

# Лекция № 7. Предел числовой последовательности

1. Числовые последовательности.
2. Предел последовательности и его свойства

# 1. Числовые последовательности

**Определение.** Если каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие число  $x_n$ , то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}$$

**Общий элемент** последовательности является функцией от  $n$ .

$$x_n = f(n)$$

Последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел.

$$f(1), f(2), \dots, f(n), \dots \Leftrightarrow \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

# Примеры последовательностей

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\} \text{ или } \{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \dots$$

$$\{x_n\} = \{\sin(\pi n/2)\} \text{ или } \{x_n\} = 1; 0; 1; 0;$$

...

Для последовательностей можно определить следующие операции:

1) Умножение последовательности на число  $k$ :

$$k\{x_n\} = \{k x_n\}, \text{ т.е. } k x_1, k x_2, \dots$$

2) Сложение (вычитание) последовательностей:

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}.$$

# Определение ограниченной последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **ограниченной**, если существует такое число  $M > 0$ , что для любого  $n$  верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку  $(-M; M)$ .

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **ограниченной сверху**, если существует такое число  $M > 0$ , что для любого  $n$  верно неравенство:

$$x_n \leq M.$$

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **ограниченной снизу**, если существует такое число  $M > 0$ , что для любого  $n$  верно неравенство:

$$x_n \geq M.$$

**Пример.**  $\{x_n\} = n$

$\{1, 2, 3, \dots\}$  – ограничена снизу .

# Типы числовых последовательностей

## Определение.

- 1) Если  $x_{n+1} > x_n$  для всех  $n$ , то последовательность **возрастающая**.
- 2) Если  $x_{n+1} \geq x_n$  для всех  $n$ , то последовательность **неубывающая**.
- 3) Если  $x_{n+1} < x_n$  для всех  $n$ , то последовательность **убывающая**.
- 4) Если  $x_{n+1} \leq x_n$  для всех  $n$ , то последовательность **невозрастающая**.



Последовательности (2) и (4)  
называются **МОНОТОННЫМИ**.

Последовательности (1) и (3)  
называются **СТРОГО МОНОТОННЫМИ**.

**Пример.**

$\{x_n\} = 1/n$  – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$  – возрастающая и неограниченная.

## В.2. Предел последовательности и его свойства

**Определение.** Число  $a$  называется **пределом** числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует целое положительное число  $N$  (зависящее от  $\varepsilon$ ,  $N=N(\varepsilon)$ ), такое, что для всех членов последовательности с номерами  $n \geq N$  выполняется неравенство .

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

ИЛИ

$x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

# Запись определения предела в логических кванторах

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N = N(\varepsilon)) \left( (\forall n \geq N) : |x_n - a| < \varepsilon \right)$$

# Сходящаяся последовательность

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**, в противном случае – **расходящейся**.

Так как

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \text{ окрестность}$$

## Геометрический смысл предела последовательности:

Число  $a$  является пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N$ , начиная с которого, все члены последовательности принадлежат  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ .

Таким образом, последовательность  $\{x_n\}$ , сходится к числу  $a$ , если вне любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  имеется лишь конечное число членов этой последовательности.

## Теорема 1.

Сходящаяся последовательность  $\{x_n\}$  имеет единственный предел.

### Доказательство.

Действительно, предположим, что  $x_n \rightarrow a$  и одновременно  $y_n \rightarrow b$ . Возьмем любое

$$\varepsilon < \frac{b - a}{2}$$

и отметим окрестности точек  $a$  и  $b$  радиуса  $\varepsilon$ .



Тогда, по определению предела, все элементы последовательности, начиная с некоторого, должны находиться как в окрестности точки  $a$ , так и в окрестности точки  $b$ , что НЕВОЗМОЖНО.

## Теорема 2.

Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.

## Следствие.

Если из последовательности можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к  $a$  и  $b$ , где  $a \neq b$ , то последовательность не имеет предела.

Например,

$$\{(-1)^n\}$$

**Теорема 3.** Сходящаяся последовательность ограничена.

**Замечание.** Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся.

**Например,** последовательность  $\{(-1)^n\}$  ограничена, но не является сходящейся.

## Теорема 4.

Если последовательность  $\{x_n\}$ , имеет предел  $a > 0$  ( $a < 0$ ), то, начиная с некоторого номера  $N$ , выполняется неравенство  $x_n > 0$  ( $x_n < 0$ ), т.е. члены последовательности сохраняют знак  $a$ .

## Следствие.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

и  $a < b$ , то, начиная с некоторого номера  $N$ , выполняется неравенство .

$$x_n < y_n .$$

## Теорема 5.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$   
и  $\forall n \in \mathbb{N}$  члены последовательности  
 $\{c_n\}$  удовлетворяют условию  $x_n \leq c_n \leq y_n$   
ТО

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

## Теорема 6.

Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  сходятся и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ca;$$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab;$$


$$4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}, \text{ если } b \neq 0.$$





**Теорема 7.** Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

**Теорема 8.** (*принцип Больцано-Вейерштрасса*) Из всякой ограниченной бесконечной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.



## Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин  
Вся высшая математика. Том 1. Учебник.  
(линейная алгебра и аналитическая  
геометрия, введение в математический  
анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 –  
с.176-184.