

# **Решение систем логических уравнений**

## Будем придерживаться следующих обозначений:

дизъюнкция (+), конъюнкция ( $\cdot$ ),

импликация ( $\rightarrow$ ), эквивалентность ( $\equiv$ ),

отрицание ( $\neg$ ).

На рисунках темный кружок обозначает 1, а светлый кружок – 0

$F_1$  – количество решений при  $X_1$ , равном 1

$F_0$  – количество решений при  $X_1$ , равном 0

$N$  – число переменных в системе

уравнений.

$F(N) = F_1(N) + F_0(N)$  – общее число решений.

# Построение дерева решений

## Задание 1

Найти количество решений системы уравнений

$$X_1 + X_2 \cdot X_3 = 1$$

$$X_2 + X_3 \cdot X_4 = 1$$

.....

$$X_7 + X_8 \cdot X_9 = 1$$

Вначале полагаем  $X_1 = 1$ . Тогда для первого уравнения значения  $X_2$  и  $X_3$  могут быть любыми. Таким образом, дерево построено до третьего уровня. Далее с учетом  $X_2$  и  $X_3$  выбираем  $X_4$ . После этого алгоритм повторяется для каждой тройки переменных (см. рис. 1).

Начиная с четвертого уровня можно заметить, что  $F_1(4) = F_1(3) + F_1(1)$ ,  $F_1(5) = F_1(4) + F_1(2)$ . Таким образом, получаем

$$F_1(N) = F_1(N-1) + F_1(N-3) \quad (1)$$

x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7

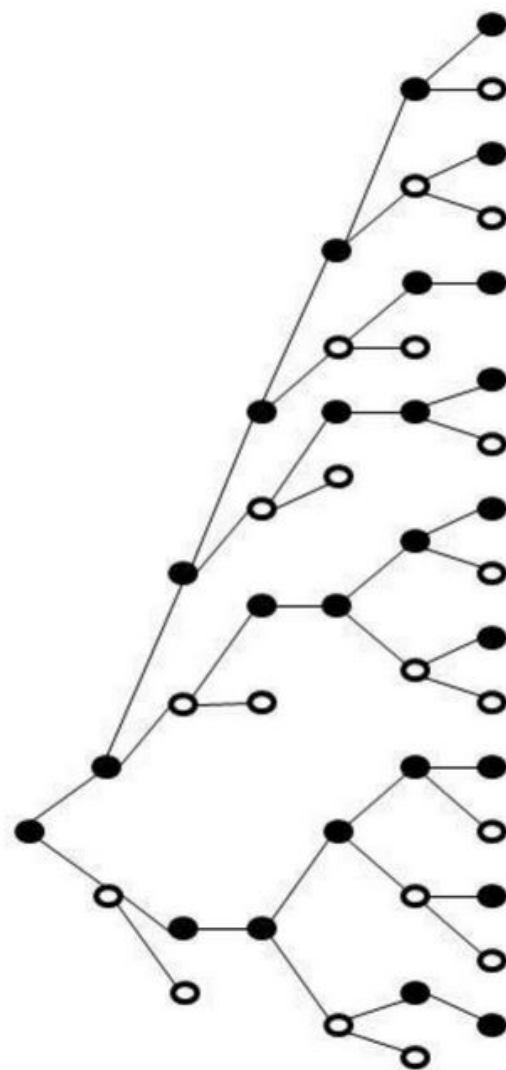


Рис. 1. Задание 1

Из уравнения (1) получаем,  
что  $F_1(8) = 16 + 7 = 23$ ,  $F_1(9) = 23 + 11 = 34$ .

Для того чтобы построить дерево из нуля,  
можно воспользоваться нижней ветвью из  
Рис. 1.

Легко видеть, что она повторяет основное  
дерево, но со сдвигом вправо на 2. То есть  
 $F_0(9) = F_1(7) = 16$ .

Итого,  $F(9) = F_1(9) + F_0(9) = 34 + 16 = 50$ .

**Задание 2.** Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$$

$$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$$

$$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$$

X1 X2 X3 X4 X5 X6 X7

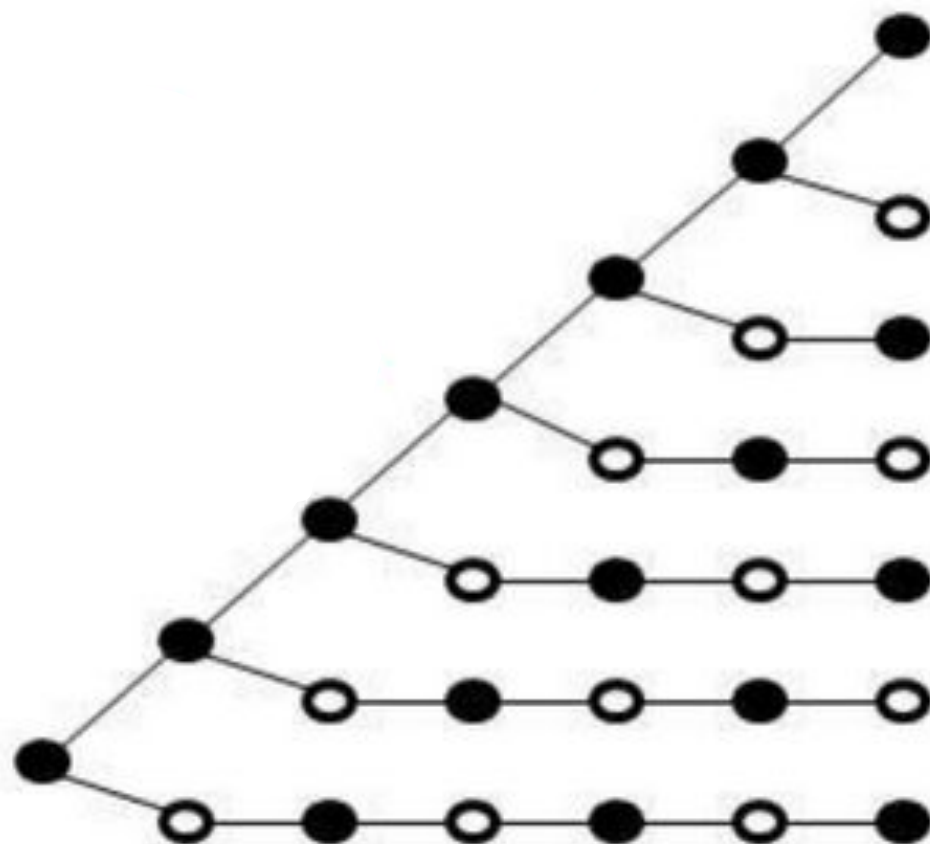


Рис. 2. Задание 2



Для получения числа решений этого задания можно было не строить дерево решений полностью (см. рис. 2), так как очевидно, что  $F_1(N) = N$ . Аналогично,  $F_0(N) = N$ . Итого  $F(7) = 7 + 7 = 14$ .

**Задание 3.** Нужно найти количество решений системы

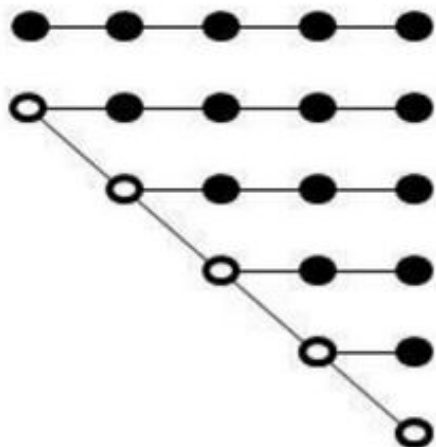
$$(X_1 \rightarrow X_2) \cdot (X_2 \rightarrow X_3) \cdot (X_3 \rightarrow X_4) \cdot (X_4 \rightarrow X_5) = 1$$

$$(Y_1 \rightarrow Y_2) \cdot (Y_2 \rightarrow Y_3) \cdot (Y_3 \rightarrow Y_4) \cdot (Y_4 \rightarrow Y_5) = 1$$

$$(Y_1 \rightarrow X_1) \cdot (Y_2 \rightarrow X_2) \cdot (Y_3 \rightarrow X_3) \cdot (Y_4 \rightarrow X_4) \cdot (Y_5 \rightarrow X_5) = 1$$

На рисунке 3 показаны деревья решений для  $X$  и  $Y$  и приведены соответствующие таблицы истинности.

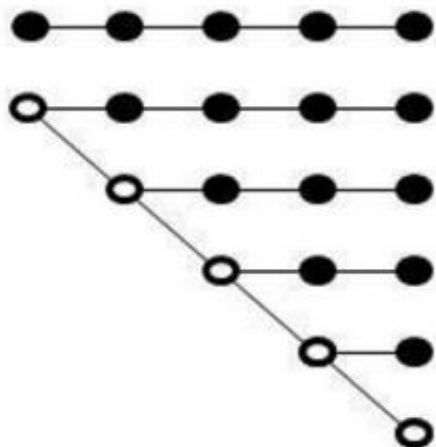
X1 X2 X3 X4 X5



X1 X2 X3 X4 X5

1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Y1 Y2 Y3 Y4 Y5



Y1 Y2 Y3 Y4 Y5

1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Рис. 3. Задание 3

Из первых двух уравнений, поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, следует, что общее число решений  $F(5) = 6 * 6 = 36$ .

Для того чтобы учесть третье уравнение, нужно для каждой переменной  $Y$  подсчитать какое число наборов из таблицы  $X$  не удовлетворяет уравнению. Импликация  $Y_i \rightarrow X_i = 0$ , если  $Y_i = 1$ , а  $X_i = 0$ . То есть для  $Y_1 = 1$  третьему уравнению не удовлетворяют все строки из таблицы  $X$ , где  $X_1 = 0$ . Число таких строк равно пяти. Для  $Y_2 = 1$  таких строк – 4 и т. д. Общее число строк, которые не удовлетворяют третьему уравнению равно  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ .

Таким образом, общее число допустимых решений равно  $36 - 15 = 21$ .

**Задание 4.** Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$$

$$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$$

$$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$$

$$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$$

$$(X_5 \equiv X_6) = 0$$

X1 X2 X3 X4 X5 X6 X7 X8

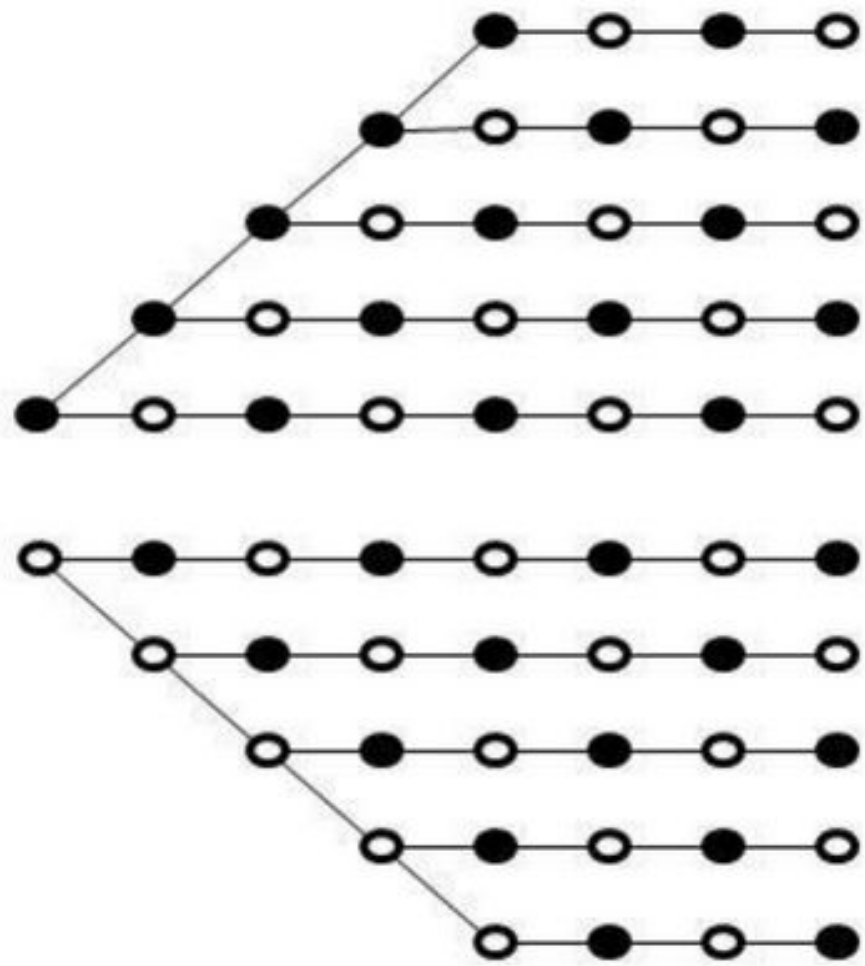


Рис. 4. Задание 4

Для данного примера сложно определить конечную формулу  $F(N)$ , проще построить дерево решений до конца (или хотя бы до  $X_6$ ). На рисунке 4 показано построенное дерево решений.

В результате получаем

$$F(8) = F_1(8) + F_0(8) = 5 + 5 = 10$$

**Задание 5.** Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$$

$$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$$

$$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$$

$$(X_6 \equiv X_8) = 1$$



X1 X2 X3 X4 X5 X6 X7 X8

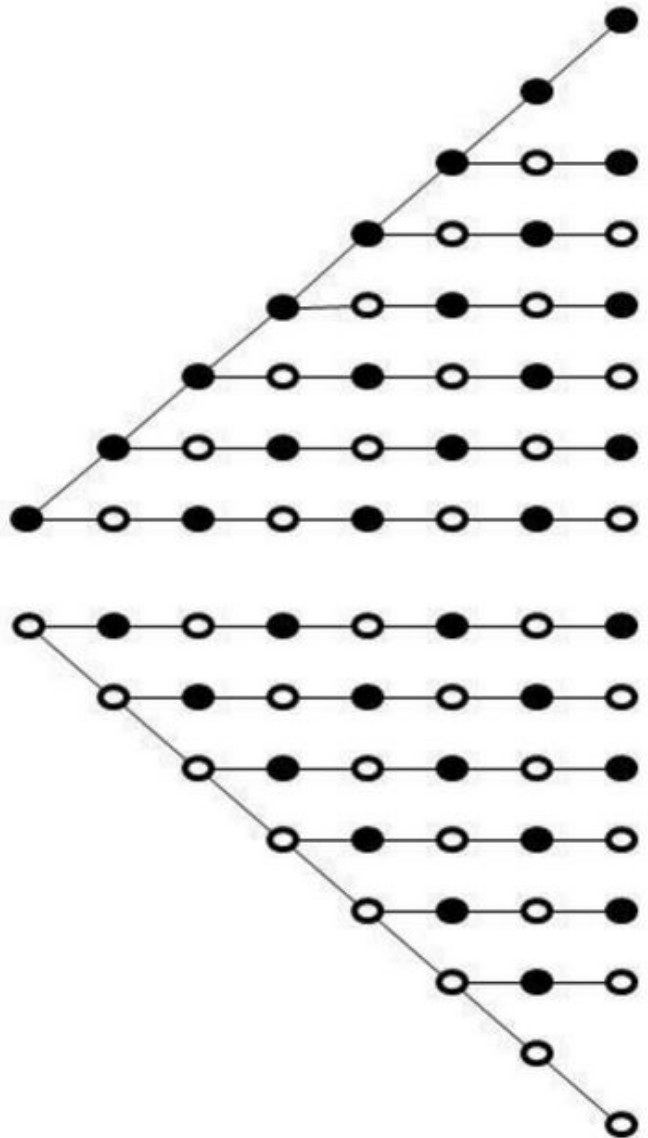


Рис. 5. Задание 5

Для этого примера, так же как и для предыдущего, проще построить дерево решений до конца (рис. 5).

В результате получаем

$$F(8) = F1(8) + F0(8) = 7 + 7 = 14$$

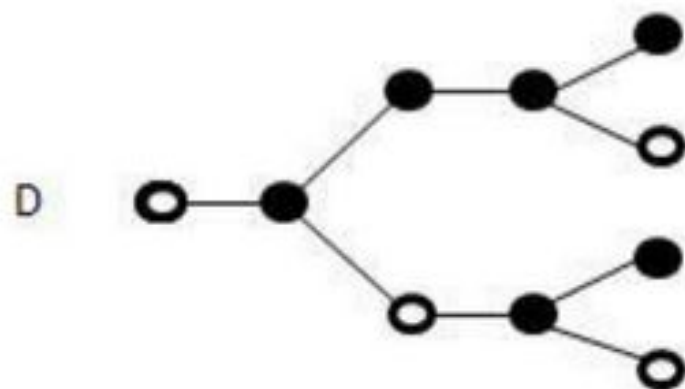
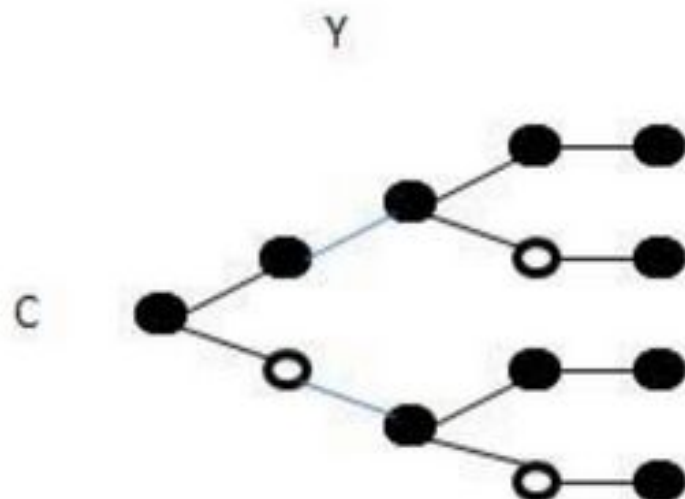
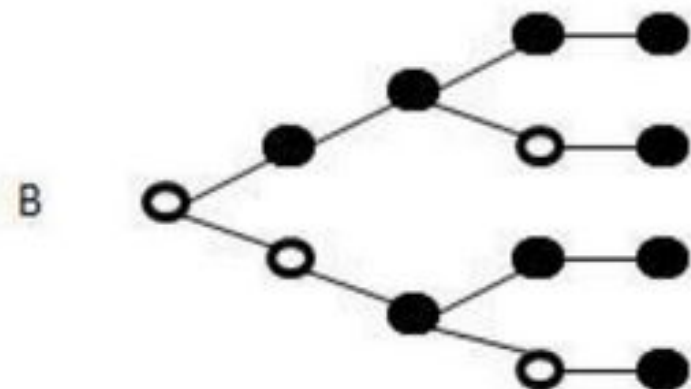
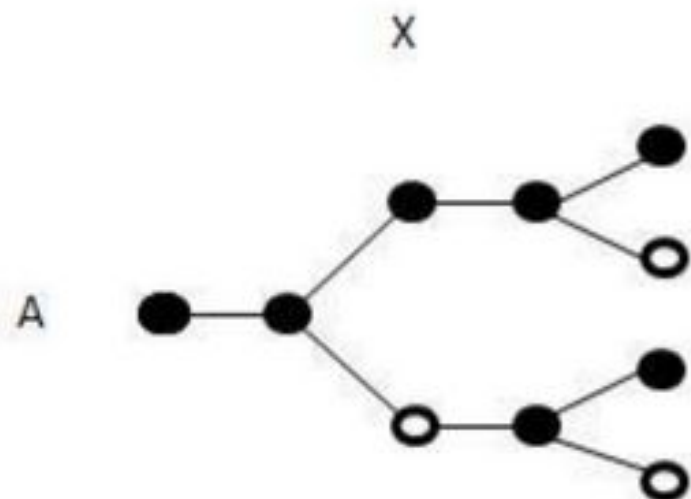
**Задание 9.** Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \rightarrow X_2) \cdot (\neg X_1 \rightarrow X_3) \cdot (X_1 \rightarrow X_4) \cdot (\neg X_1 \rightarrow X_5) = 1$$

$$(\neg Y_1 \rightarrow Y_2) \cdot (Y_1 \rightarrow Y_3) \cdot (\neg Y_1 \rightarrow Y_4) \cdot (Y_1 \rightarrow Y_5) = 1$$

$$(\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 1$$

Для  $X$  и  $Y$  имеем следующие деревья решений



С учетом третьего уравнения получаем следующие четыре набора комбинаций:

$$A - C: 4 * 4 = 16 ((\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (0 + 1) \cdot (0 + 1) = 1)$$

$$B - C: 4 * 4 = 16 ((\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1)$$

$$A - D: \quad \quad = 0 \quad (0 + 0) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 0)$$

$$B - D: 4 * 4 = 16 (1 + 0) \cdot (1 + Y_5) = 1)$$

Всего получается 48 наборов решений.

# Метод битовых цепочек (битовых масок)

**Побитовая маска (битовая маска) — метод, который можно использовать:**

1. Если при рассмотрении одного из уравнений в нем не обнаружены пересекающиеся переменные внешней операции (случай когда одна из переменных первого операнда встречается во втором операнде уже не подходит).
2. Если структура всех уравнения аналогична, и меняются лишь неизвестные.
3. Если какие-либо операнды внешней операции первого уравнения повторяются во втором, второго — в третьем, и т.д.

1. Сколько существует различных наборов значений логических переменных  **$x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6$** , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(\neg(x_1 \vee y_1)) \equiv (x_2 \vee y_2)$$

$$(\neg(x_2 \vee y_2)) \equiv (x_3 \vee y_3)$$

...

$$(\neg(x_5 \vee y_5)) \equiv (x_6 \vee y_6)$$

- Поскольку в скобках одинаковые действия, и переменные повторяются, то введем обозначения:

$$\begin{aligned}\neg a &\equiv b \\ \neg b &\equiv c \\ \neg c &\equiv d \\ \neg d &\equiv e \\ \neg e &\equiv f\end{aligned}$$

- Вместо отрицания первого операнда просто будем использовать «не эквивалентно»:

$$\begin{aligned}a &\neq b \\ b &\neq c \\ c &\neq d \\ d &\neq e \\ e &\neq f\end{aligned}$$



- Вспомним, как выглядит таблица истинности для эквивалентности:

x1	x2	F
----	----	---

0 0 1

0 1 0

1 0 0

1 1 1

- Рассмотрим, в каких случаях выражения будут возвращать ложь. Каждое из пяти выражений будет ложно, когда: либо оба операнда истинны, либо оба операнда ложны (операция равносильность = истине: при 00 или 11).
- Составим битовую маску для наших уравнений. В цепочке значений от **a** до **f** не может быть двух единиц или двух нулей, идущих подряд, так как в этом случае система будет ложна (к примеру, **a ≠ b**, если **0 ≠ 0** — это ложь). Таким образом, для данных уравнений существует всего две цепочки решений:

	цеп.1	цеп.2
a	0	1
b	1	0
c	0	1
d	1	0
e	0	1
f	1	0

- Теперь вспомним о заменах: каждая из переменных от **a** до **f** представляет собой скобку, внутри которой две переменные, связанные дизъюнкцией. Дизъюнкция двух переменных истинна в трех случаях (01, 10, 11), а ложна — в одном (00). Т.е., к примеру:

$x1 \vee y1 = 1$  тогда, когда: либо  $0 \vee 1$ , либо  $1 \vee 0$ , либо  $1 \vee 1$

$x1 \vee y1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $0 \vee 0$

- Это говорит о том, что на каждую **единицу** в цепочке приходится **три** варианта значений, а на каждый **ноль** — **один**. Т.о. получаем:

◦ для первой цепочки:  $3^3 * 1^3 = 27$  наборов значений,

◦ и для второй:  $3^3 * 1^3 = 27$  наборов значений

- Итого наборов:

$$27 * 2 = 54$$

**Результат: 54**

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_9, y_1, y_2, \dots, y_9$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(\neg(x_1 \wedge y_1)) \equiv (x_2 \wedge y_2)$$

$$(\neg(x_2 \wedge y_2)) \equiv (x_3 \wedge y_3)$$

...

$$(\neg(x_8 \wedge y_8)) \equiv (x_9 \wedge y_9)$$

**Ответ:** 324

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_8, y_1, y_2, \dots, y_8$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\neg(((x_1 \wedge y_1) \equiv (x_3 \wedge y_3)) \rightarrow (x_2 \wedge y_2))$$

$$\neg(((x_2 \wedge y_2) \equiv (x_4 \wedge y_4)) \rightarrow \neg(x_3 \wedge y_3))$$

$$\neg(((x_3 \wedge y_3) \equiv (x_5 \wedge y_5)) \rightarrow (x_4 \wedge y_4))$$

$$\neg(((x_4 \wedge y_4) \equiv (x_6 \wedge y_6)) \rightarrow \neg(x_5 \wedge y_5))$$

$$\neg(((x_5 \wedge y_5) \equiv (x_7 \wedge y_7)) \rightarrow (x_6 \wedge y_6))$$

$$\neg(((x_6 \wedge y_6) \equiv (x_8 \wedge y_8)) \rightarrow \neg(x_7 \wedge y_7))$$

**Ответ:** 81

# Метод отображений

**Метод отображения можно использовать:**

1. Если структура всех уравнения аналогична, и меняются лишь неизвестные.
2. Если какие-либо операнды внешней операции первого уравнения повторяются во втором, второго — в третьем, и т.д.

4. Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_7, y_1, y_2, \dots, y_7$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(\neg x_1 \vee y_1) \rightarrow (\neg x_2 \wedge y_2) = 1$$

$$(\neg x_2 \vee y_2) \rightarrow (\neg x_3 \wedge y_3) = 1$$

...

$$(\neg x_6 \vee y_6) \rightarrow (\neg x_7 \wedge y_7) = 1$$

- Внешняя операция в отдельно взятом уравнении — это импликация, результат которой должна быть истина. Импликация истинна если:

$$0 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow 1$$

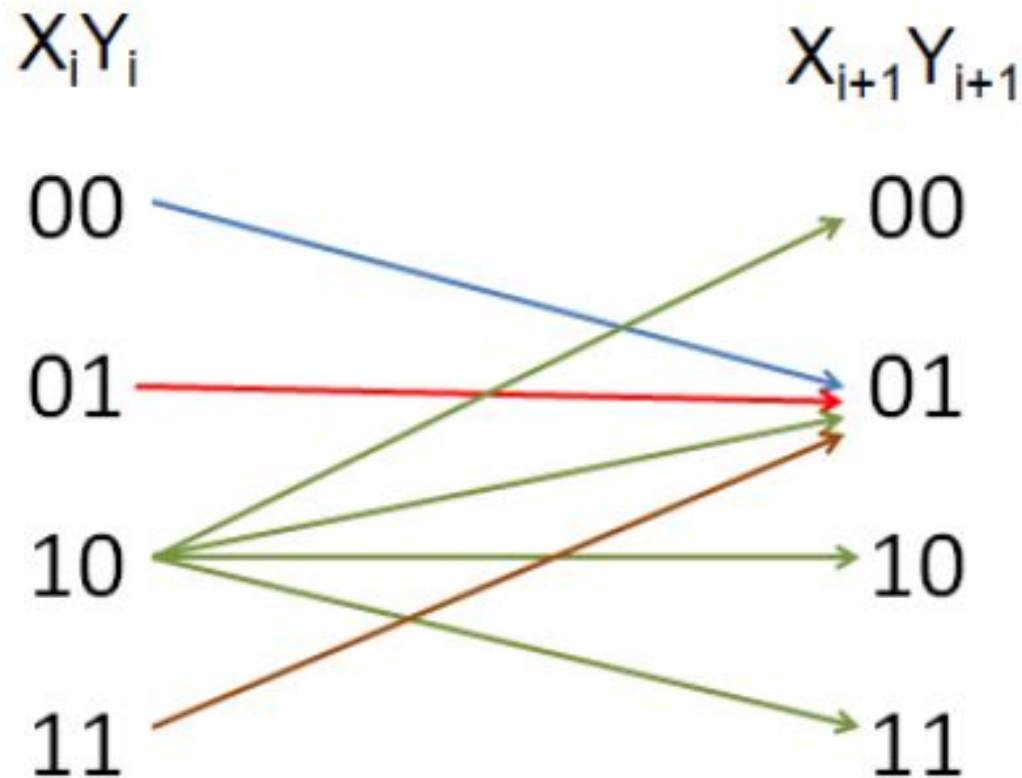
$$1 \rightarrow 1$$

т.е. ложна только, когда  $1 \rightarrow 0$

- Если скобка  $(\neg x_1 \vee y_1) = 0$ , то для скобки  $(\neg x_2 \wedge y_2)$  возможны варианты **0** или **1**.
  - Если скобка  $(\neg x_1 \vee y_1) = 1$ , то для скобки  $(\neg x_2 \wedge y_2)$  возможен один вариант — **1**.
  - В скобках дизъюнкция ( $\vee$ ) истинна, когда:  $0 \vee 1, 1 \vee 0, 1 \vee 1$ ; ложна, когда:  $0 \vee 0$ .
  - В скобках конъюнкция истинна, когда  $1 \wedge 1$  и ложна во всех остальных случаях.
- Построим таблицу истинности для первого уравнения, учтем все возможные варианты. Выделим в ней те строки, которые возвращают ложь: т.е. где первая скобка  $(\neg x_1 \vee y_1)$  возвратит **1**, а вторая  $(\neg x_2 \wedge y_2) = 0$ :

x1	y1	x2	y2	
0	0	0	0	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (1 \wedge 0) = 0$
0	0	0	1	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (1 \wedge 1) = 1$
0	0	1	0	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (0 \wedge 0) = 0$
0	0	1	1	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (0 \wedge 1) = 0$
0	1	0	0	...
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

- Поскольку уравнения однотипные и отличаются только сдвигом номеров переменных на единицу, то будем использовать метод отображения. Для первого уравнения  $x_1$  и  $y_1$  будут обозначаться  $x_i$  и  $y_i$ , а  $x_2$  и  $y_2$  будут обозначаться  $x_{i+1}$  и  $y_{i+1}$ .





- Теперь найдем общее количество решений, подставляя в отображении соответствующие  $x$  и  $y$ , и, учитывая предыдущие значения:

	$x_1y_1$	$x_2y_2$	$x_3y_3$	$x_4y_4$	$x_5y_5$	$x_6y_6$	$x_7y_7$
00	1	1	1	1	1	1	1
01	1	$4(1+1+1+1)$	$7(1+1+1+4)$	10	13	16	19
10	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1

([https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1\\_11-8.png](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1_11-8.png))

- В итоге получаем:

$$1 + 19 + 1 + 1 = 22$$

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_7, y_1, y_2, \dots, y_7$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(y_1 \rightarrow (y_2 \wedge x_1)) \wedge (x_1 \rightarrow x_2) = 1$$

$$(y_2 \rightarrow (y_3 \wedge x_2)) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) = 1$$

...

$$(y_6 \rightarrow (y_7 \wedge x_6)) \wedge (x_6 \rightarrow x_7) = 1$$

$$y_7 \rightarrow x_7 = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_7, y_1, y_2, \dots, y_7$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

- Поскольку все равенства однотипны (кроме последнего), отличаются только сдвигом номеров переменных на единицу, то для решения будем использовать метод отображения: когда, найдя результат для первого равенства, необходимо применить тот же принцип с последующими равенствами, учитывая полученные результаты для каждого из них.
- Рассмотрим первое равенство. В нем внешняя операция — это конъюнкция, результат которой должна быть истина. Конъюнкция истинна если:

$$1 \rightarrow 1$$

т.е.:

$$(y_1 \rightarrow (y_2 \wedge x_1)) \wedge (x_1 \rightarrow x_2) = 1$$

- Найдем случаи, когда равенство будет ложным (чтобы в дальнейшем исключить эти случаи):

$$(y_1 \rightarrow (y_2 \wedge x_1)) \wedge (x_1 \rightarrow x_2) = 0$$

- Внутри первой «большой» скобки находится операция импликации. Которая ложна:

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

т.е. случаи:

$$y1=1 \rightarrow (y2=0 \wedge x1=1)$$

$$y1=1 \rightarrow (y2=1 \wedge x1=0)$$

$$y1=1 \rightarrow (y2=0 \wedge x1=0)$$

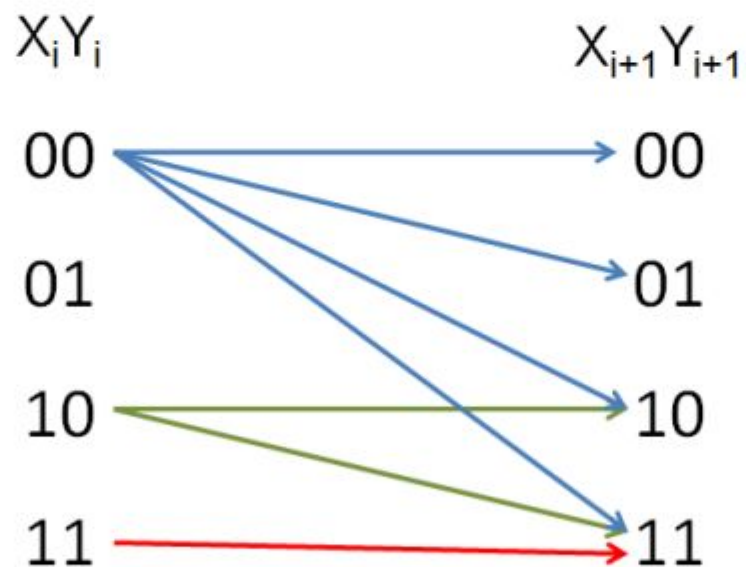
- Таким же образом проанализируем вторую скобку. В ней импликация вернет ложь:

$$(x1=1 \rightarrow x2=0)$$

- Построим таблицу истинности для первого уравнения, учтем все возможные варианты. Поскольку переменных 4, то строк будет  $2^4 =$  **16**. Выделим те строки, которые возвращают ложь:

x1	y1	x2	y2	
0	0	0	0	$(0 \rightarrow (0 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 1$
0	0	0	1	$(0 \rightarrow (1 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 1$
0	0	1	0	$(0 \rightarrow (0 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 1) = 1$
0	0	1	1	$(0 \rightarrow (1 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 1) = 1$
0	1	0	0	$(1 \rightarrow (0 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 0$
0	1	0	1	$(1 \rightarrow (1 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 0$
0	1	1	0	...
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

- Теперь переходим к методу отображения. Для первого уравнения  $x_1$  и  $y_1$  обозначим  $x_i$  и  $y_i$ , а  $x_2$  и  $y_2$  обозначим  $x_{i+1}$  и  $y_{i+1}$ . Стрелками обозначим значения только тех строк таблицы истинности, которые возвращают **1**.



- Найдем общее количество решений, подставляя в таблицу из отображения соответствующие значения  $x$  и  $y$ , и, учитывая предыдущие значения:

	$x_1y_1$	$x_2y_2$	$x_3y_3$	$x_4y_4$	$x_5y_5$	$x_6y_6$	$x_7y_7$
00	1	1	1	1	1	1	1
01	0	1	1	1	1	1	1
10	1	$2(1+1)$	$3(2+1)$	4	5	6	7
11	1	$3(1+1+1)$	$6(1+2+3)$	10	15	21	28

- Теперь вернемся к последнему равенству. По условию оно должно быть истинным. Равенство вернет ложь только в одном случае:

$$y_7=1 \rightarrow x_7=0 = 0$$

- Найдем соответствующие переменные в нашей таблице:

	$x_1y_1$	$x_2y_2$	$x_3y_3$	$x_4y_4$	$x_5y_5$	$x_6y_6$	$x_7y_7$
00	1	1	1	1	1	1	1
01	0	1	1	1	1	1	1
10	1	$2(1+1)$	$3(2+1)$	4	5	6	7
11	1	$3(1+1+1)$	$6(1+2+3)$	10	15	21	28

- Рассчитаем сумму по последнему столбцу, не учитывая строку, возвращающую ложь:

$$1 + 7 + 28 = 36$$