Решение систем логических уравнений

Будем придерживаться следующих обозначений:

дизъюнкция (+), конъюнкция (·),

импликация (→), эквивалентность (≡), отрицание (¬).

На рисунках темный кружок обозначает 1, а светлый кружок – 0

F_1 – количество решений при X_1, равном 1
F_0 – количество решений при X_1, равном 0
N – число переменных в системе уравнений.

$F(N) = F_1(N) + F_0(N)$ – общее число решений.

Построение дерева решений

Задание 1

Найти количество решений системы уравнений

$X_1+X_2 \cdot X_3=1$

$X_2+X_3 \cdot X_4=1$

. . . . .

$X_7+X_8 \cdot X_9=1$

Вначале полагаем $X1 = 1$. Тогда для первого уравнения значения $X2$ и $X3$ могут быть любыми. Таким образом, дерево построено до третьего уровня. Далее с учетом $X2$ и $X3$ выбираем $X4$. После этого алгоритм повторяется для каждой тройки переменных (см. рис. 1).

Начиная с четвертого уровня можно заметить, что $F1(4)=F1(3)+F1(1)$, $F1(5)=F1(4)+F1(2)$. Таким образом, получаем

$$F1(N) = F1(N-1) + F1(N-3) \qquad (1)$$

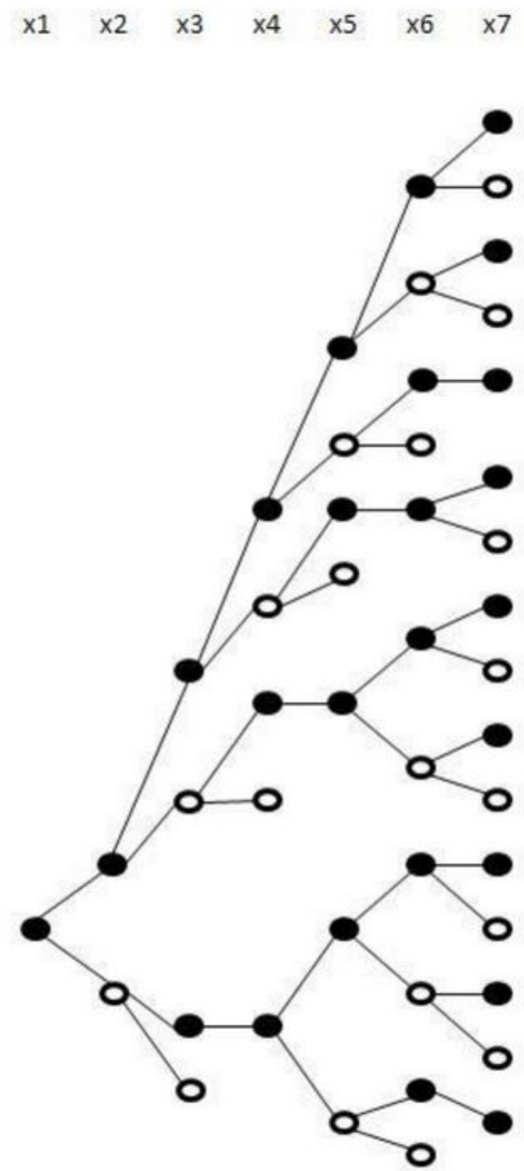


Рис. 1. Задание 1

Из уравнения (1) получаем,

что $F1(8) = 16 + 7 = 23$, $F1(9) = 23 + 11 = 34$.

Для того чтобы построить дерево из нуля, можно воспользоваться нижней ветвью из Рис. 1.

Легко видеть, что она повторяет основное дерево, но со сдвигом вправо на 2. То есть $F0(9) = F1(7) = 16$.

Итого, $F(9) = F1(9) + F0(9) = 34 + 16 = 50$.

Задание 2. Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$$
$$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$$
$$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$$

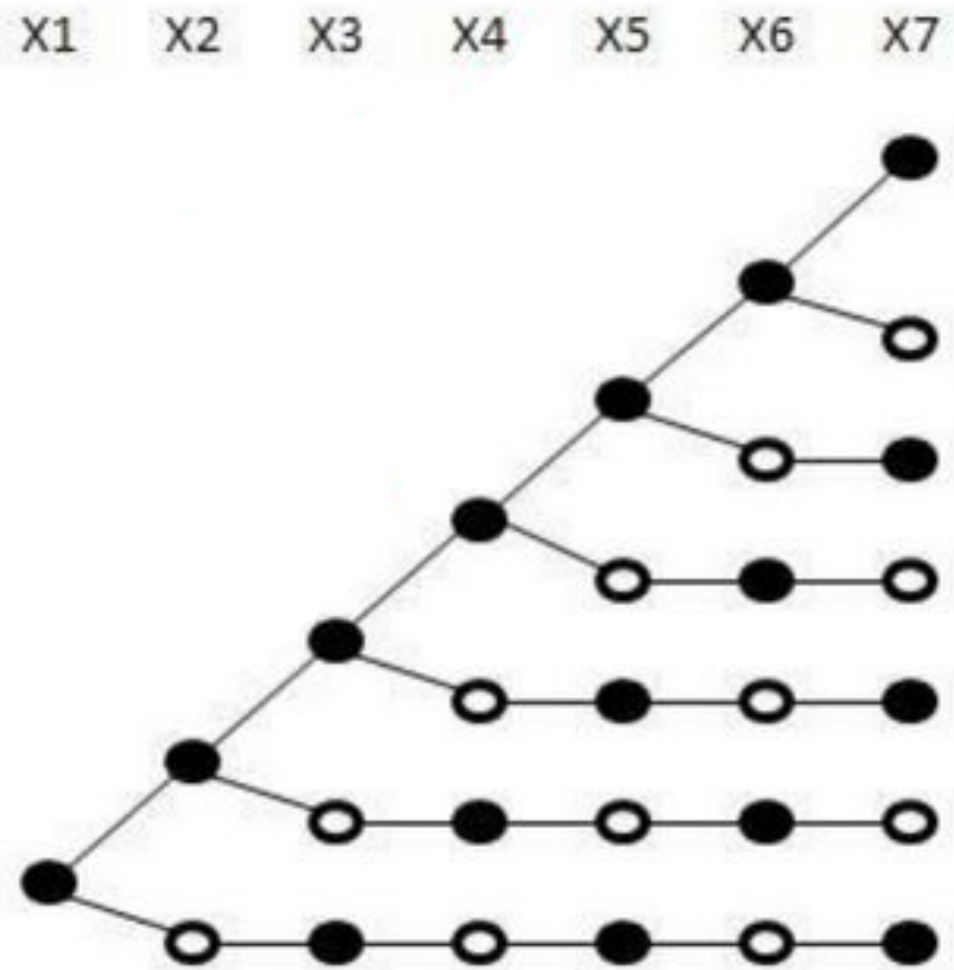


Рис. 2. Задание 2

Для получения числа решений этого задания можно было не строить дерево решений полностью (см. рис. 2), так как очевидно, что F1(N) = N. Аналогично, F0(N) = N. Итого F(7) = 7 + 7 = 14.

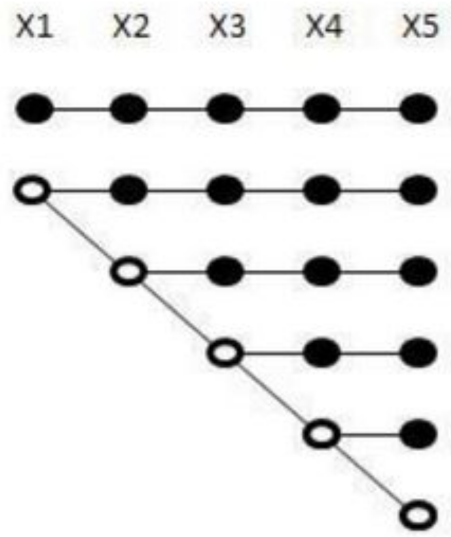
Задание 3. Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \to X_2) \cdot (X_2 \to X_3) \cdot (X_3 \to X_4) \cdot (X_4 \to X_5) = 1$$

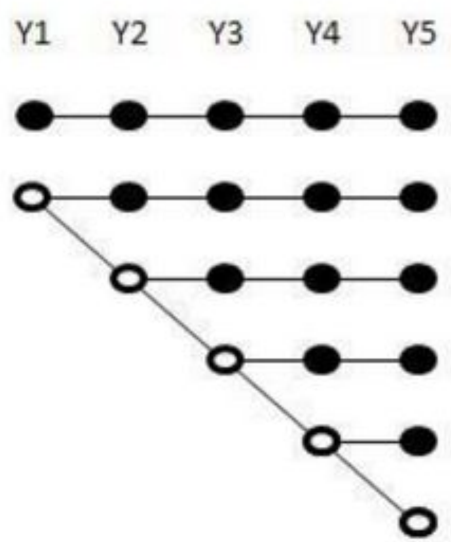
$$(Y_1 \to Y_2) \cdot (Y_2 \to Y_3) \cdot (Y_3 \to Y_4) \cdot (Y_4 \to Y_5) = 1$$

$$(Y_1 \to X_1) \cdot (Y_2 \to X_2) \cdot (Y_3 \to X_3) \cdot (Y_4 \to X_4) \cdot (Y_5 \to X_5) = 1$$

На рисунке 3 показаны деревья решений для X и Y и приведены соответствующие таблицы истинности.



X1	X2	X3	X4	X5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0



Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Рис. 3. Задание 3

Из первых двух уравнений, поскольку X и Y независимы, следует, что общее число решений $F(5) = 6 * 6 = 36$.

Для того чтобы учесть третье уравнение, нужно для каждой переменной Y подсчитать какое число наборов из таблицы X не удовлетворяет уравнению. Импликация $Yi \to Xi = 0$, если $Yi = 1$, а $Xi = 0$. То есть для $Y1 = 1$ третьему уравнению не удовлетворяют все строки из таблицы X, где $X1 = 0$. Число таких строк равно пяти. Для $Y2 = 1$ таких строк – 4 и т. д. Общее число строк, которые не удовлетворяют третьему уравнению равно $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Таким образом, общее число допустимых решений равно $36 – 15 = 21$.

Задание 4. Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$$
$$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$$
$$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$$
$$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$$
$$(X_5 \equiv X_6) = 0$$

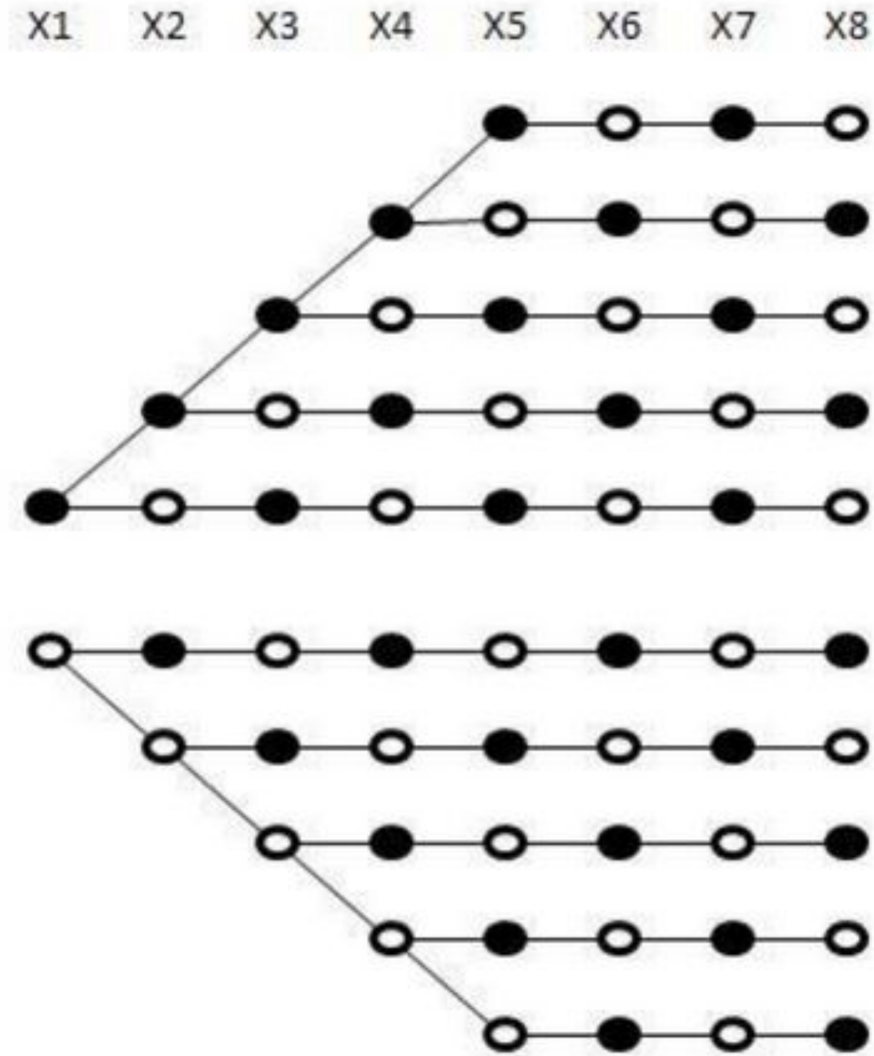


Рис. 4. Задание 4

Для данного примера сложно определить конечную формулу F(N), проще построить дерево решений до конца (или хотя бы до X6). На рисунке 4 показано построенное дерево решений.

В результате получаем

F(8) = F1(8) + F0(8) = 5 + 5 = 10

Задание 5. Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$$
$$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$$
$$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$$
$$(X_6 \equiv X_8) = 1$$

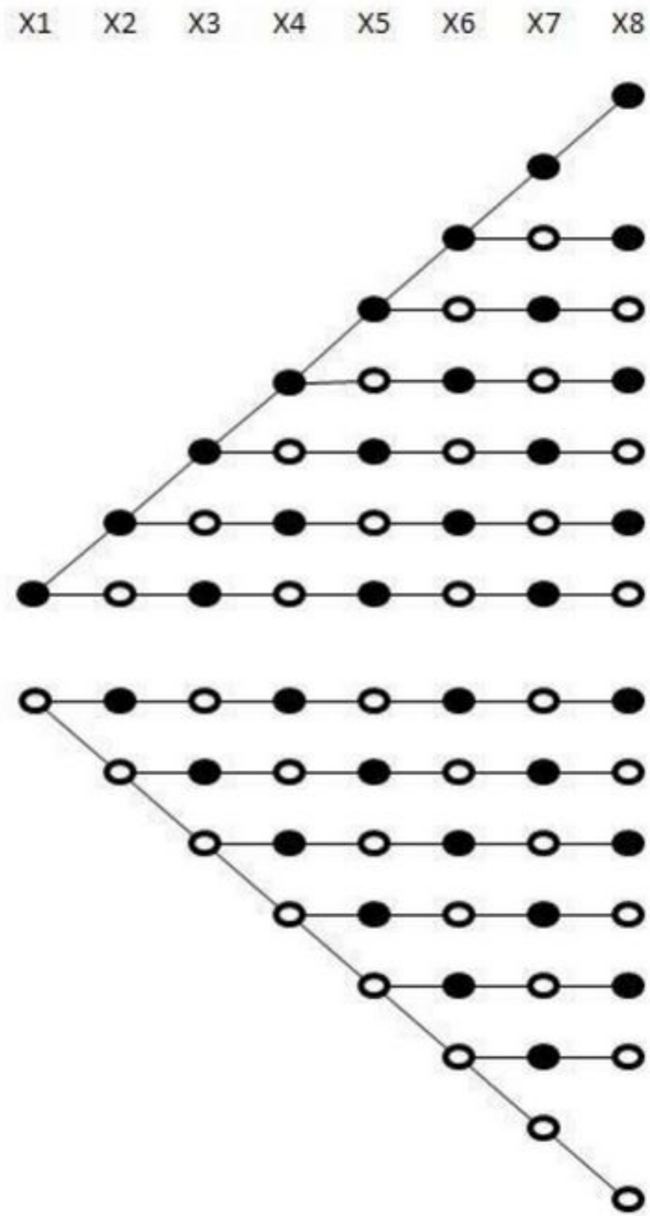


Рис. 5. Задание 5

Для этого примера, так же как и для предыдущего, проще построить дерево решений до конца (рис. 5).

В результате получаем

$F(8) = F1(8) + F0(8) = 7 + 7 = 14$

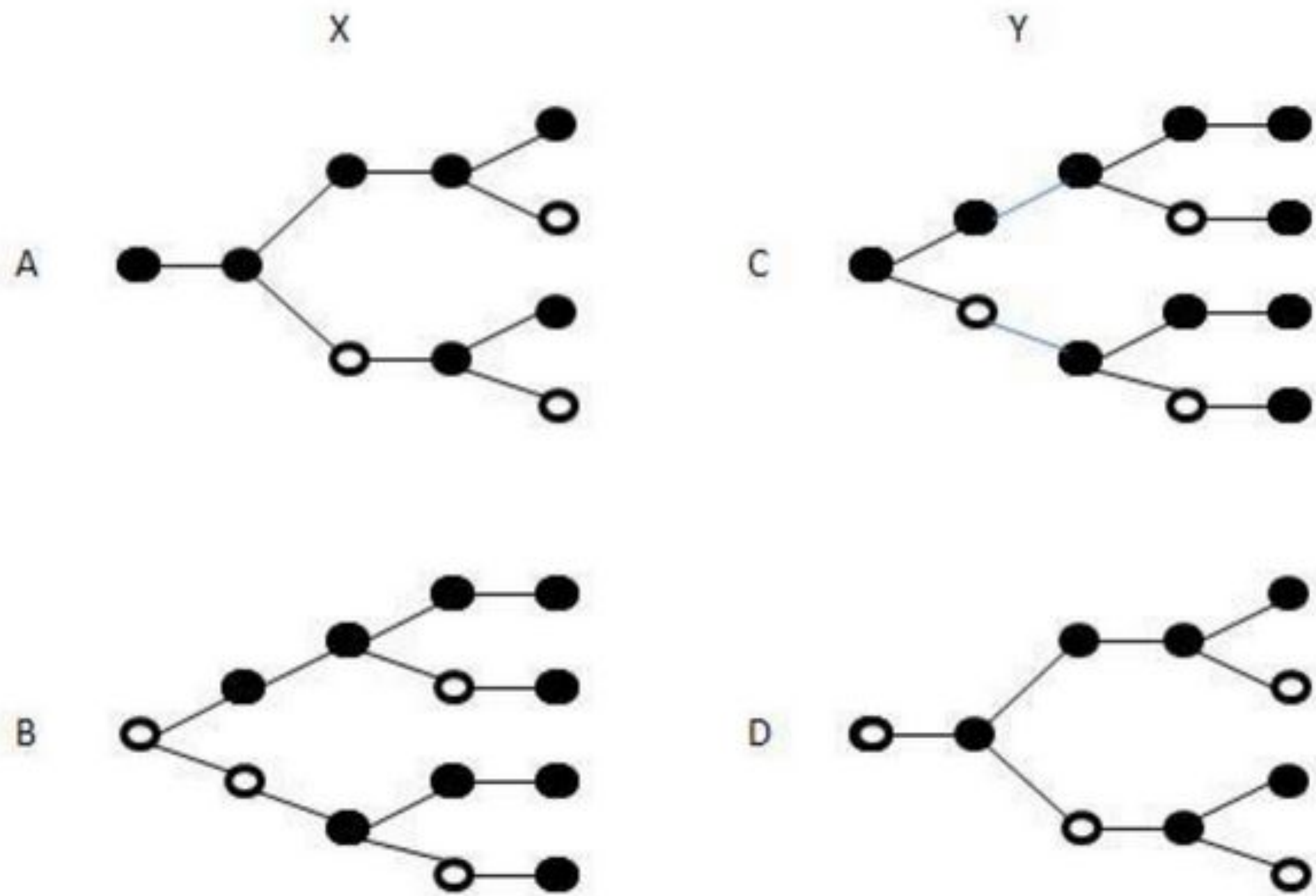
Задание 9. Нужно найти количество решений системы

$$(X_1 \to X_2) \cdot (\neg X_1 \to X_3) \cdot (X_1 \to X_4) \cdot (\neg X_1 \to X_5) = 1$$

$$(\neg Y_1 \to Y_2) \cdot (Y_1 \to Y_3) \cdot (\neg Y_1 \to Y_4) \cdot (Y_1 \to Y_5) = 1$$

$$(\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 1$$

Для X и Y имеем следующие деревья решений



С учетом третьего уравнения получаем следующие четыре набора комбинаций:

A – C: 4 * 4 = 16 $((\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (0 + 1) \cdot (0 + 1) = 1)$

B – C: 4 * 4 = 16 $((\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1)$

A – D: = 0 $(0 + 0) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 0)$

B – D: 4 * 4 = 16 $(1 + 0) \cdot (1 + Y_5) = 1)$

Всего получается 48 наборов решений.

Метод битовых цепочек (битовых масок)

Побитовая маска (битовая маска) — метод, который можно использовать:

1. Если при рассмотрении одного из уравнений в нем не обнаружены пересекающиеся переменные внешней операции (случай когда одна из переменных первого операнда встречается во втором операнде уже не подходит).

2. Если структура всех уравнения аналогична, и меняются лишь неизвестные.

3. Если какие-либо операнды внешней операции первого уравнения повторяются во втором, второго — в третьем, и т.д.

1. *Сколько существует различных наборов значений логических переменных **x1**, **x2**, … **x6**, **y1**, **y2**, … **y6**, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?*

$(\neg(x1 \lor y1)) \equiv (x2 \lor y2)$
$(\neg(x2 \lor y2)) \equiv (x3 \lor y3)$
…
$(\neg(x5 \lor y5)) \equiv (x6 \lor y6)$

- Поскольку в скобках одинаковые действия, и переменные повторяются, то введем обозначения:

```
¬a ≡ b
¬b ≡ c
¬c ≡ d
¬d ≡ e
¬e ≡ f
```

- Вместо отрицания первого операнда просто будем использовать «не эквивалентно»:

```
a ≠ b
b ≠ c
c ≠ d
d ≠ e
e ≠ f
```

- Вспомним, как выглядит таблица истинности для эквивалентности:

x1	x2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Рассмотрим, в каких случаях выражения будут возвращать ложь. Каждое из пяти выражений будет ложно, когда: либо оба операнда истинны, либо оба операнда ложны (операция равносильность = истине: при 00 или 11).

- Составим битовую маску для наших уравнений. В цепочке значений от **a** до **f** не может быть двух единиц или двух нулей, идущих подряд, так как в этом случае система будет ложна (к примеру, **a ≠ b**, если **0 ≠ 0** — это ложь). Таким образом, для данных уравнений существует всего две цепочки решений:

```
  цеп.1  цеп.2
a   0      1
b   1      0
c   0      1
d   1      0
e   0      1
f   1      0
```

- Теперь вспомним о заменах: каждая из переменных от **a** до **f** представляет собой скобку, внутри которой две переменные, связанные дизъюнкцией. Дизъюнкция двух переменных истинна в трех случаях (01, 10, 11), а ложна — в одном (00). Т.е., к примеру:

```
x1 ∨ y1 = 1 тогда, когда: либо 0 ∨ 1, либо 1 ∨ 0, либо 1 ∨ 1

x1 ∨ y1 = 0 тогда и только тогда, когда 0 ∨ 0
```

- Это говорит о том, что на каждую **единицу** в цепочке приходится **три** варианта значений, а на каждый **ноль** — **один**. Т.о. получаем:

  - для первой цепочки: $3^3 * 1^3$ = **27 наборов значений,**
  - и для второй: $3^3 * 1^3$ = **27 наборов значений**

- Итого наборов:

  27 * 2 = **54**

Результат: 54

Сколько существует различных наборов значений логических переменных **x1**, **x2**, … **x9**, **y1**, **y2**, … **y9**, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(\neg(x1 \land y1)) \equiv (x2 \land y2)$
$(\neg(x2 \land y2)) \equiv (x3 \land y3)$
…
$(\neg(x8 \land y8)) \equiv (x9 \land y9)$

Ответ: 324

Сколько существует различных наборов значений логических переменных **x1**, **x2**, … **x8**, **y1**, **y2**, … **y8**, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$\neg(((x1 \land y1) \equiv (x3 \land y3)) \to (x2 \land y2))$
$\neg(((x2 \land y2) \equiv (x4 \land y4)) \to \neg(x3 \land y3))$
$\neg(((x3 \land y3) \equiv (x5 \land y5)) \to (x4 \land y4))$
$\neg(((x4 \land y4) \equiv (x6 \land y6)) \to \neg(x5 \land y5))$
$\neg(((x5 \land y5) \equiv (x7 \land y7)) \to (x6 \land y6))$
$\neg(((x6 \land y6) \equiv (x8 \land y8)) \to \neg(x7 \land y7))$

Ответ: 81

Метод отображений

Метод отображения можно использовать:

1. Если структура всех уравнения аналогична, и меняются лишь неизвестные.

2. Если какие-либо операнды внешней операции первого уравнения повторяются во втором, второго — в третьем, и т.д.

4. *Сколько существует различных наборов значений логических переменных **x1**, **x2**, … **x7**, **y1**, **y2**, … **y7**, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?*

$(\neg x1 \lor y1) \rightarrow (\neg x2 \land y2) = 1$
$(\neg x2 \lor y2) \rightarrow (\neg x3 \land y3) = 1$
…
$(\neg x6 \lor y6) \rightarrow (\neg x7 \land y7) = 1$

- Внешняя операция в отдельно взятом уравнении — это импликация, результат которой должна быть истина. Импликация истинна если:

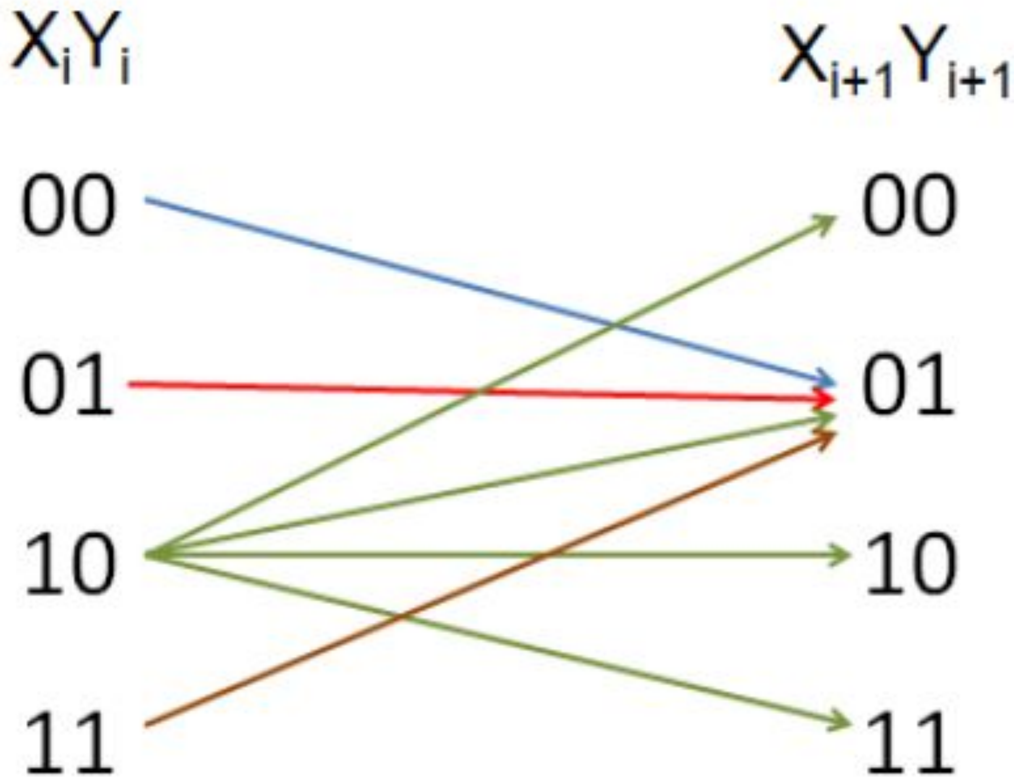
```
0 -> 0
0 -> 1
1 -> 1

т.е. ложна только, когда 1 -> 0
```

  - Если скобка $(\neg x1 \lor y1)$ = **0**, то для скобки $(\neg x2 \land y2)$ возможны варианты **0** или **1**.
  - Если скобка $(\neg x1 \lor y1)$ = **1**, то для скобки $(\neg x2 \land y2)$ возможен один вариант — **1**.
  - В скобках дизъюнкция (∨) истинна, когда: 0 ∨ 1, 1 ∨ 0, 1 ∨ 1; ложна, когда: 0 ∨ 0.
  - В скобках конъюнкция истинна, когда 1 ∧ 1 и ложна во всех остальных случаях.
- Построим таблицу истинности для первого уравнения, учтем все возможные варианты. Выделим в ней те строки, которые возвращают ложь: т.е. где первая скобка **(¬x1 ∨ y1)** возвратит **1**, а вторая **(¬x2 ∧ y2)** — **0**:

x1	y1	x2	y2	
0	0	0	0	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (1 \wedge 0) = 0$
0	0	0	1	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (1 \wedge 1) = 1$
0	0	1	0	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (0 \wedge 0) = 0$
0	0	1	1	$(\neg x1 \vee y1) \rightarrow (\neg x2 \wedge y2) = (1 \vee 0) \rightarrow (0 \wedge 1) = 0$
0	1	0	0	...
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

- Поскольку уравнения однотипные и отличаются только сдвигом номеров переменных на единицу, то будем использовать метод отображения. Для первого уравнения **x1** и **y1** будут обозначаться $\mathbf{x_i}$ и $\mathbf{y_i}$, а **x2** и **y2** будут обозначаться $\mathbf{x_{i+1}}$ и $\mathbf{y_{i+1}}$.



- Теперь найдем общее количество решений, подставляя в отображении соответствующие **x** и **y**, и, учитывая предыдущие значения:

	x1y1	x2y2	x3y3	x4y4	x5y5	x6y6	x7y7
00	1	1	1	1	1	1	1
01	1	4(1+1+1+1)	7 (1+1+1+4)	10	13	16	19
10	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1

(https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1_11-8.png)

- В итоге получаем:

```
1 + 19 + 1 + 1 = 22
```

Сколько существует различных наборов значений логических переменных ***x1, x2, … x7, y1, y2, … y7****, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?*

```
(y1 → (y2 ∧ x1)) ∧ (x1 → x2) = 1
(y2 → (y3 ∧ x2)) ∧ (x2 → x3) = 1
…
(y6 → (y7 ∧ x6)) ∧ (x6 → x7) = 1
y7 → x7 = 1
```

В ответе <u>не нужно</u> перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, … x7, y1, y2, … y7, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

- Поскольку все равенства однотипны (кроме последнего), отличаются только сдвигом номеров переменных на единицу, то для решения будем использовать метод отображения: когда, найдя результат для первого равенства, необходимо применить тот же принцип с последующими равенствами, учитывая полученные результаты для каждого из них.

- Рассмотрим первое равенство. В нем внешняя операция — это конъюнкция, результат которой должна быть истина. Конъюнкция истинна если:

```
1 -> 1
т.е.:
(y1 → (y2 ∧ x1)) ∧ (x1 → x2) = 1
     1                1
```

- Найдем случаи, когда равенство будет ложным (чтобы в дальнейшем исключить эти случаи):

```
(y1 → (y2 ∧ x1)) ∧ (x1 → x2) = 0
```

- Внутри первой «большой» скобки находится операция импликации. Которая ложна:

```
1 -> 0 = 0
т.е. случаи:
y1=1 → (y2=0 ∧ x1=1)
y1=1 → (y2=1 ∧ x1=0)
y1=1 → (y2=0 ∧ x1=0)
```

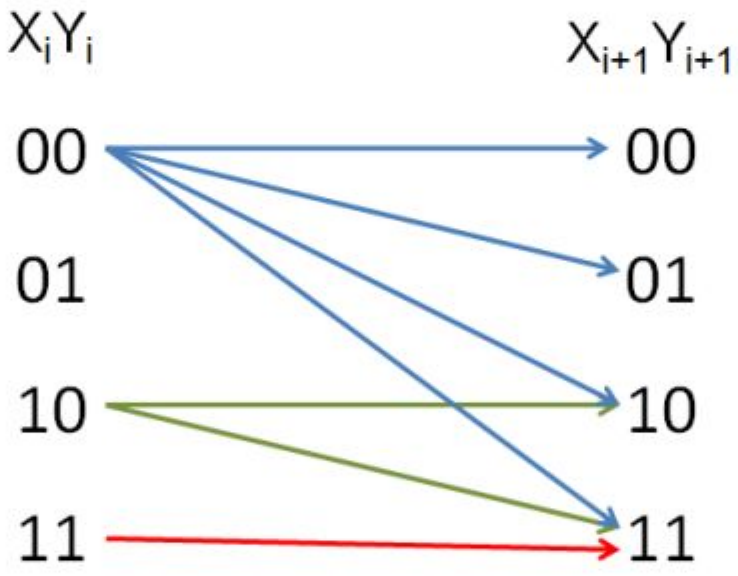
- Таким же образом проанализируем вторую скобку. В ней импликация вернет ложь:

```
(x1=1 → x2=0)
```

- Построим таблицу истинности для первого уравнения, учтем все возможные варианты. Поскольку переменных 4, то строк будет 2^4 = **16**. Выделим те строки, которые возвращают ложь:

x1	y1	x2	y2	
0	0	0	0	$(0 \rightarrow (0 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 1$
0	0	0	1	$(0 \rightarrow (1 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 1$
0	0	1	0	$(0 \rightarrow (0 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 1) = 1$
0	0	1	1	$(0 \rightarrow (1 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 1) = 1$
0	1	0	0	$(1 \rightarrow (0 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 0$
0	1	0	1	$(1 \rightarrow (1 \wedge 0)) \wedge (0 \rightarrow 0) = 0$
0	1	1	0	...
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

- Теперь переходим к методу отображения. Для первого уравнения **x1** и **y1** обозначим $\mathbf{x_i}$ и $\mathbf{y_i}$, а **x2** и **y2** обозначим $\mathbf{x_{i+1}}$ и $\mathbf{y_{i+1}}$. Стрелками обозначим значения только тех строк таблицы истинности, которые возвращают **1**.



- Найдем общее количество решений, подставляя в таблицу из отображения соответствующие значения **x** и **y**, и, учитывая предыдущие значения:

	x1y1	x2y2	x3y3	x4y4	x5y5	x6y6	x7y7
00	1	1	1	1	1	1	1
01	0	1	1	1	1	1	1
10	1	2(1+1)	3(2+1)	4	5	6	7
11	1	3(1+1+1)	6(1+2+3)	10	15	21	28

- Теперь вернемся к последнему равенству. По условию оно должно быть истинным. Равенство вернет ложь только в одном случае:

```
y7=1 → x7=0 = 0
```

- Найдем соответствующие переменные в нашей таблице:

	x1y1	x2y2	x3y3	x4y4	x5y5	x6y6	x7y7
00	1	1	1	1	1	1	1
01	0	1	1	1	1	1	1
10	1	2(1+1)	3(2+1)	4	5	6	7
11	1	3(1+1+1)	6(1+2+3)	10	15	21	28

- Рассчитаем сумму по последнему столбцу, не учитывая строку, возвращающую ложь:

```
1 + 7 + 28 = 36
```