ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПП в ЭЭС

Операторный метод относятся к методам расчета ПП по комплексным значениям.

Сущность операторного метода расчета схем:

На основе преобразования Лапласа,

функция времени $f\,(t)$ заменяется другой функцией

$F\,(p)$ как комплексная переменная $p = c + j\omega$ (p – называется оператором)

Функция $f\,(t)$ называется оригиналом

Функция $F\,(p)$ называется изображением

В основу преобразования Лапласа для ПП положено интегральное преобразование:

Прямое преобразование Лапласа:

$$\boxed{F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt}$$

$$F(p)=\Lambda\left[f(t)\right]$$

$p=c+j\omega$	– комплексная переменная **(оператор)**
ω	– угловая частота
c	– действительная величина комплексного числа, при c = 0, $p = j\omega$
$e^{j\omega t}$	– вращающийся вектор

Обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int\limits_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(p)\, e^{-pt}\, dp$$

или

$$f(t) = \Lambda^{-1}\left[F(p)\right]$$

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
$K = const$	$\frac{K}{p}$
$K \cdot e^{-at}$	$\frac{K}{p+a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$

Операторные уравнения и схемы замещения элементов *R*, *L*, *C*.

1. Активное сопротивление *R*

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$\Lambda\left[u(t)\right] = \Lambda\left[R \cdot i(t)\right] = R \cdot \Lambda\left[i(t)\right]$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

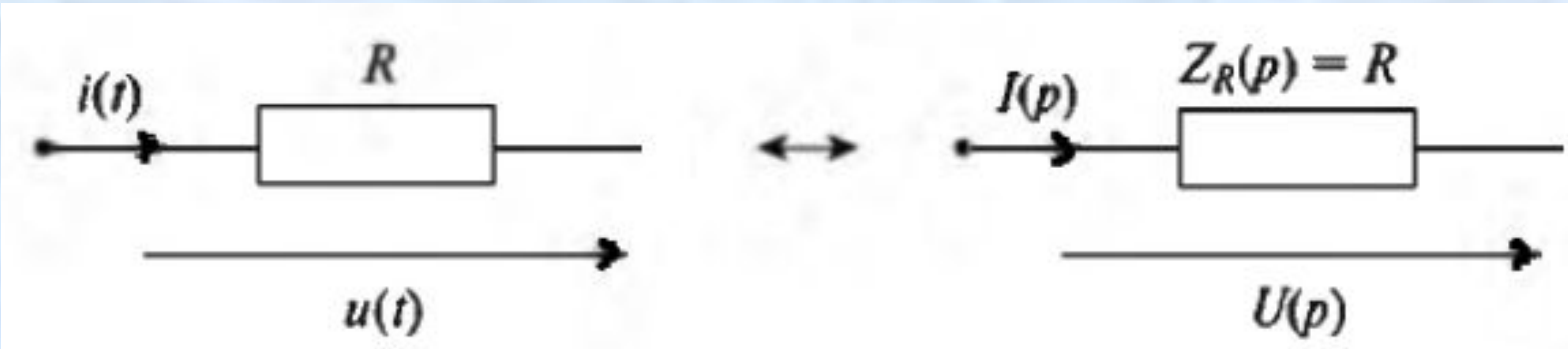
$$U(p) \qquad\qquad\qquad\qquad I(p)$$

операторное уравнение:

$$U(p) = R \cdot I(p)$$

Операторные уравнения и схемы замещения элементов *R*, *L*, *C*.

1. Активное сопротивление *R*



$$u_R(t) = R \cdot i(t) \qquad U_R(p) = R \cdot I(p)$$

Операторные уравнения и схемы замещения элементов *R*, *L*, *C*.

2. Индуктивный элемент **L**:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\Lambda\left[u_L(t)\right] = \Lambda\left[L\frac{di(t)}{dt}\right] = \Lambda\left[L\cdot i'(t)\right]$$

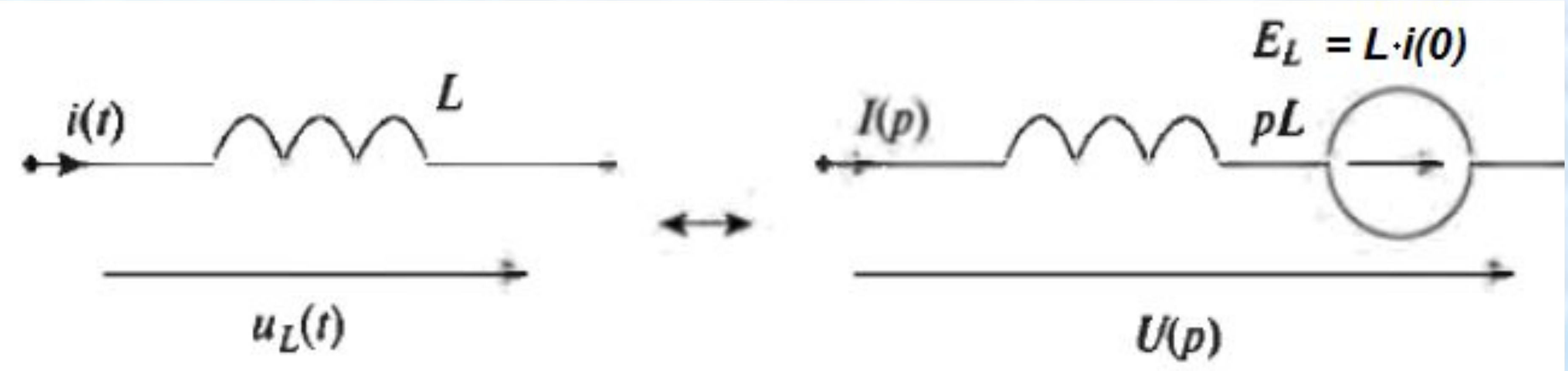
операторное уравнение:

$$U_L(p) = pL\cdot I(p) - E_L$$

$$E_L = Li_L(0)$$

Операторные уравнения и схемы замещения элементов *R*, *L*, *C*.

2. Индуктивный элемент ***L***:



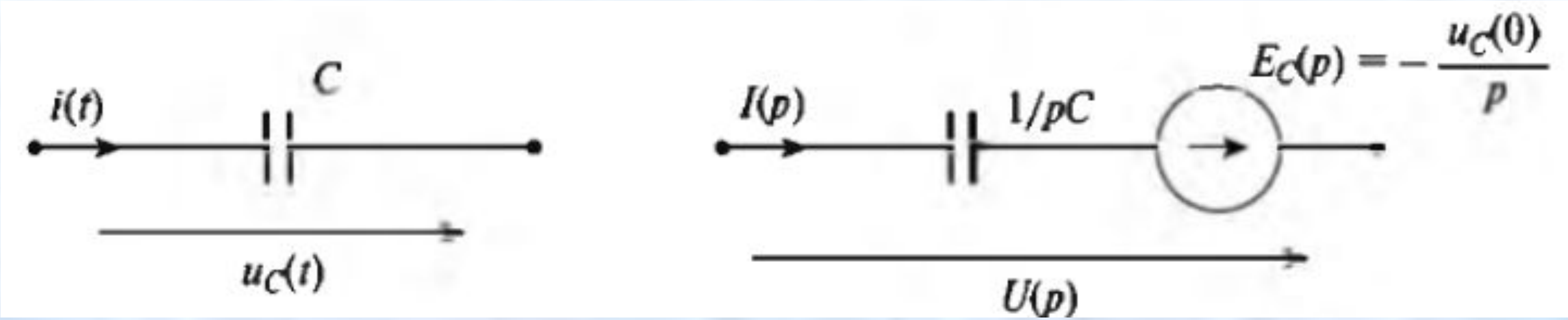
$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$U_L(p) = pL \cdot I(p) - E_L$$

$$E_L = Li_L(0)$$

Операторные уравнения и схемы замещения элементов *R*, *L*, *C*.

3. Емкостной элемент ***C***:



$$u_C(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} - E_C(p)$$

$$E_C(p) = -\frac{u_C(0)}{p}$$

Цепь постоянного тока	Цепь синусоидального тока в комплексной форме	Переходные процессы — операторная форма записи
I	$\dot{I}$	$I(p)$
U	$\dot{U}$	$U(p)$
E	$\dot{E}$	$E(p)$
R	$\underline{Z}$	$Z(p)$
$G=1/R$	$\underline{Y}=1/\underline{Z}$	$Y(p)=1/Z(p)$
$I=U/R$	$\dot{I}=\dot{U}/\underline{Z}$	$I(p)=U(p)/Z(P)$ *
$\sum_{k=1}^{K} I_k=0$	$\sum_{k=1}^{K} \dot{I}_k=0$	$\sum_{k=1}^{K} I_k(p)=0$
$\sum_{k=1}^{m} U_k=\sum_{k=1}^{n} E_k$	$\sum_{k=1}^{m} \dot{U}_k=\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k$	$\sum_{k=1}^{m} U_k(p)=\sum_{k=1}^{n} E_k(p)$ *

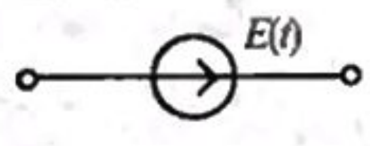
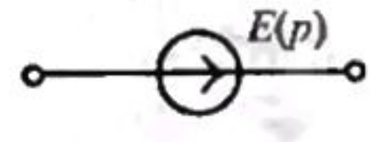
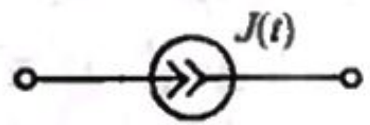
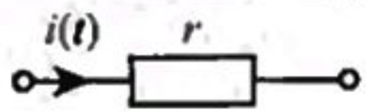
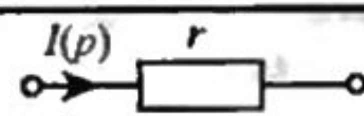
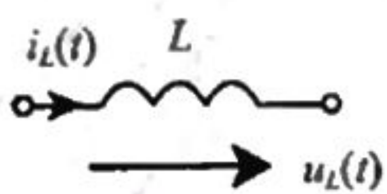
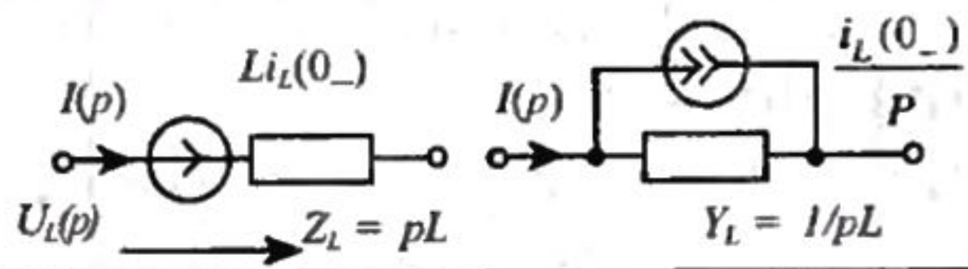
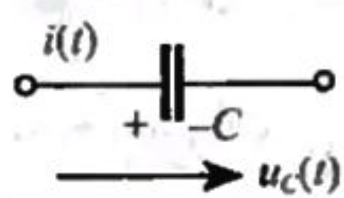
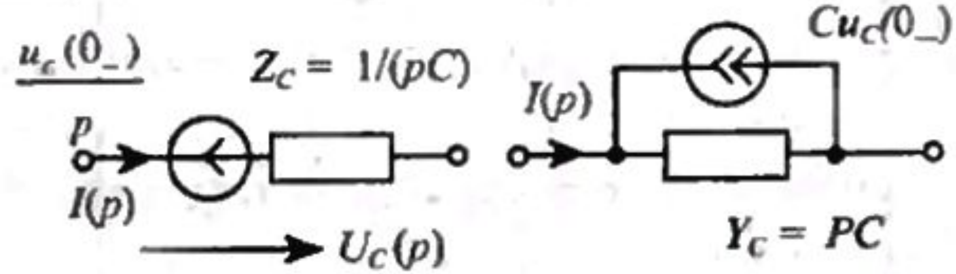
Алгоритм расчета цепей операторным методом состоит из трех этапов:

1 **– составление операторной схемы замещения (после коммутации)**

2 **– расчет операторной схемы замещения**

3 **– определение оригинала цепи по его операторному изображению**

Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент цепи	Оригинальная схема	Операторная схема
Источник напряжения		
Источник тока		
Сопротивление		
Индуктивность		
Емкость		

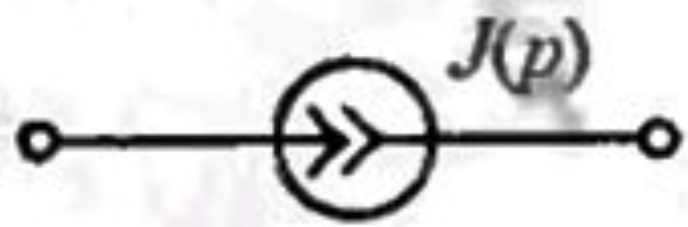
Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент цепи	Оригинальная схема	Операторная схема
Источник напряжения		

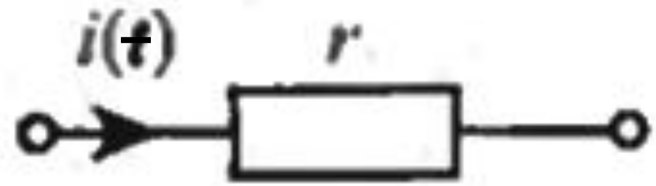
Операторные схемы замещения элементов цепи

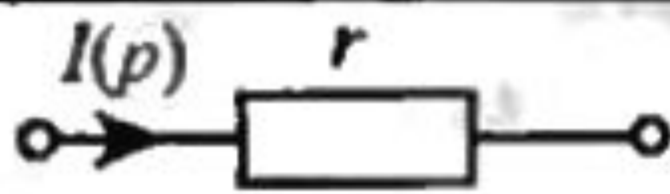
Элемент цепи	Оригинальная схема
Источник тока	

Операторная схема

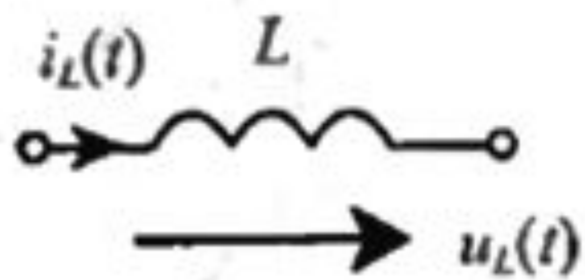


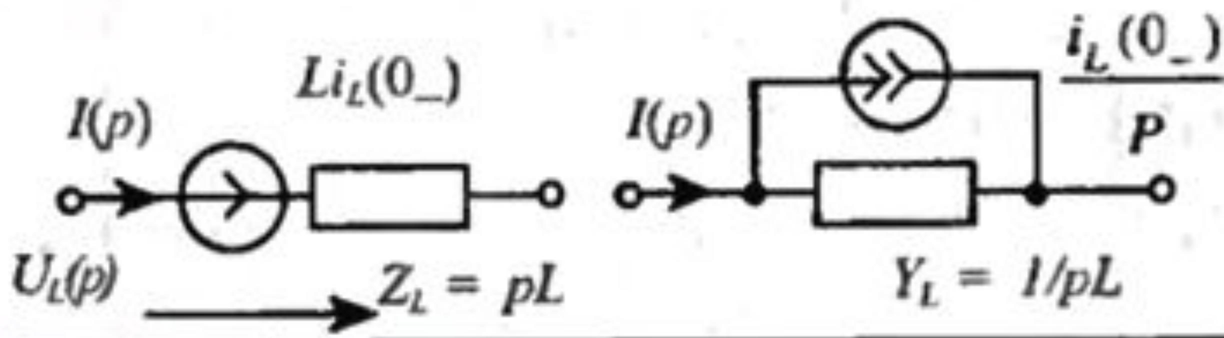
Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент цепи	Оригинальная схема
Сопротивление	

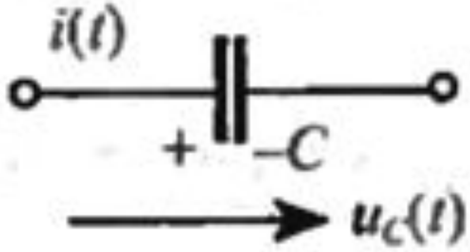
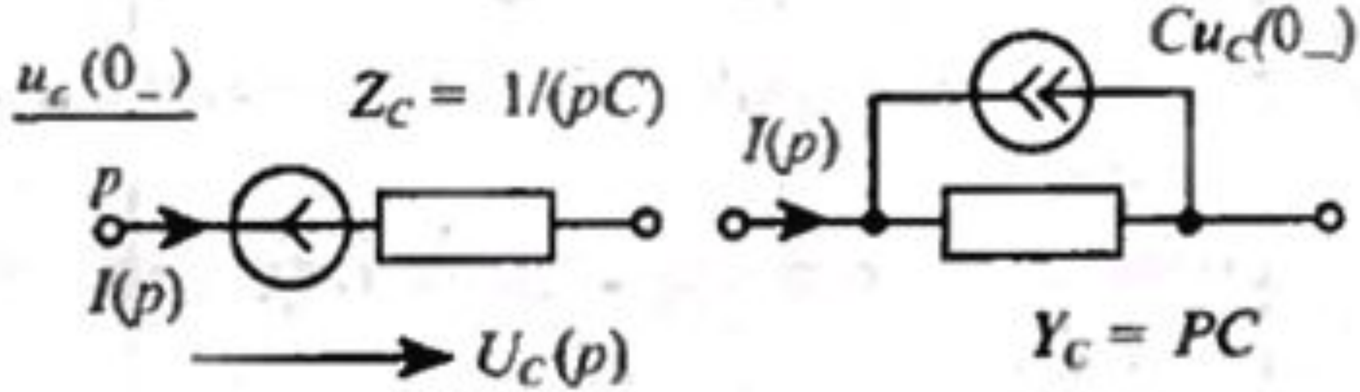
Операторная схема


Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент цепи	Оригинальная схема
Индуктивность	

Операторная схема


Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент цепи	Оригинальная схема	Операторная схема
Емкость		

Функции времени и их операторные изображения

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\, dt$

Функции времени и их операторные изображения

№	Функция времени $f(t)$	Изображение по Лапласу $F(p)$
1	αt	a/p^2
2	$e^{-\alpha t}$	$1/(p + a)$
3	$1 - e^{-\alpha t}$	$a/[p(p + a)]$
4	$\sin(\omega t + \psi)$	$(p\sin\psi + \omega\cos\psi)/(p^2 + \omega^2)$
5	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\omega/[(p + a)^2 + \omega^2]$
6	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$(p + a)/[(p + a)^2 + \omega^2]$
7	$te^{-\alpha t}$	$1/(p + a)^2$

Функции времени и их операторные изображения

№	Функция времени $f(t)$	Изображение по Лапласу $F(p)$
8	$t\sin\omega t$	$2\omega p/(p^2 + \omega^2)^2$
9	$t\cos\omega t$	$(p^2 - \omega^2)/(p^2 + \omega^2)^2$
10	$f(t)\sin\omega t$	$[F(p - j\omega) - F(p + j\omega)]/2$
11	$f(t)\cos\omega t$	$[F(p - j\omega) - F(p + j\omega)]/2$
12	$t^n/n!$	$p^{-(n+1)}$
13	$1(t)$	$1/p$

Основное достоинство метода:

решение системы <u>дифференциальных уравнений сводится к решению системы алгебраических уравнений</u>.

Операторный метод позволяет свести

математическую операцию <u>дифференцирования к умножению, а математическую операцию интегрирования – к делению.</u>

Таблицы операторных соответствий можно найти в справочниках по математике, **например:**

Если операторное изображение

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)} - \textit{дробно} - \textit{рацион. функция}$$

то оригинал f (t) можно представить так:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t}$$

Некоторые свойства изображений:

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

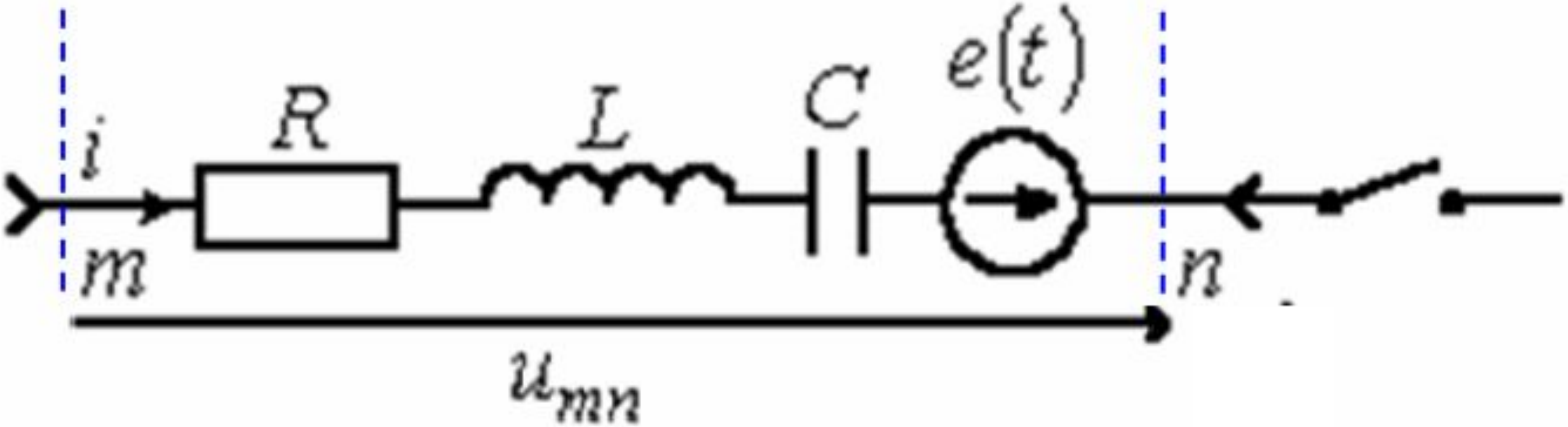
$$\sum_{\kappa=1}^{n} f_\kappa(t) \doteqdot \sum_{\kappa=1}^{n} F_\kappa(p).$$

2. При умножении оригинала на коэффициент на тот же коэффициент умножается изображение:

$$Af(t) \doteqdot AF(p).$$

Закон Ома в операторной форме:

Пусть имеем некоторую ветвь $m-n$,



Для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{mn}(t) = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) - e(t)$$

Закон Ома в операторной форме:

Для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{mn}(t)=iR+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt+u_C(0)-e(t)$$

Тогда на основании приведенных соотношений получим:

$$U_{mn}(p)=I(p)\left(R+Lp+\frac{1}{Cp}\right)-Li(0)+\frac{u_C(0)}{p}-E(p)$$

$$I(p)=\frac{U_{mn}(p)+Li(0)-\frac{u_C(0)}{p}+E(p)}{Z(p)}$$

Закон Ома в операторной форме:

$$I(p)=\frac{U_{mn}(p)+Li(0)-\dfrac{u_C(0)}{p}+E(p)}{Z(p)}$$

$$Z(p)=R+Lp+\frac{1}{Cp}$$

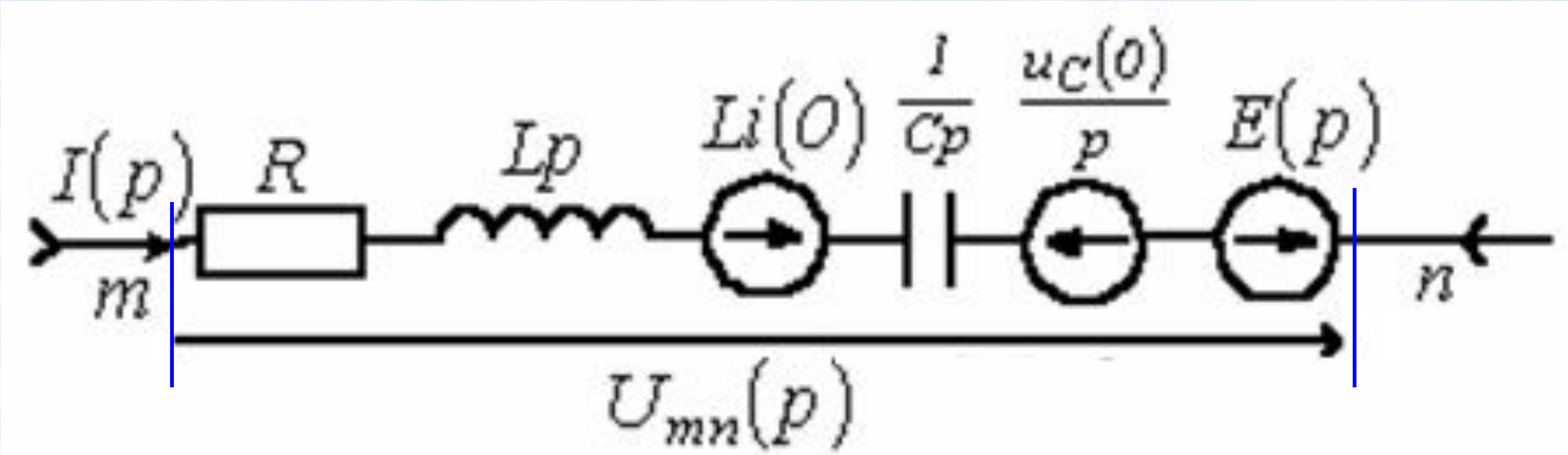
– операторное сопротивление

Примечание:

$Z(p)$ соответствует комплексному сопротивлению $\underline{Z}(j\omega)$

Закон Ома в операторной форме:

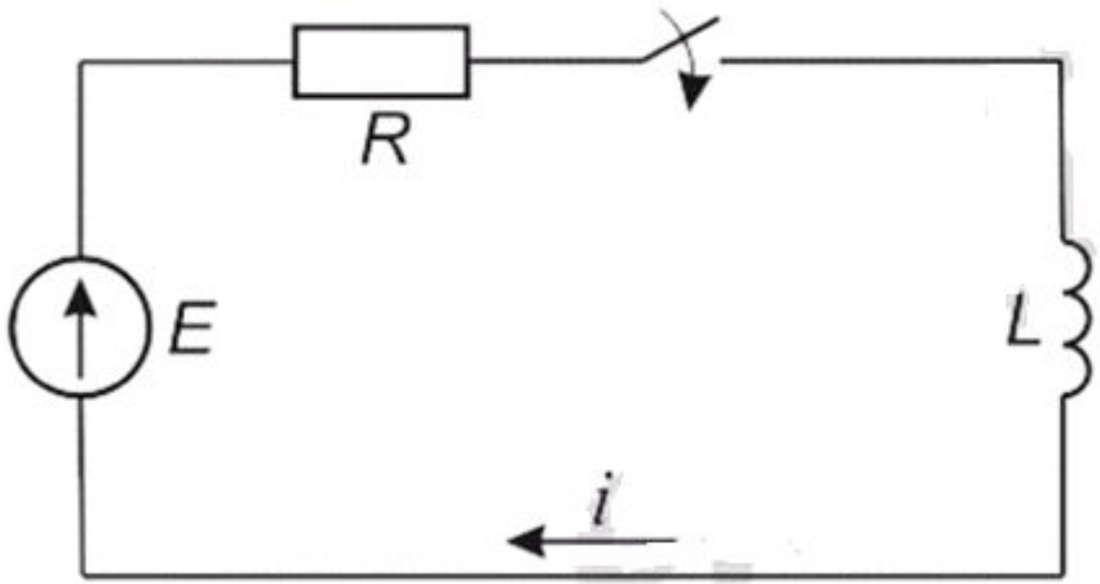
$$I(p)=\frac{U_{mn}(p)+Li(0)-\dfrac{u_C(0)}{p}+E(p)}{Z(p)}$$



Соответствующая операторная **схема замещения ветви**

ПРИМЕР (операторный метод)

Дано:
$E = 100$ В $L = 1$ мГн $R = 10$ Ом
$i - ?$



Расчет операторным методом.

1) Составим эквивалентную схему для изображений для момента времени $t = 0_+$

$$t = 0_-$$

$$i_L(0_-) = 0$$

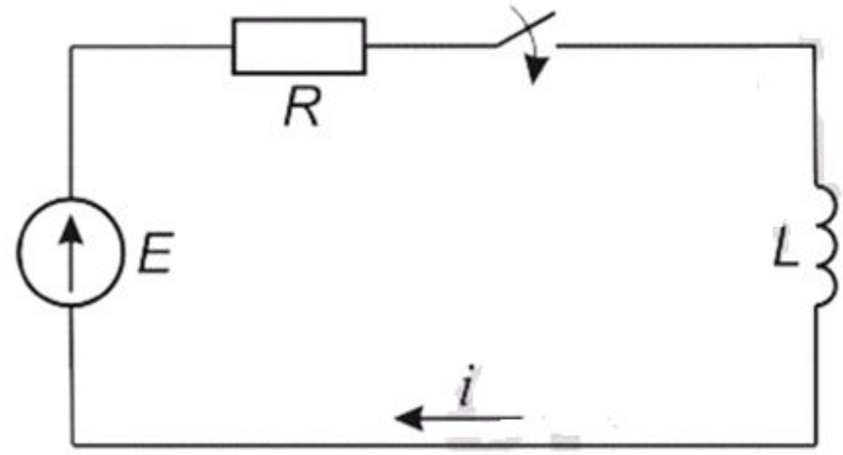
Дано:

$E = 100$ В

$L = 1$ мГн

$R = 10$ Ом

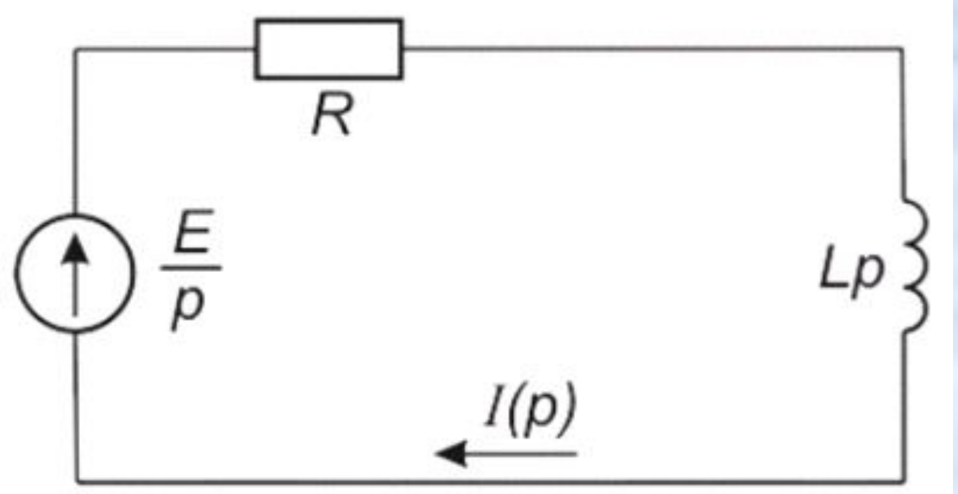
$i - ?$



$$t = 0_+$$

Начальные условия

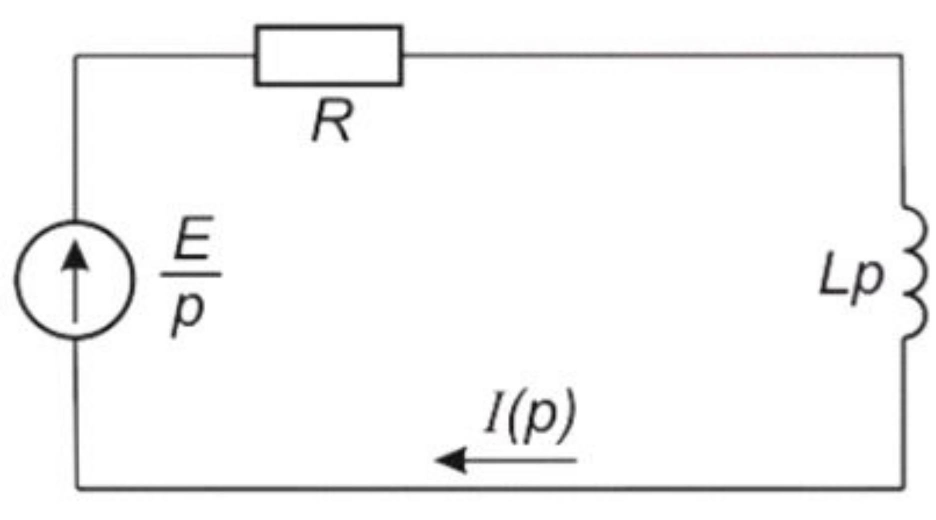
$$i(0) = i(0_-) = i(0_+) = 0$$



$t = 0_+$

Начальные условия

$i(0) = i(0_-) = i(0_+) = 0$



2) Найдем изображение тока I(p) с помощью уравнения составленного по второму закону Кирхгофа

$$I(p)(R + Lp) = \frac{E}{p}$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{E}{p(R + Lp)} = \frac{E}{p(Lp + R)}$$

Дано:

$E = 100 \ В$

$L = 1 \ мГн$

$R = 10 \ Ом$

$i - ?$

2) Найдем изображение тока I(p) с помощью уравнения составленного по второму закону Кирхгофа

$$I(p)(R + Lp) = \frac{E}{p}$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{E}{p(R + Lp)} = \frac{E}{p(Lp + R)}$$

Подставим числовые значения

$$I(p) = \frac{100}{p(0{,}001p + 10)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Подставим числовые значения

$$I(p)=\frac{100}{p(0{,}001p+10)}=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Найдем корни уравнения

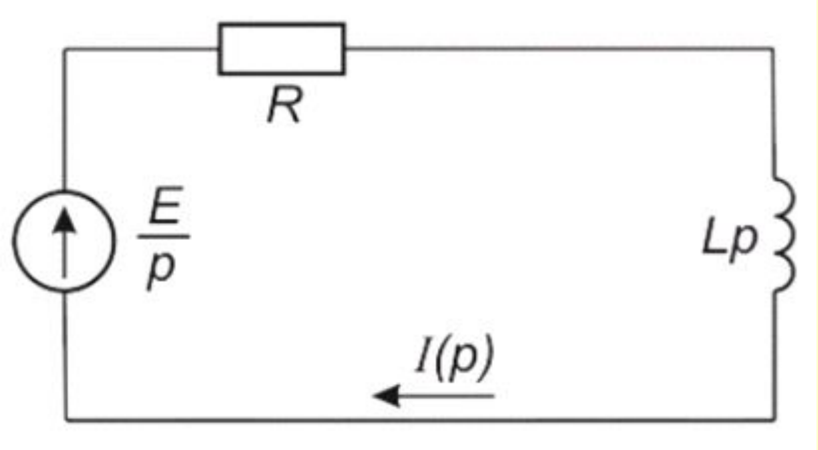
$$Z(p)=F_2(p)=0$$

$$p(0{,}001p+10)=0$$

$$p_1=0$$

$$p_2=-\frac{10}{0{,}001}=-10000\ c^{-1}$$

Корни действительные и разные, значит переходный процесс будет апериодическим.



3) **Для перехода от изображения к оригиналу воспользуемся формулой разложения для простых корней.**

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)\cdot e^{p_k t}}{F_2^{/}(p_k)}$$

$$p_1 = 0\ c^{-1}$$

$$p_2 = -10000\ c^{-1}$$

$$p_1 = 0$$

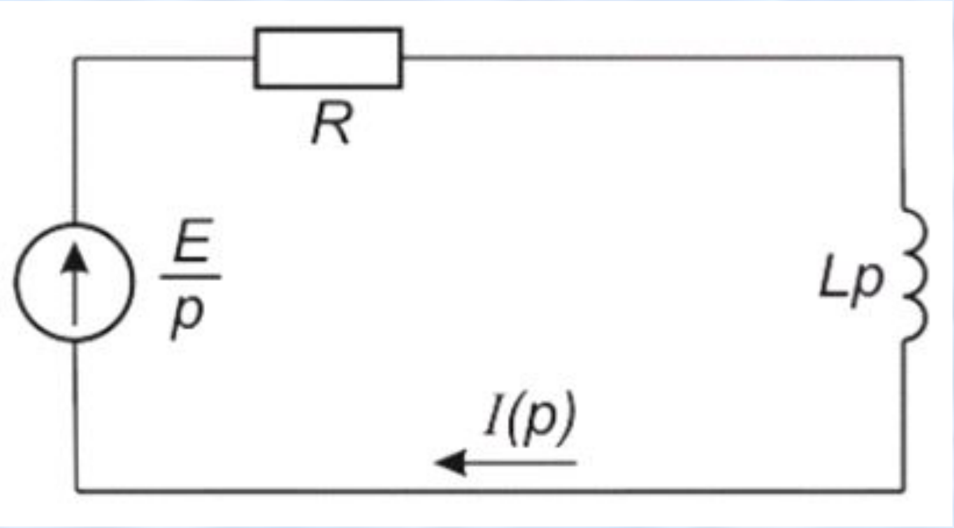
$$p_2 = -10000\ c^{-1}$$

$$i(t) = \frac{100}{2\times 0{,}001 p_1 + 10} e^{p_1 t} + \frac{100}{2\times 0.001 p_2 + 10} e^{p_2 t} =$$

$$= \frac{100}{10} + \frac{100}{0{,}002(-10000) + 10} e^{-10000\cdot t} =$$

$$= 10 - 10e^{-10000\cdot t}, A$$

$$\boxed{i(t) \quad = 10 - 10e^{-10000\cdot t}, A}$$

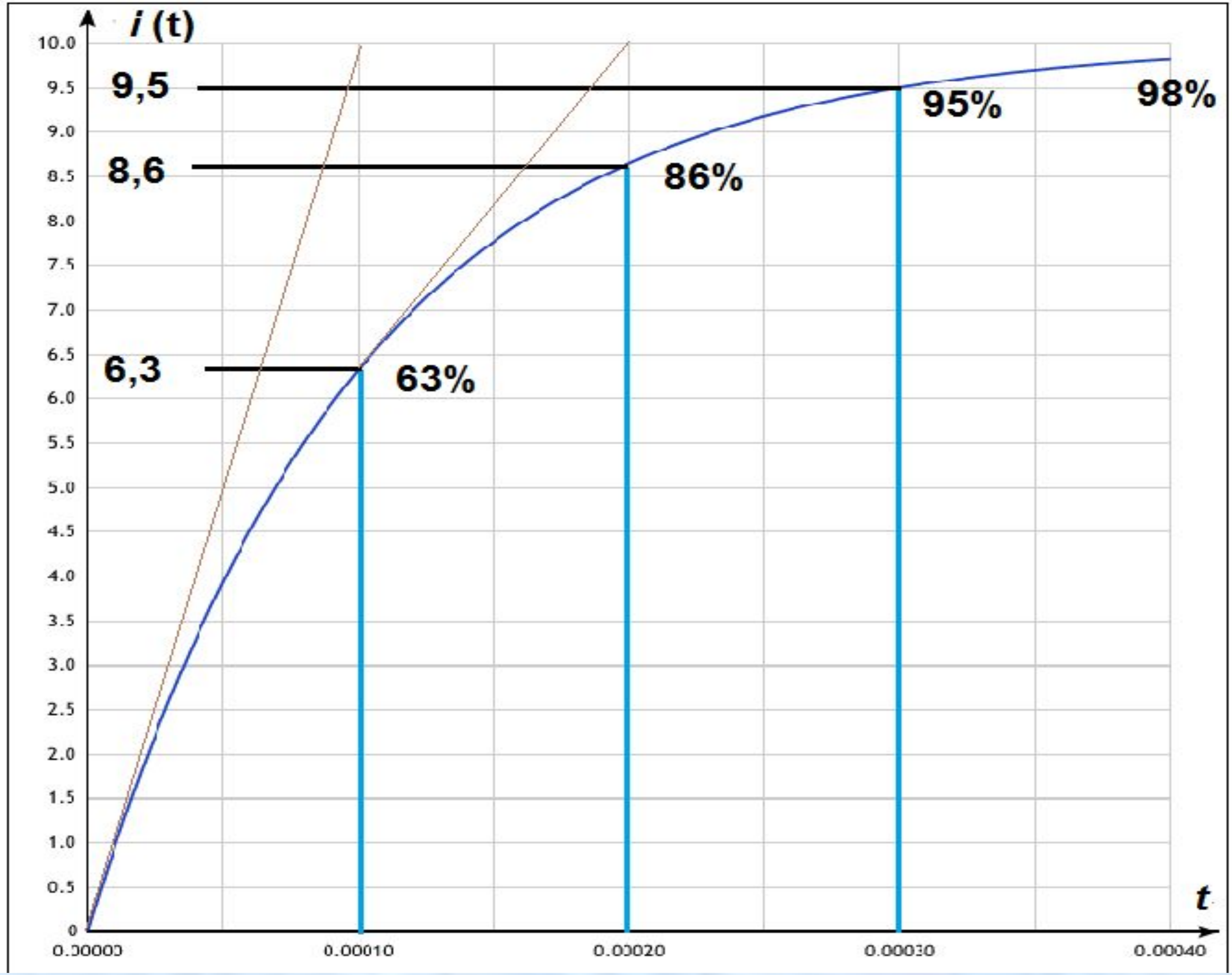


III) Построим график изменения тока i в функции времени на интервале

от $t = 0$ до $t = 4 \cdot \tau$

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001\ c^{-1}$$

$$4 \cdot \tau = 4 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0004\ c^{-1}$$


i (t)
10.0
9.5
9.0
8.5
8.0
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
9,5
8,6
6,3
95%
98%
86%
63%
t
0.00000
0.00010
0.00020
0.00030
0.00040