Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица

Определения

Матрицей размера (m x n) называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{i\,j}$ **элемент матрицы**

где i **число строк,** j **число столбцов**

Если элементы матрицы состоят из нулей, то матрица называется нулевой.

Если m=n, то матрица называется квадратной.

Матрица, которая состоит из одной строки называется матрицей-строка.

$$A = (1 \ \ 0 \ \ 3 \ \ 5)$$

Матрица, которая состоит из одного столбца называется матрицей-столбец.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Если в квадратной матрице кроме элементов, находящихся на главной диагонали все элементы равны нулю, то данную матрицу называют диагональной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Если все элементы диагональной матрицы равны единице, то данную матрицу называют единичной матрицей. Обозначают: Е

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Если элементы строки поменять на элементы столбца, то данную матрицу называют транспонированной матрицей

Например

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы называются равными, если равны размеры этих матриц.

Для того, чтобы произвести операцию сложения (вычитания) надо чтобы две матрицы были одинакового размера.

Чтобы произвести операции сложения (вычитания) надо сложить (вычесть) соответствующие элементы двух матриц.

Для того чтобы умножить две матрицы необходимо чтобы число столбцов у первой матрицы равнялось числу строк второй матрицы.

$$A(m \times n) \cdot B(n \times p) = C\ (m \times p)$$

Для умножения двух матриц надо умножив сложить все элементы строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы.

A^{-1} **называется обратной матрицей если выполняется следующее равенство** $A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$.

Формула нахождения обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Свойства матриц

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $(\lambda*\mu) * A = \lambda * (\mu *A)$
4) $\lambda*(A +B) = \lambda*A + \lambda B$
5) $(\lambda + \mu) * A = \lambda*A + \mu*A$
6) $(A * B) * C = A * (B * C)$
7) $(A +B) * C = A * C + B * C$
8) $A * B \neq B * A$
9) $A + 0 = 0 + A = A$
10) $A * 0 = 0 * A = 0$
11) $A * E = E * A = A$

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = в_n \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = в_j,$$

$$A \cdot X = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \ldots \\ в_n \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Например

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}$$

Находим решение по следующей формуле

$$\boxed{X = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}}$$