Методы Монте-Карло

Федяев Юрий Сергеевич

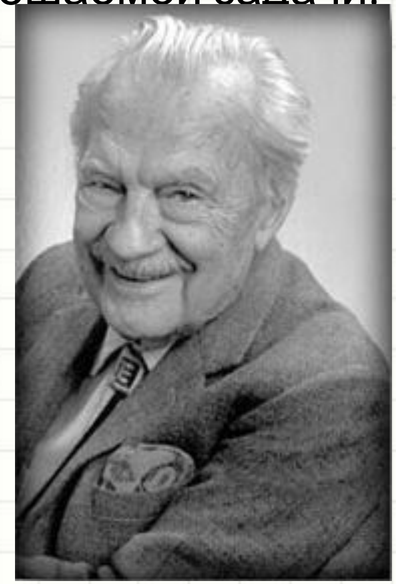
19.05.2016

План

- Основы метода Монте-Карло
- Генерация случайных величин

Основы метода Монте-Карло

Ме́тод Мо́нте-Ка́рло (методы Монте-Карло) — общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с аналогичными величинами решаемой задачи.



Николас Константин Метрополис (1915 — 1999) — американский математик и физик.

Ста́нислав Ма́ртин У́лам (1909 —1984) — польский и американский математик.

Годом рождения метода Монте-Карло считается 1949 год, когда в свет выходит статья Метрополиса и Улама «Метод Монте-Карло». Название метода происходит от названия коммуны в княжестве Монако, широко известного своими многочисленными казино, поскольку именно рулетка является одним из самых широко известных генераторов случайных чисел. Метод применялся во время второй мировой войны фон Нейманом и Уламом в Лос-Аламосе в связи с моделированием нейтронной диффузии в расщепляемом

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx \tag{1}$$

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{2}$$

$\{x_i\}$ – множество точек, равномерно распределённых на отрезке $[0, 1]$

$$\sigma_I^2 \approx \frac{1}{N} \sigma_f^2 = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i \right)^2 \right] \tag{3}$$

σ_f^2 – дисперсия f, т. е. её отклонение от математического ожидания (мера разброса данной случайной величины)

$\sqrt{\sigma_I^2 =} \sigma_I$ – стандартное (среднеквадратичное) отклонение

$$\sigma_I \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{w(x)} w(x)\, dx \tag{4}$$

$w(x)$ – весовая функция

$$\int_0^1 w(x) dx = 1 \tag{5}$$

$$y(x) = \int_0^x w(t) dt \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dx} = w(x); \quad y(x=0) = 0; \qquad y(x=1) = 1$$

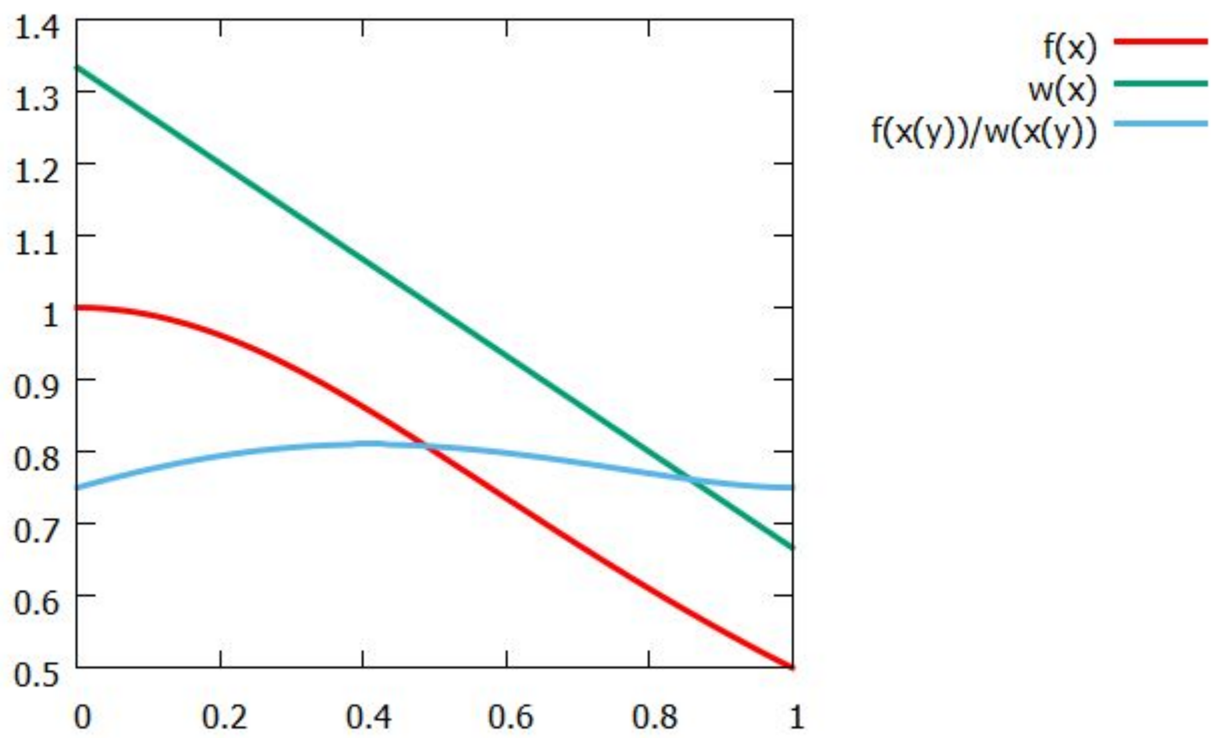
$$I = \int_0^1 \frac{f(x(y))}{w(x(y))}\, dy \tag{7}$$

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x(y_i))}{w(x(y_i))} \tag{8}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad w(x) = 1/3\,(4-2x)$$

$$y(x) = 1/3\,(4-x)x \qquad x(y) = 2-\sqrt{4-3y}$$



$$I = \int f(X) dX \tag{9}$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_k), \qquad \mathrm{d}X = dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(X_i) \tag{10}$$

$R = O\left(N^{-2/k}\right)$ – ошибка многомерного аналога метода трапеций

$R = O\left(N^{-1/2}\right)$ – ошибка многомерного метода Монте-Карло

При $k > 4$ метод Монте-Карло становится более эффективным

Генерация случайных величин

Randomize - инициализация генератора случайных
чисел

function Random(L: LongInt): LongInt;
function Random(L: Int64): Int64;

Генератор целых псевдослучайных чисел в диапазоне
[0, L)

function Random: extended;

Генератор вещественных псевдослучайных чисел в диапазоне
[0, 1)

$x \in [a, b]$

$p \in [0, 1]$

$$x = a + (b - a)p$$