§ 4. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общем случае имеет вид:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.1}$$

где F – непрерывная функция всех своих аргументов. ДУ n-го порядка, разрешенное относительно $y^{(n)}$, имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{4.2}$$

Общим решением ДУ n-го порядка называют функцию

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{4.3}$$

которая при любых значениях параметров $C_1, C_2, ..., C_n$ является решением этого уравнения. Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \tag{4.4}$$

определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом ДУ n-го порядка*.

Задачей Коши для ДУ (4.2) называется задача нахождения решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0,..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (4.5)$$

Если известно общее решение (4.3) дифференциального уравнения (4.2), то для решения задачи Коши постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$ определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered} y_0=\varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y'_0=\varphi'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, ..., C_n). \end{gathered}$$

В случае дифференциального уравнения второго порядка частное решение можно найти заданием *краевых условий*, когда задаются значения функции в двух разных точках $y\big|_{x=x_1}=y_1$ и $y\big|_{x=x_2}=y_2$. В этом случае лишь найдя общее решение ДУ можно установить, имеет ли поставленная задача решения и сколько таких решений.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

1) Уравнение имеет вид

$$y^{(n)} = f(x).$$

Это уравнение решается последовательным интегрированием правой и левой части уравнения.

Пример. Найти общее решение уравнения третьего порядка

$$y'' = 48x + 6.$$

Последовательно интегрируя правую и левую часть уравнения, находим

$$y' = \int (48x + 6)\,dx = 24x^2 + 6x + C_1,$$

$$y' = \int \left(24x^2 + 6x + C_1\right)dx = 8x^3 + 3x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(8x^3 + 3x^2 + C_1 x + C_2\right)dx = 2x^4 + x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2) Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0. \tag{4.6}$$

В этом случае замена $p = y^{(k)}$ позволяет понизить порядок уравнения до $n - k$, так как после замены уравнение примет вид

$$F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0.$$

Из этого уравнения можно найти $p = p(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, а затем найти y с помощью интегрирования k раз функции $p = p(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$.

Пример. Решить уравнение $y''' = y''^2$.

Замена $y'' = p(x)$ и $y''' = p'$ дает уравнение 1-го порядка относительно p:

$$p' = p^2,$$

Откуда, последовательно интегрируя, получим

$$\frac{dp}{dx} = p^2, \frac{dp}{p^2} = dx, \quad \int \frac{dp}{p^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{p} = x + C_1, \; p = -\frac{1}{x + C_1}, \; y'' = -\frac{1}{x + C_1},$$

$$y' = \int y'' dx = -\int \frac{dx}{x + C_1} = -\ln(x + C_1) + C_2,$$

$$y = \int y' dx = -\int [\ln(x + C_1) - C_2] dx =$$

$$= -\int \ln(x + C_1) dx + C_2 x = -x \ln(x + C_1) + \int \frac{x}{x + C_1} dx + C_2 x =$$

$$= -x \ln(x + C_1) + x - C_1 \ln(x + C_1) + C_2 x + C_3 =$$

$$= C_3 + C_4 x - (x + C_1) \ln(x + C_1).$$

3) Уравнение не содержит независимой переменной:

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (4.7)$$

Порядок такого уравнения понижается на единицу заменой $y' = p$. При этом производные функции $f(x)$ по x нужно выразить через производные p по y:

$$\frac{dy}{dx} = p(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'_y p = pp'_y \text{ и т.д.}$$

Пример. Решить уравнение $y'' = 2yy'$.

Пусть $y' = p, y'' = pp'_y$, тогда получим

$$pp'_y = 2yp.$$

Частное решение имеет вид $p = 0$, т.е. $y' = 0, y = C$.

Если $p \neq 0$, после сокращения на p имеем $\dfrac{dp}{dy} = 2y$, откуда имеем

$$\int dp = \int 2y\,dy,\ p = y^2 + C_1, \frac{dy}{dx} = y^2 + C_1, \int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \int dx, \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = x + C_2,$$

$$y = C_1 \operatorname{tg}\left(C_1\left(x + C_2\right)\right).$$

§ 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) n-го порядка называют уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных и имеющее вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (5.1)$$

где $a_0(x), a_1(x),..., a_{n-1}(x), a_n(x)$ и $f(x)$ – функции аргумента x.

Если $f(x) \neq 0$, уравнение называют *линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ)* или *линейным дифференциальным уравнением с правой частью*.

Если $f(x) = 0$, уравнение называют *линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ)* или *линейным дифференциальным уравнением без правой части*. Оно имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (5.2)$$

Функции $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,$ $y_n(x)$ называют *линейно зависимыми* в некотором интервале $[a,b]$, если существуют такие числа α_1, $\alpha_2,\dots,$ α_n, не все равные нулю, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0 \qquad (5.3)$$

на рассматриваемом интервале.

Пример. Функции 1, x, x^2, …, x^n линейно независимы на любом интервале, так как равенство $\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+...+\alpha_{n+1}x^n=0$ справедливо только при всех $\alpha_i=0$. Иначе в левой части равенства стоял бы многочлен степени не выше n, который может обращаться в нуль не более, чем в n точках рассматриваемого интервала.

Если равенство (5.3) справедливо только при всех $\alpha_i=0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,$ $y_n(x)$ называют *линейно независимыми* на интервале $[a,b]$.

Общее решение однородного уравнения (5.2) имеет вид

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x), \tag{5.4}$$

где $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – линейно независимые частные решения уравнения (5.3), $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Фундаментальной системой решений называют любые n линейно независимых решений однородного линейного уравнения (5.2). Следовательно, общее решение уравнения (5.2) является линейной комбинацией любой его фундаментальной системы решений.

Пусть коэффициенты $a_0(x), a_1(x),..., a_{n-1}(x), a_n(x)$ уравнения (5.2) – константы. Тогда частные решения $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ имеют вид $y = e^{kx}$, где k – константа. В этом случае $y^{(p)} = k^p e^{kx}$ и, после подстановки в уравнение (5.2) выражения $y = e^{kx}$ и соответствующих производных, получаем:

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + ... + a_n e^{kx} = 0.$$

После сокращения на e^{kx} получим *характеристическое уравнение*

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (5.5)$$

Числа k, являющиеся его решениями, при подстановке в функцию выражения $y = e^{kx}$ дают частные решения дифференциального уравнения. Здесь возможны следующие случаи.

1) Корни характеристического уравнения различные и действительные.

В этом случае общее решение дифференциального уравнения (5.2) может быть записано в виде:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y^{(5)} - 5y''' + 4y' = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^5 - 5k^3 + 4k = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$k(k^2 - 4)(k^2 - 1) = 0.$$

Следовательно, корни характеристического уравнения имеют вид:

$$k_1 = 0, k_2 = -2, k_3 = 2, k_4 = -1, k_5 = 1.$$

Поэтому общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-x} + c_5 e^{x}.$$