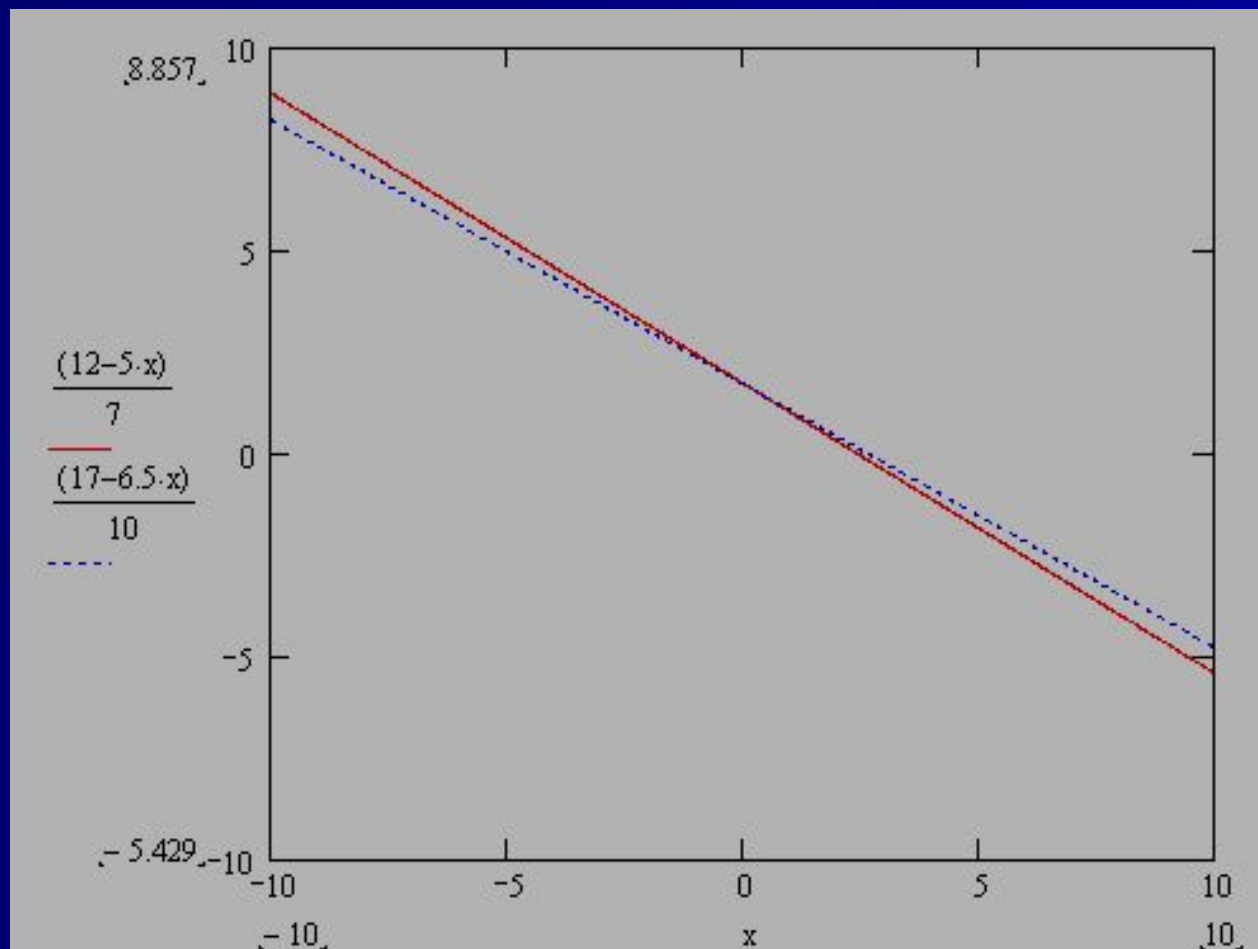
Небольшое отклонение в исходных данных резко меняет решение:

$$\begin{cases} 1.00x + 0.99y = 1.989903, \\ 0.99x + 0.98y = 1.970106. \end{cases}$$

Эта система дает решение  $x=3.000, y=-1.0203.$

Число обусловленности матрицы  $A$  в данном случае порядка 40 000.

В двумерном случае возможна графическая трактовка понятия обусловленности: прямые, являющиеся геометрическими образами уравнений пересекаются под очень острым углом:



# Графическая трактовка понятия обусловленности

Небольшое искажение данных (параллельный перенос при изменении свободных членов, поворот при возмущении матрицы коэффициентов) приводит к значительному перемещению точки пересечения (геометрического образа решения).

# Какие из систем плохо обусловлены?

$$1) \begin{cases} 5x - 3y = -11 \\ -2,5x + 1,501y = 5,5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 6,1x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2,1x - 4y = -5 \\ 3x + 8y = 10 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 0,2x + y = 4,5 \\ x + 5,01y = 13 \end{cases}$$

Ответ: 1), 4)

# Число обусловленности

На практике для нахождения числа обусловленности пользуются его свойством:

$$M_A \geq \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$$

где  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  – наибольшее и наименьшее по модулю собственные числа матрицы  $A$ .

# Обусловленность матрицы

Решающую роль в обусловленности играет не близость к 0 определителя, а разброс собственных значений матрицы.

# Погрешность решения

Знание числа обусловленности позволяет оценить и погрешности округления на ЭВМ. Если каждая компонента вектора правой части округляется с относительной погрешностью  $O(2^{-m})$ , где  $m$  – разрядность сетки ЭВМ, то решение задачи (1) не может быть найдено с точностью, большей, чем  $M_A O(2^{-m})$ .

# Обусловленность систем

Решение плохо обусловленных систем – некорректная задача. Чтобы преодолеть некорректность используют *метод регуляризации*, основанный на привлечении дополнительной информации о решении.



# Итерационные методы

В случае произвольной матрицы  $A$  и достаточно большого числа  $n$  решение системы (1) с помощью прямых методов затруднительно. В этом случае применяются итерационные методы.

Методы  
решения СЛАУ

ПРЯМЫЕ

ИТЕРАЦИОННЫЕ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ

ПРОСТОЙ  
ИТЕРАЦИИ

ЗЕЙДЕЛЯ

РЕЛАКСАЦИИ

# Приведение системы к итерационному виду

Для этого систему (1) переписываем в виде, удобном для итерационного процесса:

(2)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

В матричном виде:

$$X = aX + \beta$$

# Приведение системы к итерационному виду

Пример. Пусть дана система

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 0,5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

# Приведение системы к итерационному виду

**Способ 1.** Поделив каждое уравнение на соответствующий диагональный элемент (если они не равны нулю) и решив уравнения относительно диагональных переменных, получим:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 0,5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 = 0,2x_2 - 0,2x_3 + 0,8 \\ x_2 = -0,25x_1 + 0,5x_3 + 0,5 \\ x_3 = -0,25x_1 + 0,25x_2 + 0,5 \end{cases} \quad (*)$$

# Приведение системы к итерационному виду

**Способ 2. Вычленим единицу из каждого диагонального элемента и выразим полученные неизвестные:**

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 0,5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_1 + x_2 - x_3 + 4 \\ x_2 = -0,5x_1 - x_2 + x_3 + 1 \\ x_3 = -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 \end{cases} (**)$$

**Эти системы эквивалентны, т.е. имеют одинаковые решения.**

Все итерационные методы решения системы, приведённой к итерационному виду, состоят в том, что выбирается некоторое начальное приближение (вектор  $X_0$ ), которое подставляется в правую часть итерационной системы. В левой части тогда получаем решение на первой итерации, затем подставляем его в правую часть - и т. д. Последовательность векторов строится до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность:

$$\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| < \varepsilon, i = \overline{1, n}$$

# Метод простой итерации

Итерационные методы различаются только по способу построения последовательности.

Формулы метода простой итерации:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \alpha X^{(0)} + \beta \\ X^{(2)} &= \alpha X^{(1)} + \beta \\ &\dots \\ X^{(k+1)} &= \alpha X^{(k)} + \beta \end{aligned}$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j^{(k)} + \beta_i, i = 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots$$



# Метод простой итерации

Прерываем итерационный процесс, когда выполнится условие достижения заданной точности.

Для первой приведенной системы (\*) из примера последовательность приближений решения:

$$\begin{cases} x_1 = 0,2x_2 - 0,2x_3 + 0,8 \\ x_2 = -0,25x_1 + 0,5x_3 + 0,5 \\ x_3 = -0,25x_1 + 0,25x_2 + 0,5 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0.8,0.5,0.5)$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = (0.85,0.55,0.425)$$

.....

# *Достаточное условие сходимости метода простой итерации*

Рассмотрим, при каком условии сходится построенная последовательность векторов. Сходимость векторов рассматривается по координатной, т. е. расстояние между векторами вычисляется по формуле:

$$\|x - y\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

# Теорема. Итерационный процесс сходится к единственному решению, если какая-либо каноническая норма матрицы $\|\alpha\| < 1$ .

Нормой квадратной матрицы  $A$  называется вещественное число  $\|A\|$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1.  $\|A\| > 0$  при  $A \neq 0$ ,  $\|0\| = 0$ ;
2.  $\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$ ,  $c \in R$ ;
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;
4.  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Для канонической нормы выполняется еще два дополнительных условия:

5.  $|a_{ij}| \leq \|A\|$ ,  $1, \dots, \forall i, j = 1, \dots, n$
6.  $\det A \leq \det B \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$

# Доказательство

Запишем  $k$ -ое  
приближение  
итерационной  
последовательности

$$x^{(1)} = ax^{(0)} + \beta$$

$$x^{(2)} = ax^{(1)} + \beta$$

.....

$$x^{(k+1)} = ax^{(k)} + \beta$$

через все предыдущие

$$X^{(k)} = (E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1})\beta + \alpha^k X^{(0)}$$

$$X^{(k)} = (E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1})\beta + \alpha^k X^{(0)}$$

Т.к.  $\|\alpha\| < 1$  , то  $\|\alpha\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1})\beta$$

Используем формулу, аналогичную сумме бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q < 1$ :

$$\sum = a_0 \frac{1}{1-q}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1})\beta$$

$$\sum = a_0 \frac{1}{1-q}$$

$$X = \beta \cdot (E - \alpha)^{-1}$$

$$X = \alpha X + \beta$$

Т.о., предельный вектор  $X$  является решением итерационной системы.  
Теорема доказана.

**Следствие 1. Итерационный процесс  
сходится, если для системы (2)  
выполняется любое из неравенств:**

1)

$$\max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

кубическая

2)

$$\max_{j=1, n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

октаэдрическая

3)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1$$

сферическая

**Следствие 2. Для исходной системы (1) достаточным условием сходимости метода итераций является одно из:**

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

ИЛИ

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

В приведенном примере итерации сходятся для системы (\*) согласно следствия 1, для системы (\*\*) - следствия 2.



# Проверка условий СХОДИМОСТИ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

Приведем систему к диагональному преобладанию путем линейной комбинации строк

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1 + Y_2 \\ Y_2 &= 2 * Y_1 - Y_2 \\ Y_3 &= Y_1 - 2 * Y_2 + Y_3 \end{aligned}$$

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 8 & -6 & -19 \\ 0 & 8 & -11 & -22 \end{bmatrix}$$

# Оценка погрешности метода простой итерации

Если матрица  $a$  удовлетворяет условию

$$q = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \text{ то для оценки}$$

погрешности приближенного вектора

$X^{(k)}$  имеет место формула:

$$\Delta_{X^{(k)}} = \frac{q}{1-q} \cdot \max_i |x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}|.$$

# Метод Зейделя

В этом методе для нахождения  $i$ -ой компоненты решения на  $(k+1)$ -ой итерации используются уже найденные на  $(k+1)$  значения

$$x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$$

# Метод Зейделя

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1 \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2 \\ x_3^{(k+1)} = \alpha_{31}x_1^{(k+1)} + \alpha_{32}x_2^{(k+1)} + \alpha_{33}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n \end{array} \right.$$

Таким образом, при вычислении очередной компоненты  $x_i$  используются вычисленные  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  с новой итерации, в то время как в методе простой итерации используются все значения с предыдущей.

**В матричном виде метод Зейделя  
можно записать в следующем виде:**

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + (R + D)x^{(k)} + \beta$$

$$L + D + R = \alpha$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \dots & \alpha_{32} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n2} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

D – диагональ матрицы  $\alpha$

# Условие сходимости

Достаточное условие сходимости практически аналогично методу простой итерации. Однако, в некоторых случаях оно менее строгое, т.е. метод Зейделя может сходиться, когда метод простой итерации расходится. Обычно метод Зейделя дает лучшую скорость сходимости, чем метод простой итерации.

# Условие сходимости метода Зейделя

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\lambda & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\lambda & \alpha_{n2}\lambda & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Необходимое и достаточное условие:  
модули всех корней уравнения (3)  
должны быть меньше 1.

# Метод релаксации

Метод релаксации является *обобщением метода Зейделя*. Алгоритм построения итерационной последовательности в данном случае имеет вид:

$$X^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot X^{(k)} + \omega \cdot (LX^{(k+1)} + (R + D)X^{(k)} + \beta)$$

где  $\omega = \text{const} > 0$  – параметр релаксации, управляющий скоростью сходимости итерационного процесса.



$$X^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot X^{(k)} + \omega \cdot (LX^{(k+1)} + (R + D)X^{(k)} + \beta)$$

При  $\omega=1$  алгоритм соответствует методу

**Зейделя,**

если  $\omega > 1$  – методу **верхней релаксации,**

$\omega < 1$  – методу **нижней релаксации.**

Условие сходимости метода релаксации аналогично рассмотренным для методов простой итерации и Зейделя.

Скорость сходимости метода может быть самой высокой из итерационных методов в случае оптимального выбора параметра  $\omega$ .