Лекция № 7. Предел числовой последовательности

1. Числовые последовательности.
2. Предел последовательности и его свойства

1. Числовые последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу *n* поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n)$$

Последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел.

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots \Leftrightarrow \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

Примеры последовательностей

$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin(\pi n/2)\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число k:

$$k\{x_n\} = \{k\,x_n\}, \text{ т.е. } k\,x_1, k\,x_2, \ldots$$

2) Сложение (вычитание) последовательностей:

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}.$$

Определение ограниченной последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M; M)$.

О**пределение.** Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство:

$$x_n \leq M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство:

$$x_n \geq M.$$

Пример. $\{x_n\} = n$

$\{1, 2, 3, \dots \}$ – ограничена снизу .

Типы числовых последовательностей

Определение.

1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность **возрастающая.**

2) Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, то последовательность **неубывающая**.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность **убывающая.**

4) Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, то последовательность **невозрастающая.**

Последовательности (2) и (4) называются **монотонными.**

Последовательности (1) и (3) называются **строго монотонными**.

Пример.

$\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

В.2. Предел последовательности и его свойства

Определение. Число a называется **пределом** числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует целое положительное число N (зависящее от ε, $N=N(\varepsilon)$), такое, что для всех членов последовательности с номерами $n \geq N$ выполняется неравенство .

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или

$x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Запись определения предела в логических кванторах

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\big(\exists N = N(\varepsilon)\big)$$

$$(\forall n \geq N): |x_n - a| < \varepsilon$$

Сходящаяся последовательность

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**, в противном случае – **расходящейся**.

Так как

$|x_n - a| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ окрестность

Геометрический смысл предела последовательности:

Число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого, все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки a.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$, сходится к числу a, если вне любой ε-окрестности точки a имеется лишь конечное число членов этой последовательности.

Теорема 1.

Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет единственный предел.

Доказательство.

Действительно, предположим, что $x_n \to a$ и одновременно $y_n \to b$. Возьмем любое

$$\varepsilon < \frac{b-a}{2}$$

и отметим окрестности точек a и b радиуса ε.

Тогда, по определению предела, все элементы последовательности, начиная с некоторого, должны находиться как в окрестности точки a, так и в окрестности точки b, что невозможно.

Теорема 2.

Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.

Следствие.

Если из последовательности можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к a и b, где $a \neq b$, то последовательность не имеет предела.

Например,

$$\{(-1)^n\}$$

Теорема 3. Сходящаяся последовательность ограничена.

Замечание. Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся.

Например, последовательность

$$\{(-1)^n\}$$

ограничена, но не является сходящейся.

Теорема 4.

Если последовательность $\{x_n\}$, имеет предел $a > 0$ ($a < 0$), то, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $x_n > 0$ ($x_n < 0$), т.е. члены последовательности сохраняют знак a.

Следствие.

Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

и $a < b$, то, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство .

$$x_n < y_n .$$

Теорема 5.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

и $\forall n \in N$ члены последовательности $\{c_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \le c_n \le y_n$

то

$$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Теорема 6.

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$, если $b \neq 0$.

Теорема 7. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема 8. (*принцип Больцано-Вейерштрасса*) Из всякой ограниченной бесконечной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин Вся высшая математика. Том 1. Учебник. (линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 – с.176-184.