Сириус
IT-Колледж

Комплексные числа

Комплексные числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, первое из которых x называется его *действительной частью*, а второе число y — *мнимой частью*. Обозначение: $z = x + iy$. Символ i называется *мнимой единицей*.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$.

$$i^2 = -1.$$

Сириус
IT-Колледж

Комплексные числа

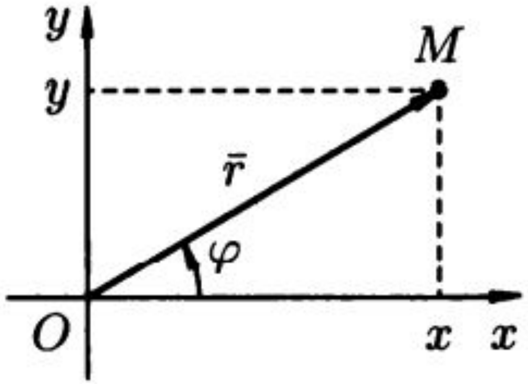
Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются *сопряженными*.

Комплексные числа

Всякое комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой* $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.



Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной плоскостью* (ее также обозначают $\mathbb{C}$). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Сириус IT-Колледж

Комплексные числа

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ — *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется *тригонометрической формой*.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{или} \quad z = |z|e^{i \arg z}$$

называют *показательной формой* (или экспоненциальной) комплексного числа.

Сириус IT-Колледж

Комплексные числа

Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$; **б)** $z = -1 + i\sqrt{3}$;

Действия над комплексными числами

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные *в алгебраической форме*, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$(\text{при } z_2 \neq 0).$$

Действия над комплексными числами

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Действия над комплексными числами

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1.$

Действия над комплексными числами

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

Найти $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$.

Решить уравнение $z^5 + 32 = 0$ на множестве комплексных чисел.

Сириус
IT-Колледж

Домашнее задание

Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;

б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;

в) $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$;

г) $\operatorname{Re} z > 1$;

д) $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

Спасибо за пару!