Непрерывность функции

- Непрерывность функции в точке
- Точки разрыва функции
- Основные теоремы о непрерывных функциях
- Непрерывность функции на интервале и на отрезке
- Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, и в самой точке x_0.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Равенство (1) означает выполнение трех условий:

1. Функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности.
2. Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$
3. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Непрерывность функции в точке

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ то равенство ***(1)*** можно записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)$$

Это значит, что при нахождении предела непрерывной функции можно перейти к пределу под знаком функции:

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

Равенство справедливо в силу непрерывности функции ***y = e^x***

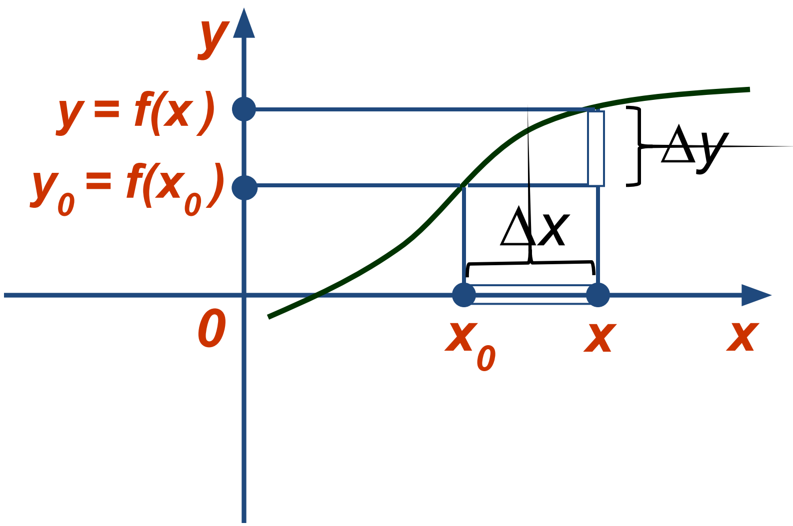
Непрерывность функции в точке

Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некоторой интервале ***(a; b)***.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$

Разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** x в точке x_0 и обозначается:

$$\Delta x = x - x_0$$

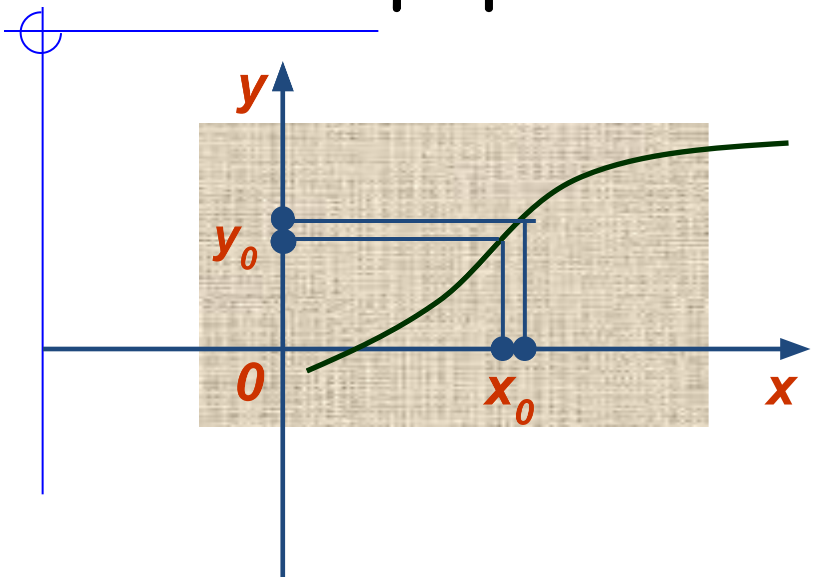


Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции*** $f(x)$ в точке x_0 и обозначается:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Приращения Δx и Δy могут быть положительными и отрицательными.

Непрерывность функции в точке



Преобразуем равенство *(1)*:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$$

$$\lim_{x-x_0\to 0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0}$$

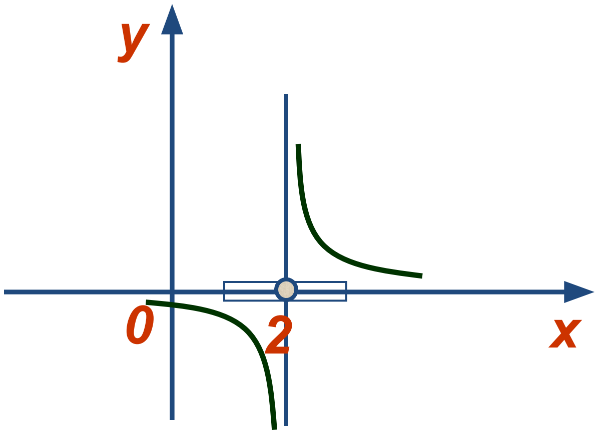
Полученное равенство является еще одним определением непрерывности функции в точке:

Функция ***y = f(x)*** называется ***непрерывной*** в точке x_0 , если она определена в точке x_0 и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Точки разрыва функции

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называется ***точками разрыва функции***.

Если $x = x_0$ – точка разрыва функции, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности, а именно:



1 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0:

Функция $$y = \frac{1}{x-2}$$

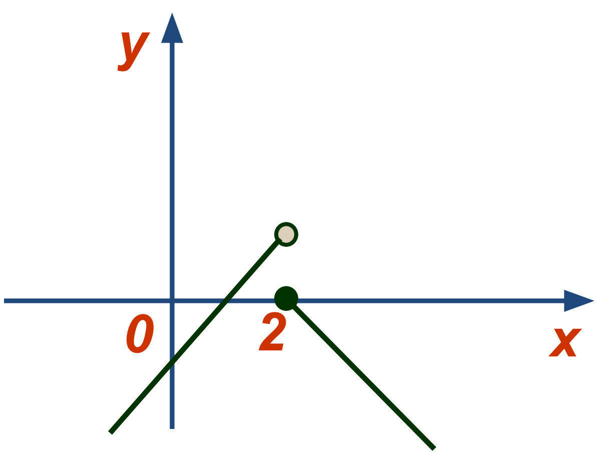
не определена в точке $x = 2$, но определена в любой окрестности этой точки, поэтому $x = 2$ - точка разрыва.

Точки разрыва функции

2 Функция *f(x)* определена в точке x_0 и в ее окрестности, но не существует предела *f(x)* при $x \to x_0$

Функция $$y = \begin{cases} x-1; & x<2 \\ 2-x; & x \ge 2 \end{cases}$$

определена в точке $x = 2$, но но не имеет предела при $x \to 2$:



$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) \ne \lim_{x\to 2+0} f(x) \Rightarrow$$

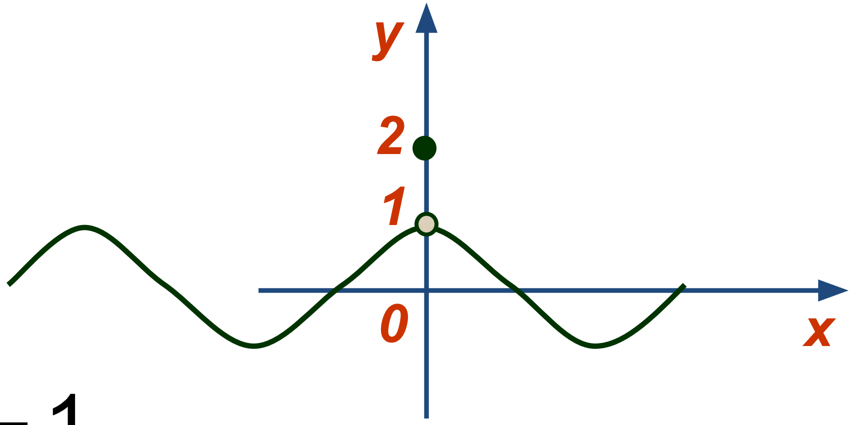
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не существует, значит $x = 2$ - точка разрыва

Точки разрыва функции

3 Функция *f(x)* определена в точке x_0 и в ее окрестности, существует предела *f(x)* при $x \to x_0$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

$$y = \begin{cases} \cos x; & x \neq 0 \\ 2; & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) \neq f(0) \implies$$ $x = 0$ -точка разрыва

Точки разрыва функции

Точка разрыва *x_0* называется ***точкой разрыва 1 рода*** функции *$f(x)$* , если в этой точке существуют конечные пределы слева и справа: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$

При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то *x_0* - ***точка устранимого разрыва***

(в примере 3: *$x = 0$* – точка устранимого разрыва 1 рода)

б) если $A_1 \neq A_2$, то *x_0* - ***точка конечного разрыва***

Величину $\left|A_1 - A_2\right|$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва 1 рода.

(в примере 2: *$x = 2$* – точка разрыва 1 рода, скачек функции равен: $\left|1 - 0\right| = 1$)

Точки разрыва функции

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва 2 рода*** функции $f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

В примере 1: $y = \dfrac{1}{x-2}$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$x = 2$ – точка разрыва 2 рода.

Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1

Сумма, произведение и частное непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, где знаменатель равен нулю)

Теорема 2

Пусть функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Можно доказать, что все ***основные элементарные функции*** непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены.

Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: ***всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.***

Непрерывность функции в интервале и на отрезке.

Функция ***y = f(x)*** называется ***непрерывной на интервале (a; b)***, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция ***y = f(x)*** называется ***непрерывной на отрезке [a; b]***, если она непрерывна на интервале ***(a; b)***, и в точке ***x = a*** непрерывна справа:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

а в точке ***x = b*** непрерывна слева:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$$

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса)

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения

Теорема (Больцано - Коши)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает все значения между A и B.

Следствие

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция обращается в ноль: $f(c) = 0$