Кривые второго порядка

План:

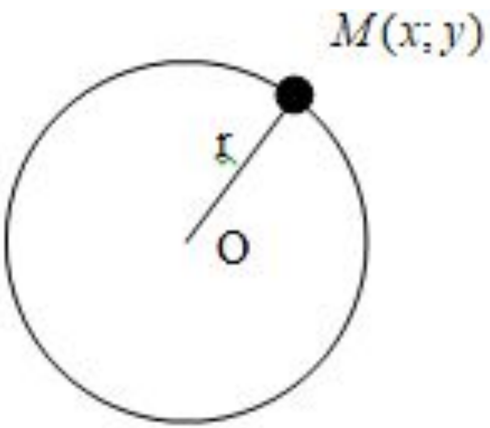
1. Окружность
2. Эллипс
3. Гипербола
4. Парабола

Окружность

Определение: Окружностью называют множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки

Данная точка называется центром окружности $O(x_0;y_0)$;

Заданное расстояние называют радиусом окружности (R)



Пусть $O(x_0;\ y_0)$ – центр окружности

На окружности возьмем произвольную точку $M(x;\ y)$ и найдем координаты вектора $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = (x - x_0; y - y_0)$$

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = R, \text{значит}$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Уравнение окружности

Например, составьте уравнение окружности, проходящей через точки А(-2; 5) и В(6; -1), если отрезок АВ является диаметром

Дано: окружность

А(-2;5)$\in$ окружности

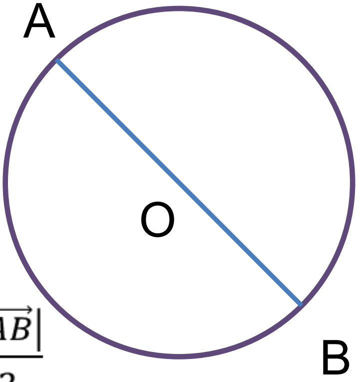
$B(6;\ -1) \in$ окружности

АВ- диаметр

Составить уравнение окружности

Решение:

Точка О- середина отрезка АВ



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

О(2; 2)- центр окружности

Найдем радиус окружности: $R = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}$

$$\overrightarrow{AB} = (6-(-2); -1-5) = (8; -6)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36}$$

$$= \sqrt{100} = 10$$

$$R = 5$$

Составим уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

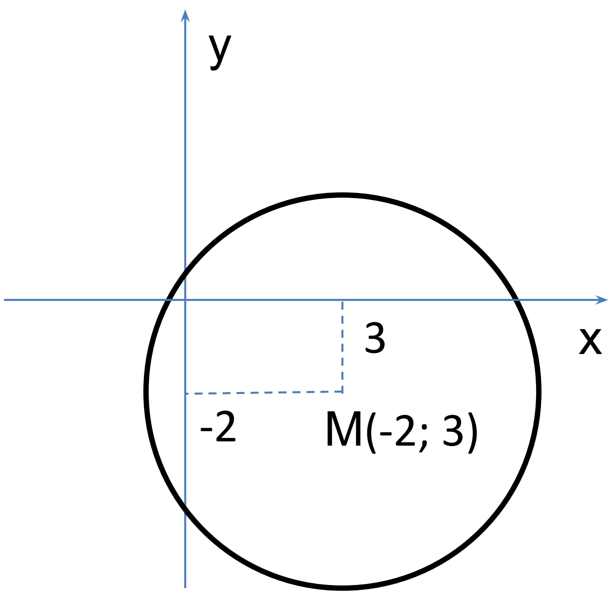
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

-уравнение окружности

Например, приведите уравнение окружности $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$ к каноническому виду и изобразите ее в координатной плоскости

Дано: окружность
$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$

Составить уравнение окружности



Решение:

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Выделим полный квадрат:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 = 3$$

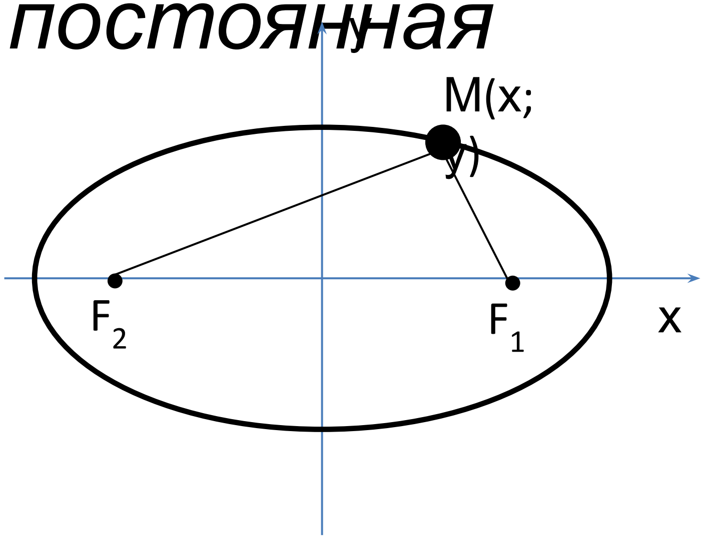
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

- Уравнение окружности, с центром в точке M(-2;3), радиуса R=4

Ответ: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

Эллипс

Определение: *Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек есть величина постоянная*



F_1, F_2- фокусы

F_1F_2 - фокусное расстояние (2c)

$|F_1M + MF_2| = 2a$

a- большая полуось

$b^2 = a^2 - c^2$ -

b - меньшая полуось

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Исследование формы эллипса по его уравнению

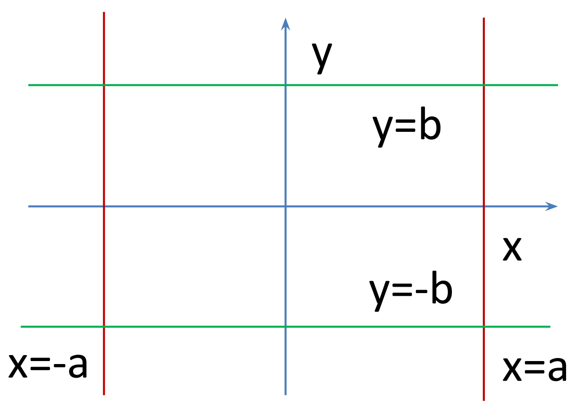
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1) Оценка значений *a* и *b*

$$\frac{y^2}{b^2} \geq 0 => \frac{x^2}{a^2} \leq 1 => x^2 \leq a^2 =>$$

$$-a \leq x \leq a$$

Аналогично можно доказать, что $-b \leq y \leq b$



Значит, эллипс расположен внутри прямоугольника, со сторонами x=a, x=-a, y=b, y=-b

2) Найдем точки пересечения с осями координат

а) с осью Ох, значит y=0

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 => x^2 = a^2 => x = \pm a$$

A(-a;0) и B(a;0)- точки пересечения с осью Ох

б) с осью Оу, значит х=0

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 => y^2 = b^2 => y = \pm b$$

C(0; b) и D(0; -b)- точки пересечения с осью Оу

Точки A, B, C, D называются вершинами эллипса

Алгоритм построения эллипса:

1) Найдите значения a и b

2) На координатной плоскости отметьте точки

A(-a;0), B(a;0), C(0; b) и D(0; -b)

3) Постройте прямоугольник, со сторонами

$$x = \pm a, y = \pm b$$

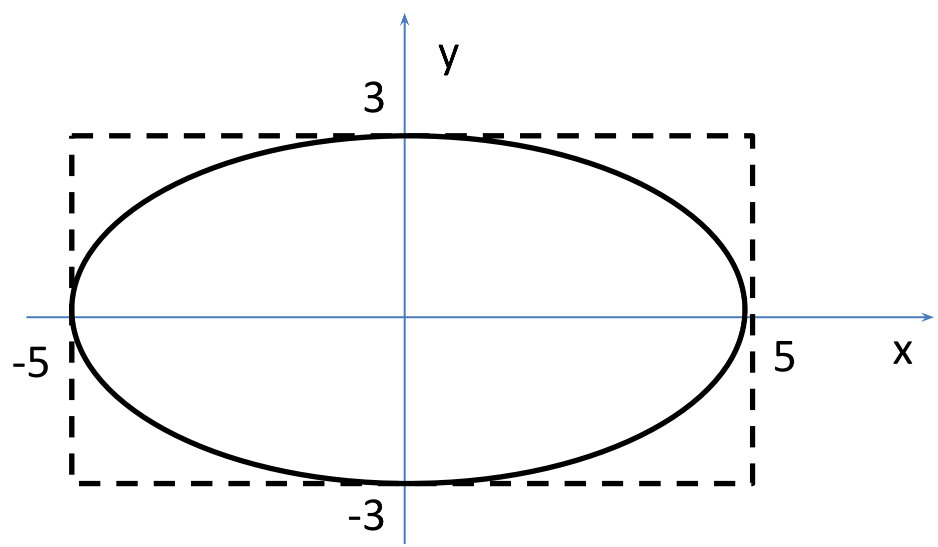
4) Впишите в прямоугольник эллипс

- Например, изобразите эллипс, заданный уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Решение:

Найдем a и b

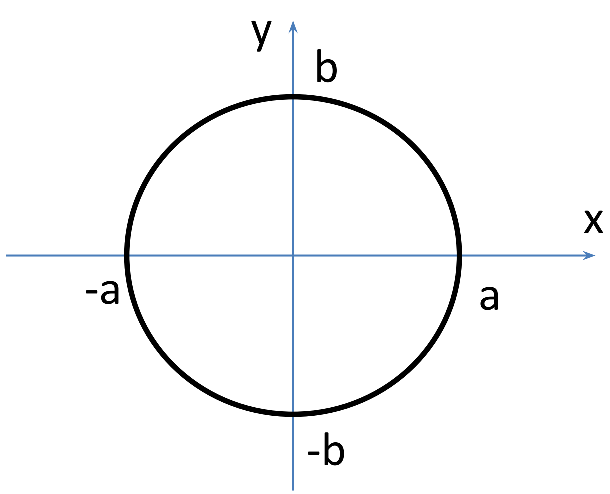
$$a^2 = 25 => a = 5 - \text{большая полуось}$$
$$b^2 = 9 => b = 3\ \ - \text{меньшая полуось}$$



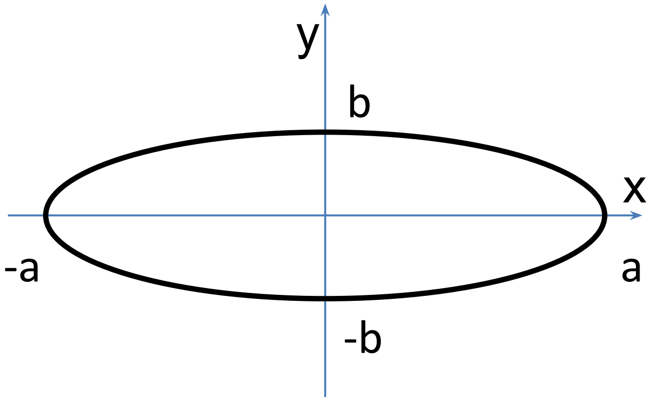
***Определение*: Эксцентриситетом** эллипса (ε) называют отношение фокусного расстояния к длине большей оси $\varepsilon = \frac{c}{a}$

т.к. a>c, то $0 \leq \varepsilon \leq 1$

<u>Влияние эксцентриситета на форму эллипса</u>:



1) Если $\varepsilon \approx 0$, то $\frac{c}{a} \approx 0 => c \ll a$ (*c* намного меньше *a*), значит $b \approx a\ (b^2 = a^2 - c^2) =>$ эллипс имеет круглую форму



2) Если $\varepsilon \approx 1$, то $\frac{c}{a} \approx 1 => c \approx a$, значит $b \approx 0$ $(b^2 = a^2 - c^2) =>$ эллипс вытянут вдоль оси OX

Например, изобразите эллипс, заданный уравнением

$$9x^2 - 36x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$$

Решение: приведем уравнение к каноническому виду:

$$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 2y) + 4 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 36 + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 + 4 = 0$$

$$9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36$$

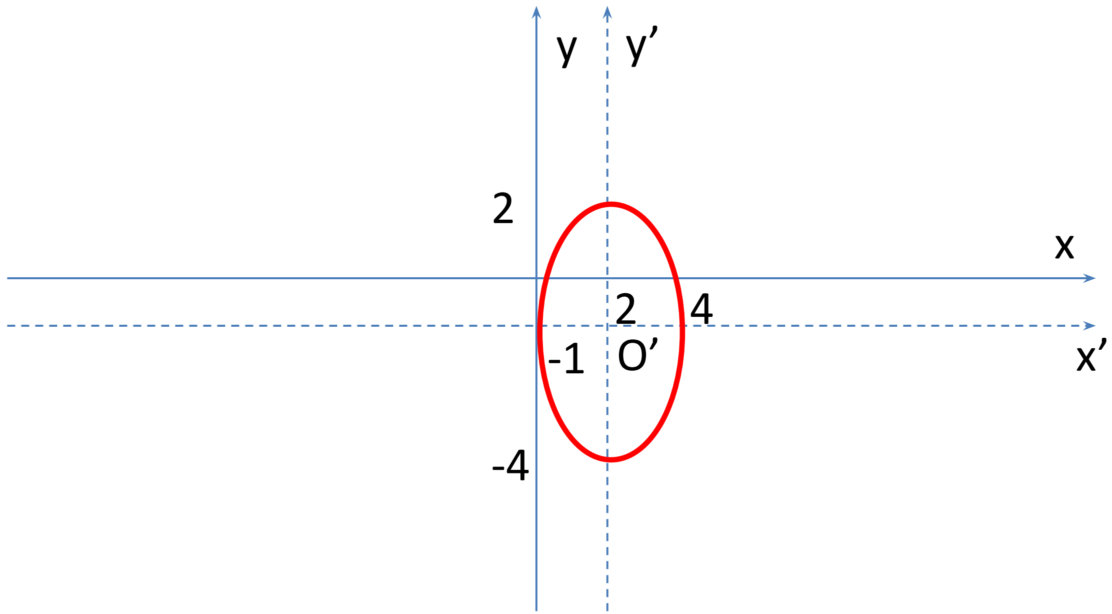
$$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y+1)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Каноническое уравнение

- $$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$
$$a^2=4 => a=2$$
$$b^2=9 => b=3$$

Оси координат смещены на 2 ед. отрезка вправо и на 1 ед. отрезок вниз



Расположение эллипса относительно координатных осей

1) Если ***a>b***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a- большая полуось

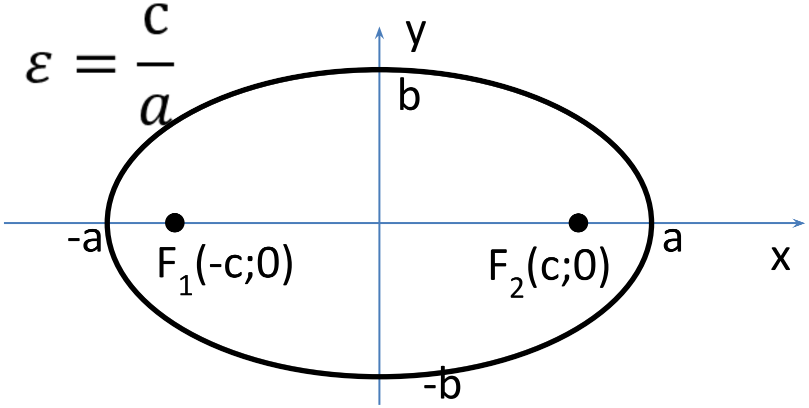
b- меньшая полуось

F_1F_2 =2c- фокусное расстояние

F_1 (-c; 0), F_2(c;0) –фокусы

$$b^2=a^2-c^2$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$



2) Если ***a<b***

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

b- большая полуось

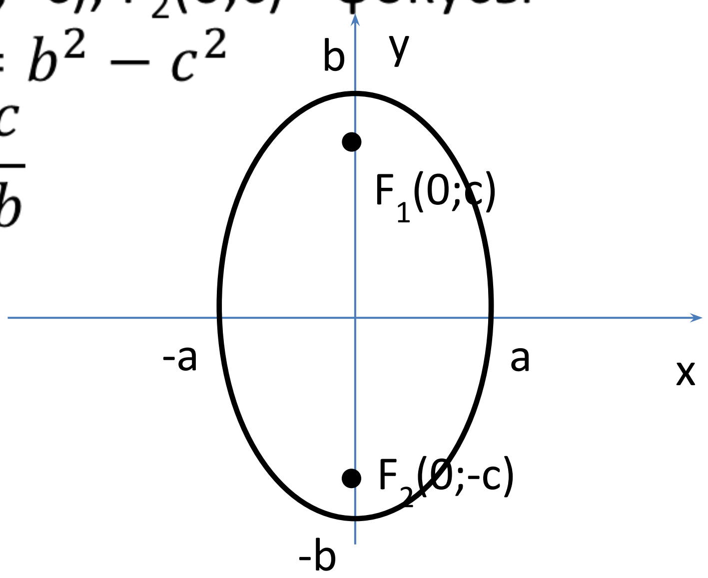
a- меньшая полуось

F_1F_2 =2c- фокусное расстояние

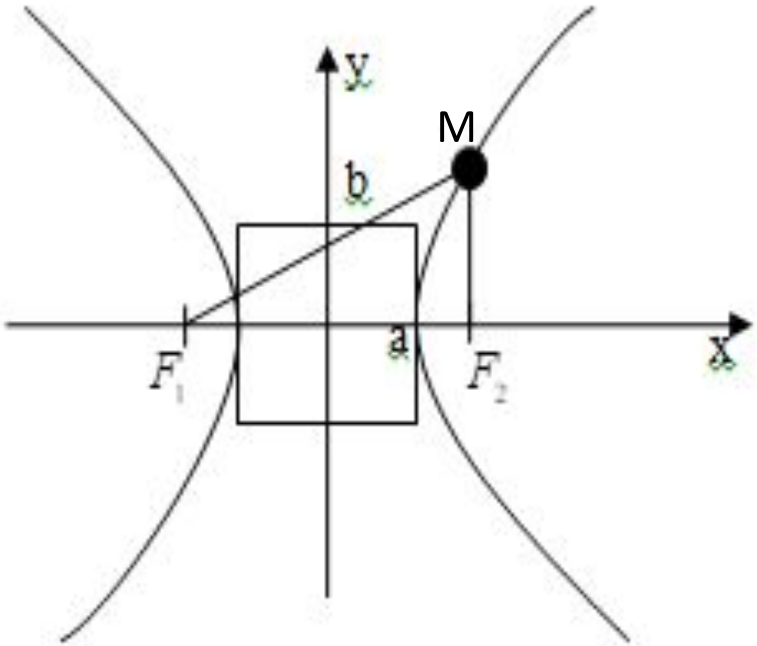
F_1 (0; -c), F_2(0;c) –фокусы

$$a^2=b^2-c^2$$

$$\varepsilon=\frac{c}{b}$$



Гипербола



- F_1, F_2- фокусы

F_1F_2 - фокусное расстояние (2c)

$|F_1M - MF_2| = 2a$

a- действительная полуось

$b^2 = c^2 - a^2$ -

b - мнимая полуось

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

- Найдем точки пересечения гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, с осями координат

а) с осью Ох, значит у=0

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 => x^2 = a^2 => x = \pm a$$

А(а;0), В(-а;0)- точки пересечения с осью Ох

б) с осью Оу, значит х=0

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 => y^2 = -b^2$$

Это уравнение не имеет решения, значит точек пересечения с осью Оу нет

- Оценим значения переменных x и y

$$\frac{y^2}{b^2} \geq 0 => \frac{x^2}{a^2} \geq 1 => \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$$

y – может принимать любые значения

Диагонали прямоугольника, со сторонами $x = a, x = - a, y = b, y = -b,$ являются асимптотами гиперболы.

Асимптоты задаются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$

Гипербола расположена за пределами прямоугольника со сторонами, $x = a, x = -a, y = b, y = -b$

Алгоритм построения гиперболы

1) Найдите значения параметров a и b
2) Изобразите координатную плоскость и отметьте значения a и b на осях Ox и Oy соответственно
3) Постройте прямоугольник со сторонами

$$x = a, x = -a, y = b, y = -b$$

4) Проведите диагонали прямоугольника и продлите их за пределами прямоугольника

5) Постройте гиперболу

- Например, изобразите гиперболу, заданную уравнением

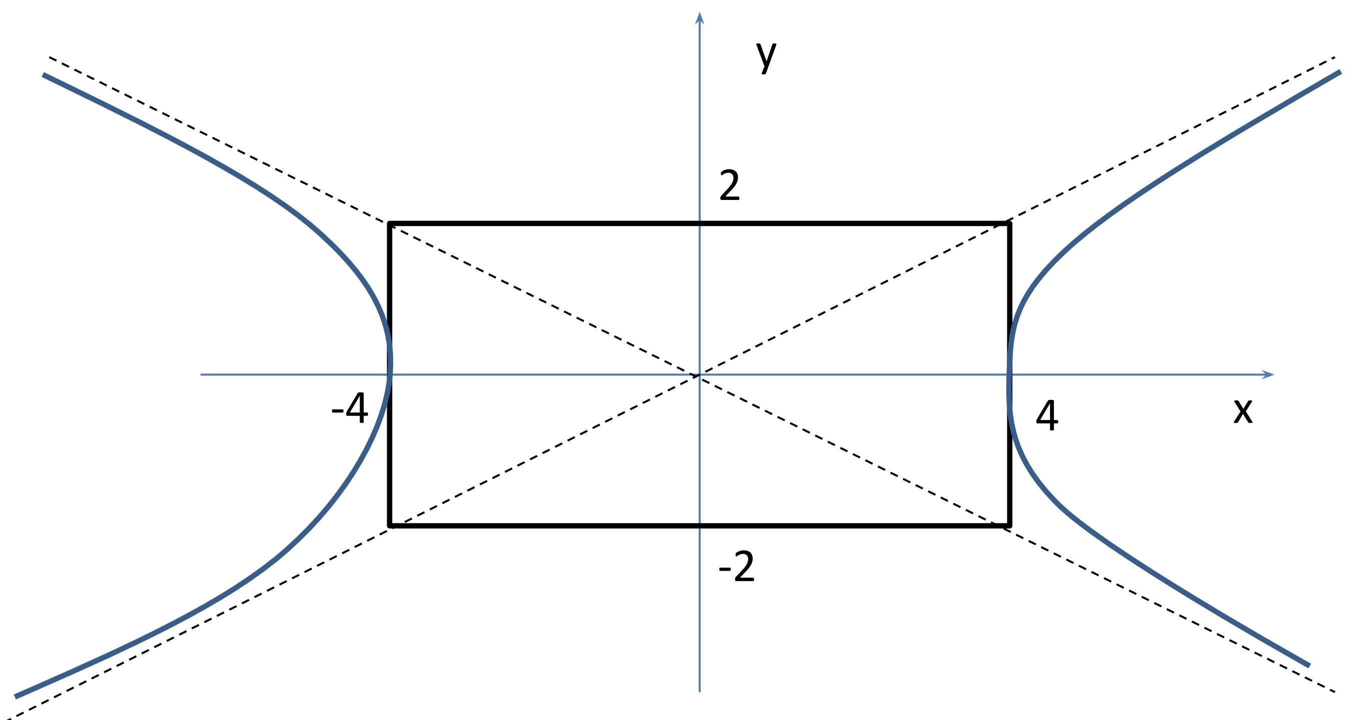
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Решение:

Найдем значения параметров a и b

$$a^2 = 16 => a = 4$$

$$b^2 = 4 => b = 2$$

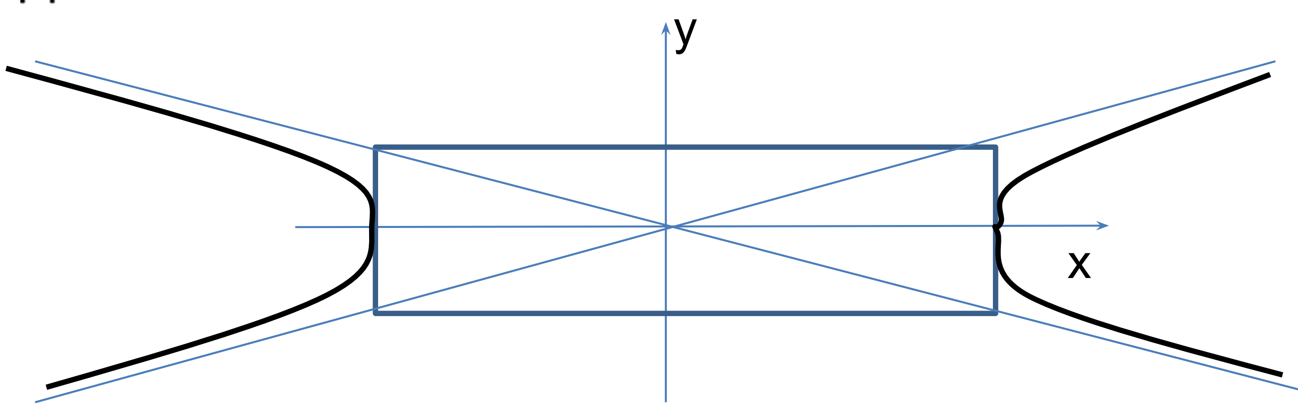


***Определение*: Эксцентриситетом** гиперболы (ε) называют отношение фокусного расстояния к длине большей оси $\varepsilon = \frac{c}{a}$

т.к. а<с, то $\varepsilon \geq 1$

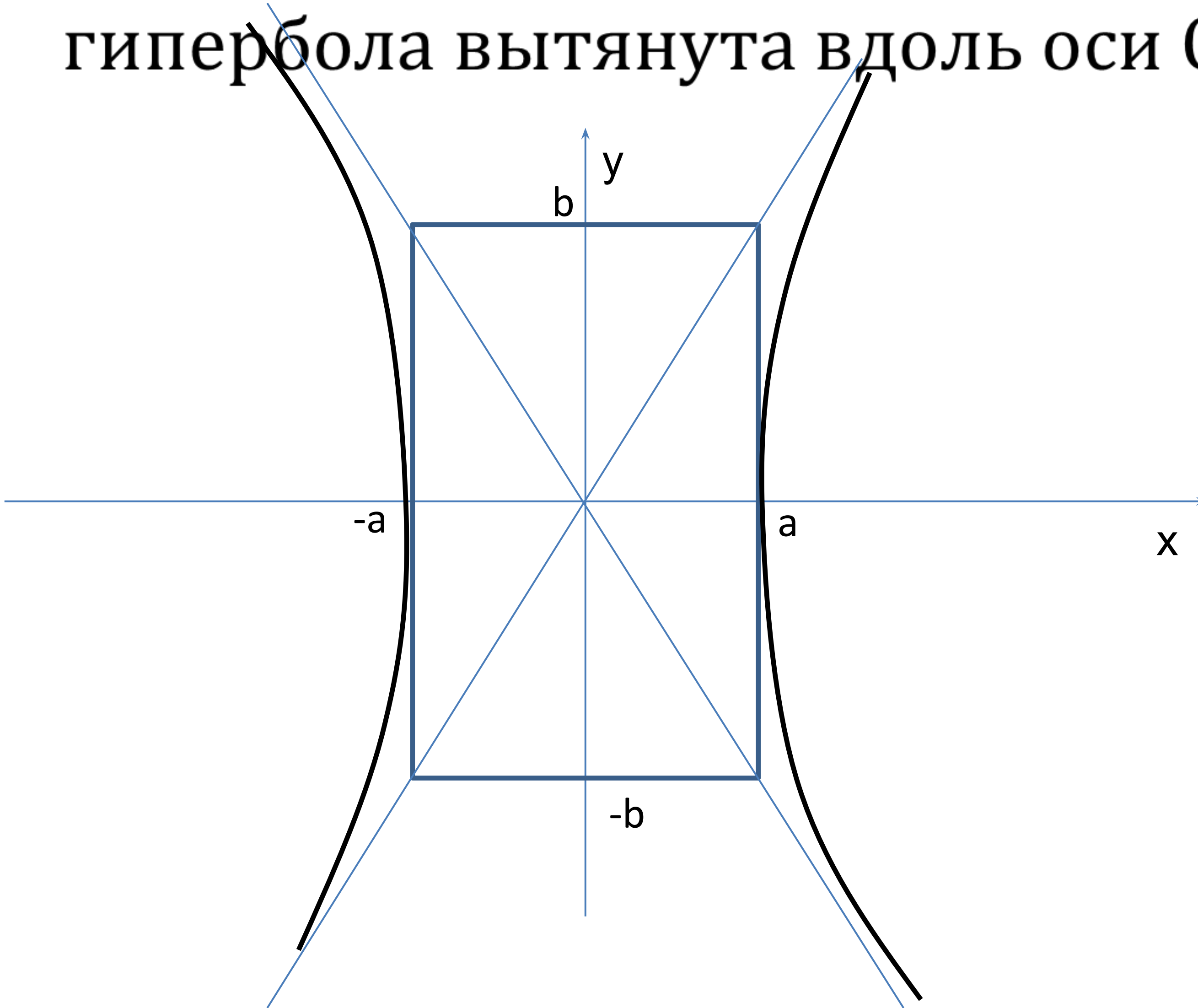
Влияние эксцентриситета на форму гиперболы:

1) Если $\varepsilon \approx 1,$ то $\frac{c}{a} \approx 1 \Rightarrow c \approx a$, значит $b \approx 0$ $(b^2 = c^2 - a^2) \Rightarrow$ Гипербола сжата вдоль оси Ох



2) Если $\varepsilon >> 1$, то $\frac{c}{a} >> 1 => c >> a$, значит $b \gg a \; (b^2 = c^2 - a^2) =>$

гипербола вытянута вдоль оси OX



Расположение гиперболы относительно осей координат

Если *a>b*, то гипербола задается уравнением: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a- действительная полуось

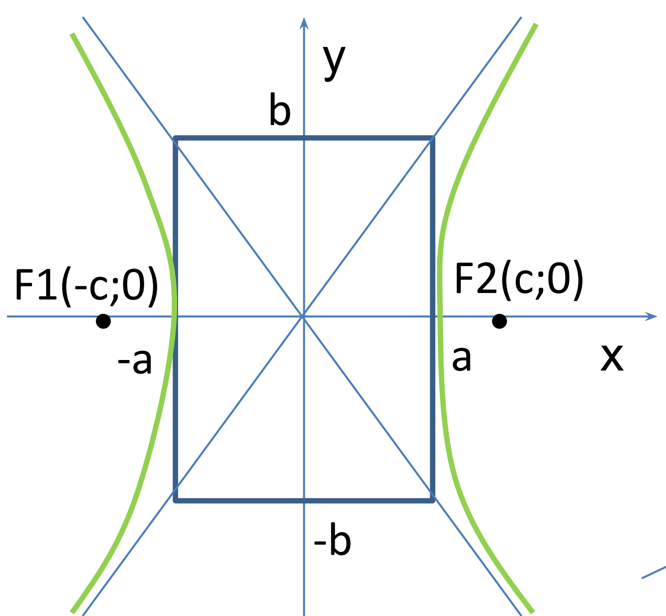
b- мнимая полуось

$F_1F_2=2c$- фокусное расстояние

F1 (-c; 0), F2 (c;0) – фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{a}$- эксцентриситет

$y = \pm\frac{b}{a}x$ – уравнения асимптот



Если *a<b*, то гипербола задается уравнением: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

a-мнимая полуось

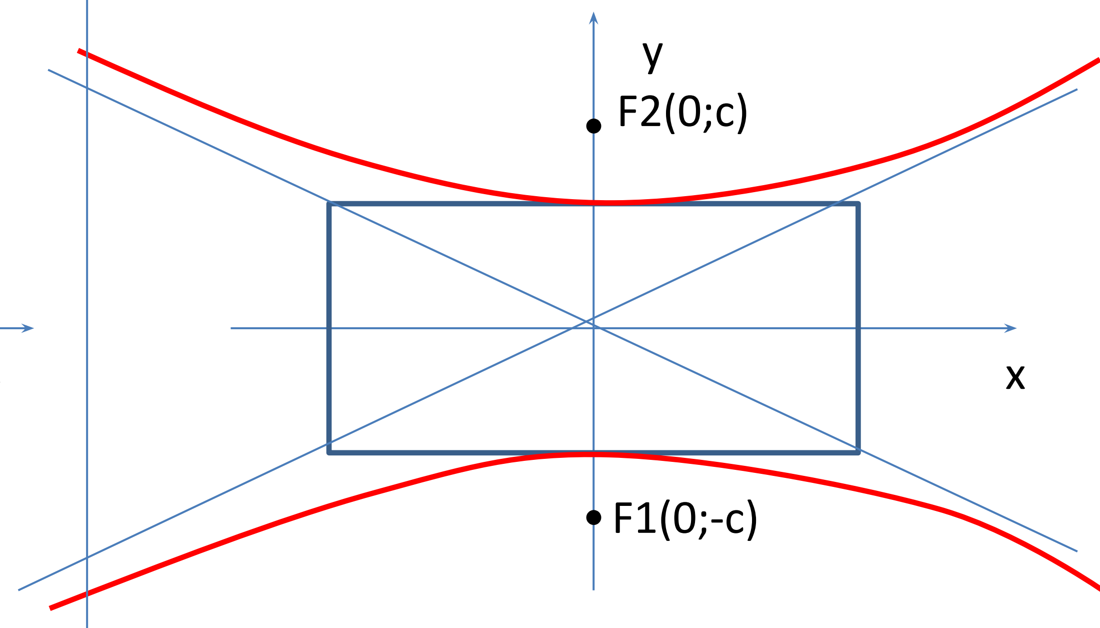
b- действительная полуось

$F_1F_2=2c$- фокусное расстояние

F1 (0;-c), F2 (0;c) – фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{b}$- эксцентриситет

$y = \pm\frac{b}{a}x$ – уравнения асимптот



Приведите уравнение
$$25y^2 - 100y - 4x^2 - 24x = 36$$
к каноническому виду и изобразите кривую второго порядка

- Решение:

Выделим полный квадрат

$$(25y^2 - 100y) - (4x^2 + 24x) = 36$$
$$25(y^2 - 4y) - 4(x^2 + 6x) = 36$$
$$25(y^2 - 4y + 4) - 100 - 4(x^2 + 6x + 9) - 36 = 36$$
$$25(y-2)^2 - 4(x+3)^2 = 100$$
$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$$

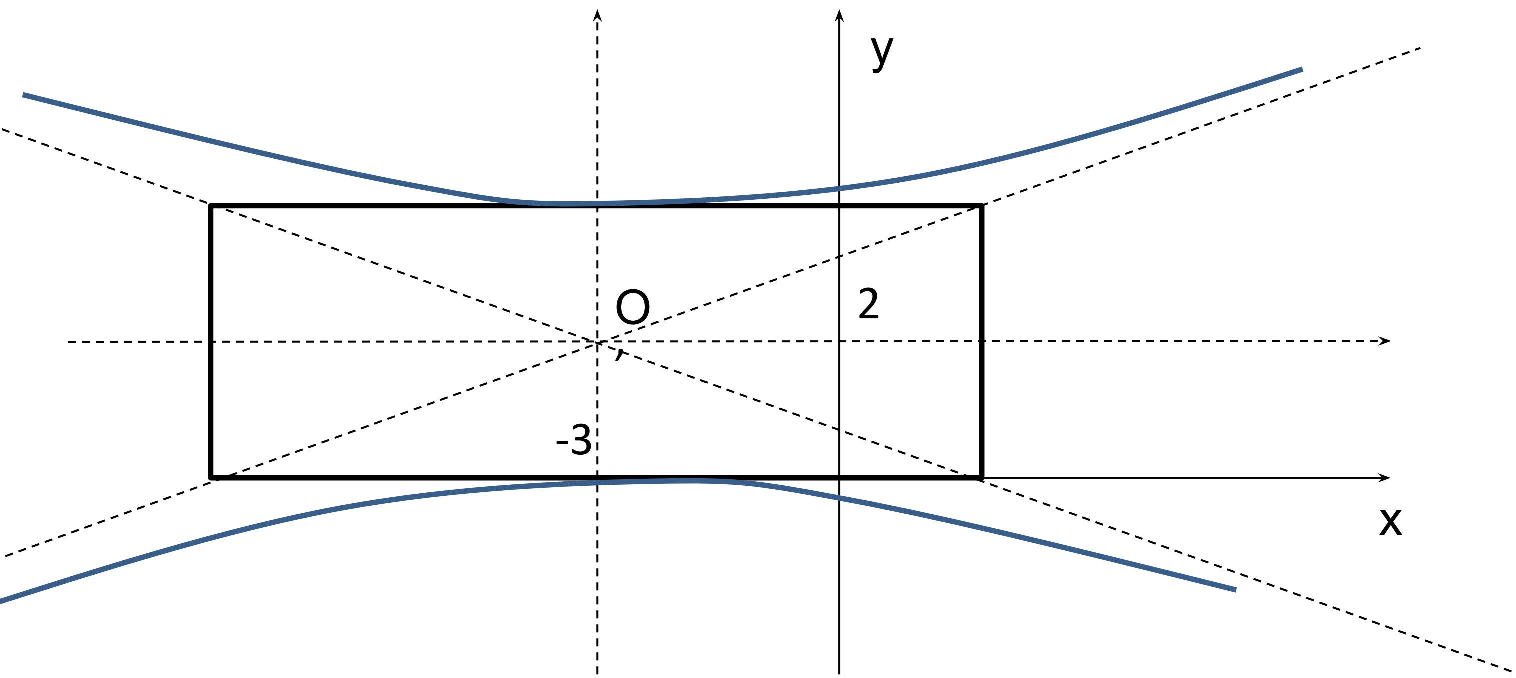
Каноническое уравнение гиперболы

- Изобразим эту гиперболу:

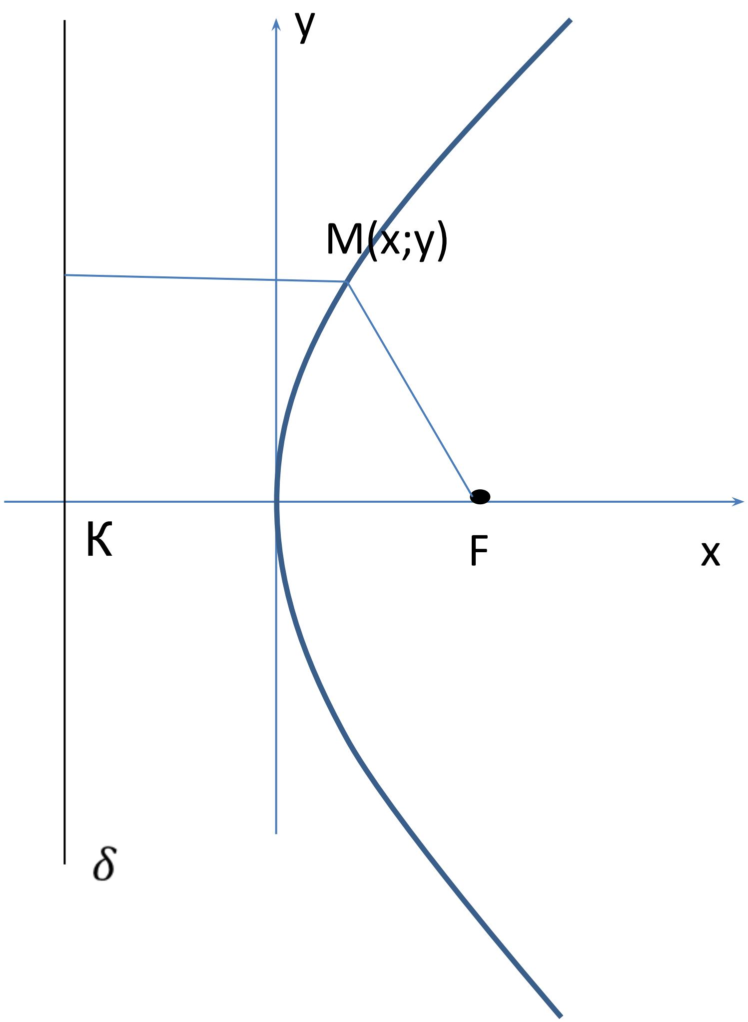
$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$$

$$b^2 = 4 => b = 2; \;\; a^2 = 25 => a = 5$$

Оси координат смещены на 3 ед. отрезка влево и на 2 ед. отрезок вверх



Парабола



- *Определение:* *Параболой* *называют множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы)*

Пусть FK=p, тогда

F($\frac{p}{2}$; 0)- фокус

$\delta: x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы

- *Каноническое уравнение параболы имеет вид:* $y^2 = 2px$, или $x^2 = 2py$

Например, изобразите параболу, заданную уравнением $y^2 = 4x$

Решение:

Найдем значение параметра p

$$2p = 4 => p = 2 => \frac{p}{2} = 1$$

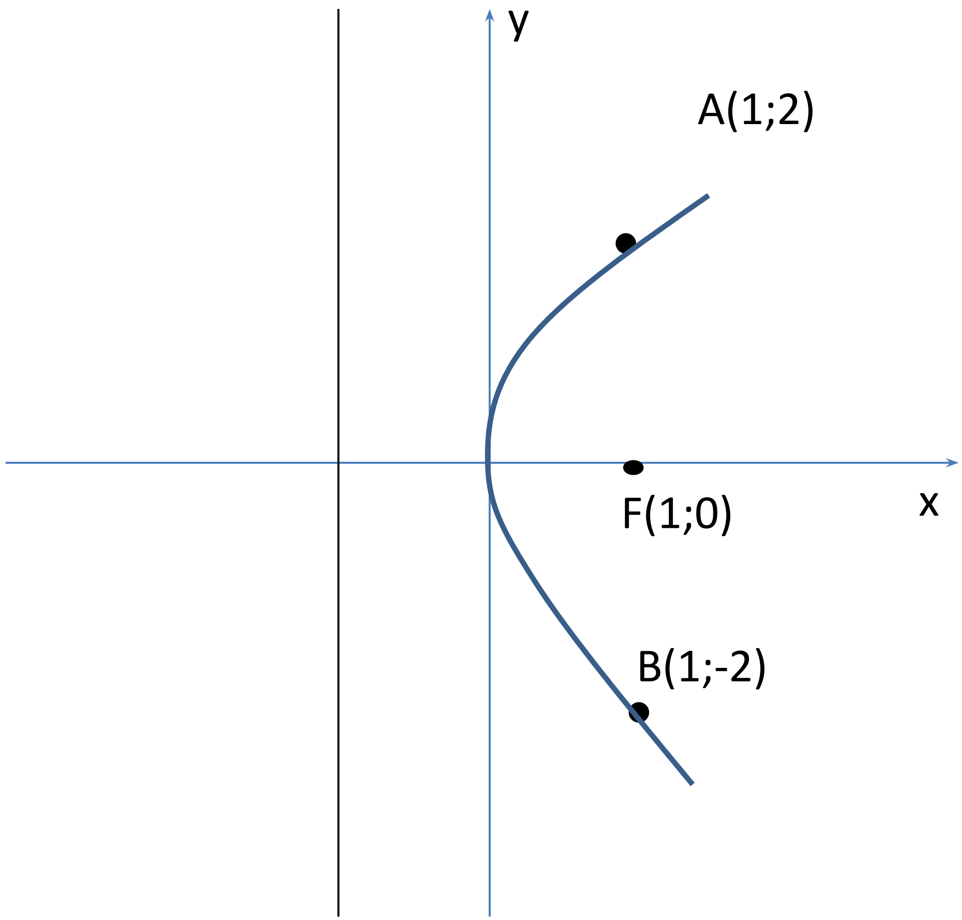
F(1;0) – фокус,

δ: $x = -1$- уравнение директрисы

Найдем координаты точек, через которые пройдет парабола

Пусть $x = 1 => y^2 = 4 => y = \pm 2$

A(1;2), B(1;-2)

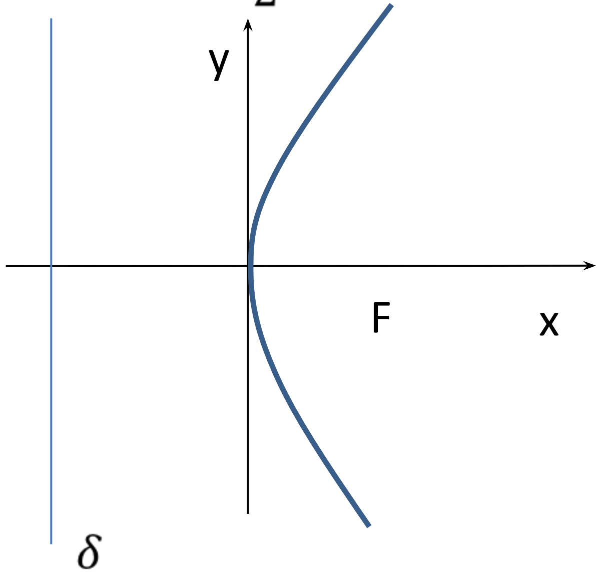

y
A(1;2)
F(1;0)
x
B(1;-2)

Расположение параболы относительно осей координат

1) $y^2 = 2px,$ при $p > 0$

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус

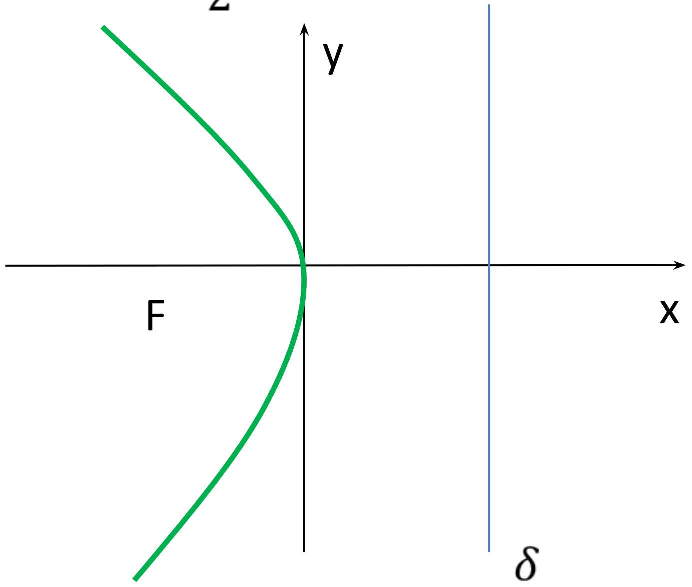
$\delta: x = -\frac{p}{2}$ – директрисса



2) $y^2 = 2px,$ при $p < 0$

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус

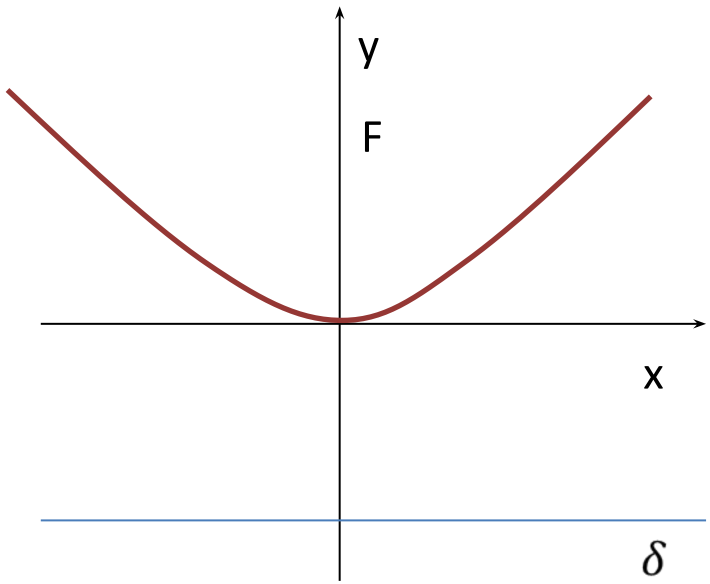
$\delta: x = -\frac{p}{2}$ – директрисса



3) $x^2 = 2py$, при $p > 0$

$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ – фокус

$\delta: y = -\frac{p}{2}$ – директрисса



4) $x^2 = 2py$, при $p < 0$

$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ – фокус

$\delta: y = -\frac{p}{2}$ – директрисса