

Кривые второго порядка

План:

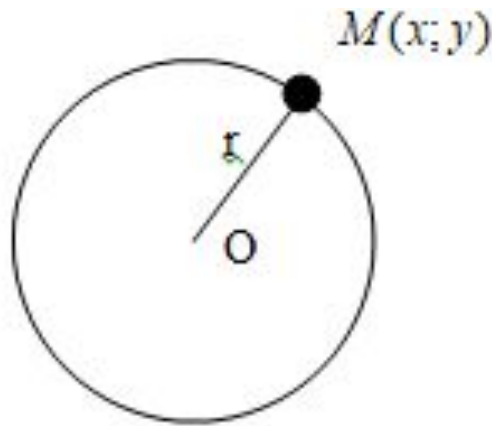
1. Окружность
2. Эллипс
3. Гипербола
4. Парабола

Окружность

Определение: Окружностью называют множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки

Данная точка называется *центром* окружности $O(x_0; y_0)$;

Заданное *расстояние* называют *радиусом* окружности (R)



Пусть $O(x_0; y_0)$ – центр окружности
На окружности возьмем произвольную точку $M(x; y)$ и найдем координаты вектора \overrightarrow{OM}

$$\overrightarrow{OM} = (x - x_0; y - y_0)$$

$$|\overrightarrow{OM}| = R, \text{ значит}$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Уравнение окружности

Например, составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-2; 5)$ и $B(6; -1)$, если отрезок AB является диаметром

Дано: окружность

$A(-2; 5) \in$ окружности

$B(6; -1) \in$ окружности

AB - диаметр

Составить уравнение
окружности

Решение:

Точка O - середина отрезка AB

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$O(2; 2)$ - центр окружности

Найдем радиус окружности: $R = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}$

$$\overrightarrow{AB} = (6 - (-2); -1 - 5) = (8; -6)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36}$$

$$= \sqrt{100} = 10$$

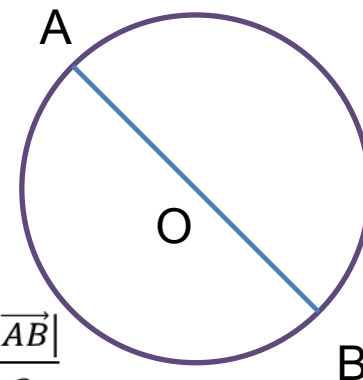
$$R = 5$$

Составим уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

-уравнение окружности

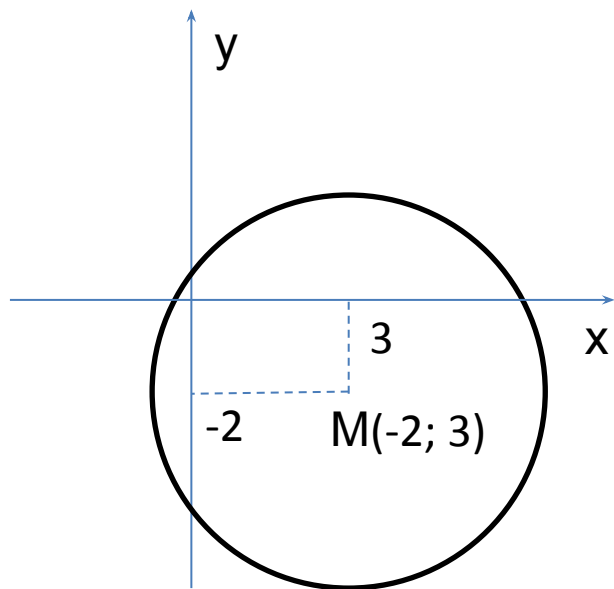


• Например, приведите уравнение окружности $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$ к каноническому виду и изобразите ее в координатной плоскости

Дано: окружность

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

Составить уравнение
окружности



Решение:

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Выделим полный квадрат:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 = 3$$

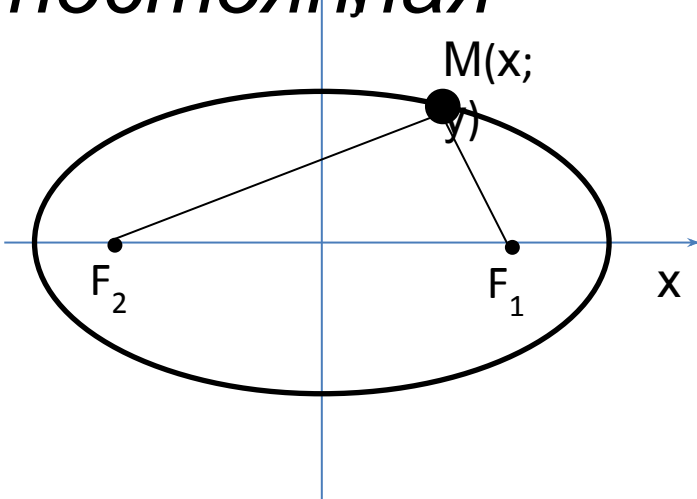
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

- Уравнение окружности, с центром в точке $M(-2;3)$, радиуса $R=4$

Ответ: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

Эллипс

Определение: Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек есть величина постоянная



F_1, F_2 - фокусы

F_1F_2 - фокусное расстояние
($2c$)

$$|F_1M + MF_2| = 2a$$

a - большая полуось

$$b^2 = a^2 - c^2 -$$

b - меньшая полуось

Каноническое уравнение

эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

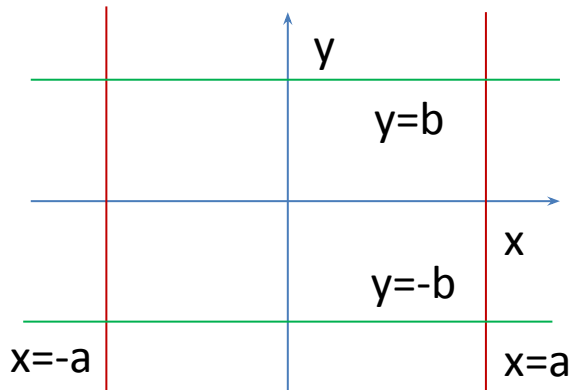
Исследование формы эллипса по его уравнению

- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1) Оценка значений a и b

$$\frac{y^2}{b^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

Аналогично можно доказать, что $-b \leq y \leq b$



Значит, эллипс расположен внутри прямоугольника, со сторонами $x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$

2) Найдем точки пересечения с осями координат

а) с осью Ox , значит $y=0$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

$A(-a;0)$ и $B(a;0)$ - точки пересечения с осью Ox

б) с осью Oy , значит $x=0$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$$

$C(0; b)$ и $D(0; -b)$ - точки пересечения с осью Oy

Точки A , B , C , D называются вершинами эллипса

Алгоритм построения эллипса:

1) Найдите значения a и b

2) На координатной плоскости отметьте точки

$$A(-a;0), B(a;0), C(0; b) \text{ и } D(0; -b)$$

3) Постройте прямоугольник, со сторонами

$$x = \pm a, y = \pm b$$

4) Впишите в прямоугольник эллипс

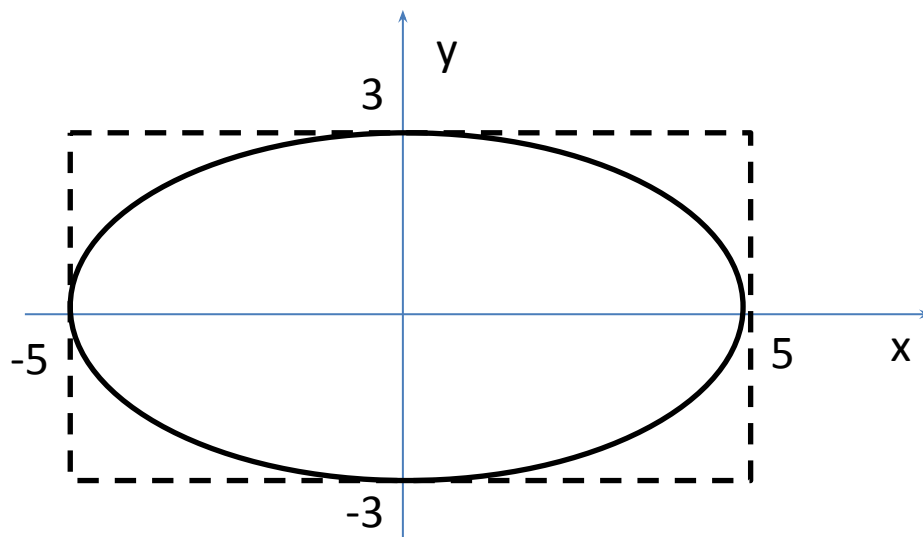
Например, изобразите эллипс, заданный уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Решение:

Найдем a и b

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ – большая полуось

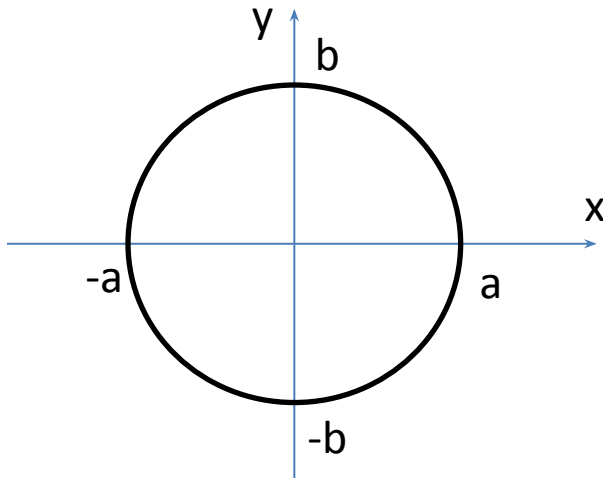
$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ – меньшая полуось



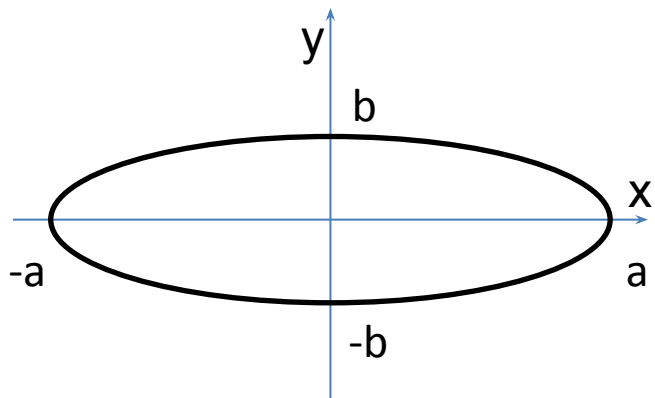
Определение: Эксцентриситетом эллипса (ε) называют отношение фокусного расстояния к длине большей оси $\varepsilon = \frac{c}{a}$

т.к. $a > c$, то $0 \leq \varepsilon \leq 1$

Влияние эксцентриситета на форму эллипса:



1) Если $\varepsilon \approx 0$, то $\frac{c}{a} \approx 0 \Rightarrow c \ll a$
(c намного меньше a), значит
 $b \approx a$ ($b^2 = a^2 - c^2$) \Rightarrow
эллипс имеет круглую форму



2) Если $\varepsilon \approx 1$, то $\frac{c}{a} \approx 1 \Rightarrow c \approx a$,
 значит $b \approx 0$ ($b^2 = a^2 - c^2$) \Rightarrow
 ЭЛЛИПС ВЫТЯНУТ ВДОЛЬ ОСИ ОХ

Например, изобразите эллипс, заданный уравнением

$$9x^2 - 36x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$$

Решение: приведем уравнение к каноническому виду:

$$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 2y) + 4 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 36 + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 + 4 = 0$$

$$9(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 36$$

$$\frac{9(x - 2)^2}{36} + \frac{4(y + 1)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$

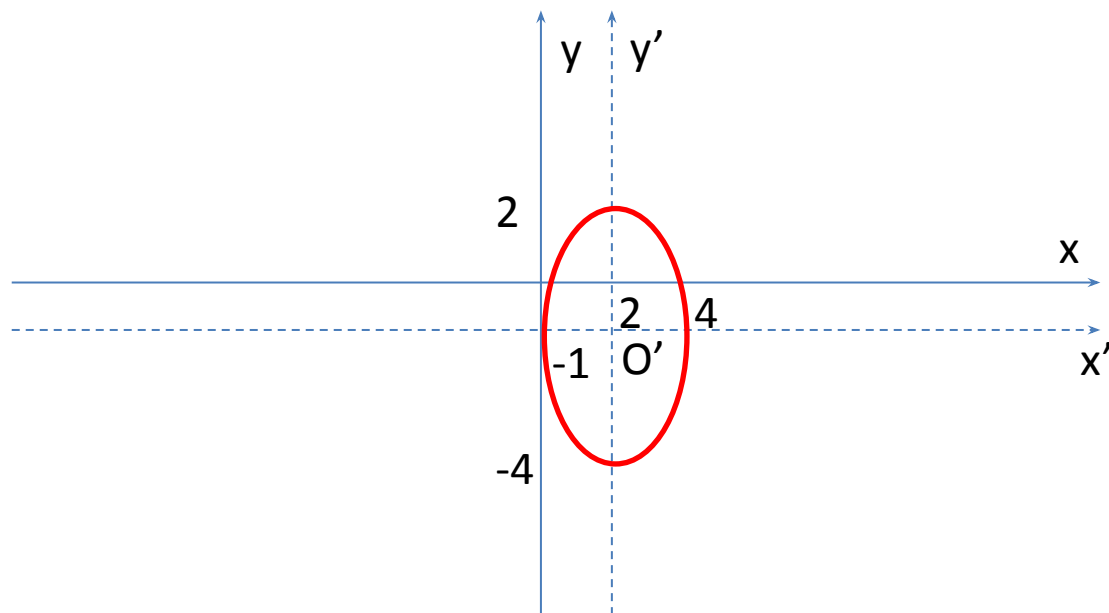
Каноническое уравнение

- $$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

Оси координат смещены на 2 ед. отрезка
вправо и на 1 ед. отрезок вниз



Расположение эллипса

относительно координатных осей

1) Если $a > b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a - большая полуось

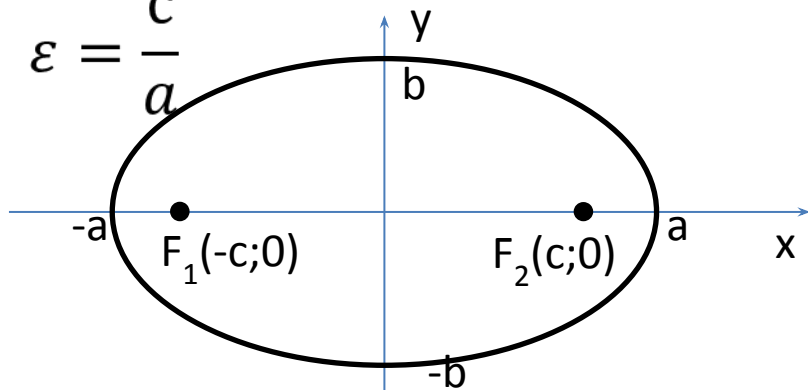
b - меньшая полуось

$F_1 F_2 = 2c$ - фокусное
расстояние

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ – фокусы

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$



2) Если $a < b$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

b - большая полуось

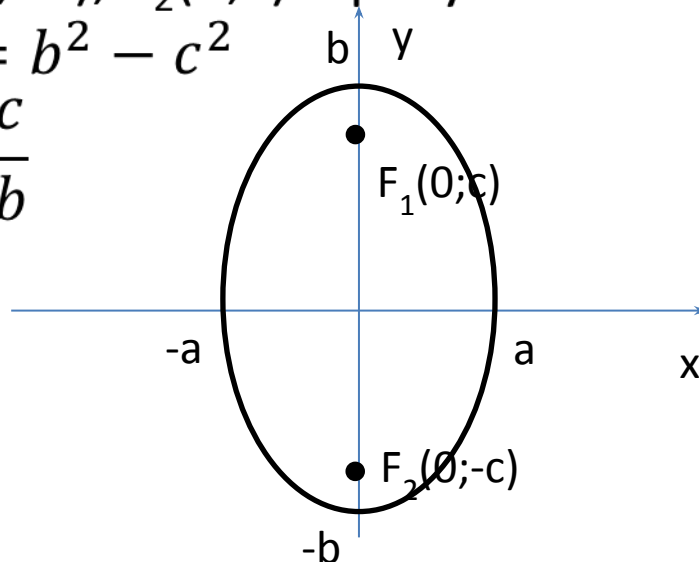
a - меньшая полуось

$F_1 F_2 = 2c$ - фокусное расстояние

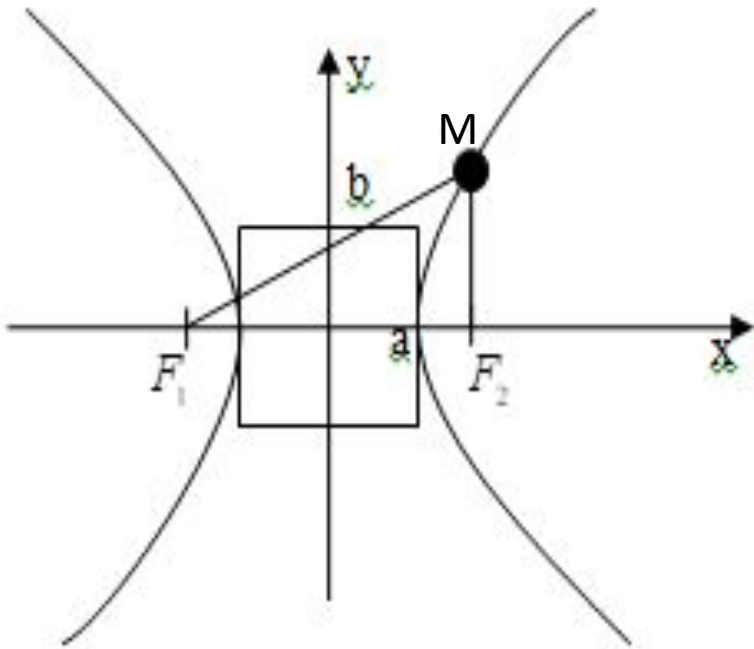
$F_1(0; -c), F_2(0; c)$ – фокусы

$$a^2 = b^2 - c^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{b}$$



Гипербола



F_1, F_2 - фокусы

F_1F_2 - фокусное расстояние ($2c$)

$$|F_1M - MF_2| = 2a$$

a - действительная полуось

$$b^2 = c^2 - a^2 -$$

b - мнимая полуось

Каноническое уравнение
гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Найдем точки пересечения гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, с осями координат

а) с осью Ox , значит $y=0$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

$A(a;0)$, $B(-a;0)$ - точки пересечения с осью Ox

б) с осью Oy , значит $x=0$

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = -b^2$$

Это уравнение не имеет решения, значит точек пересечения с осью Oy нет

Оценим значения переменных x и y

$$\frac{y^2}{b^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

y – может принимать любые значения

Диагонали прямоугольника, со сторонами $x = a, x = -a, y = b, y = -b$, являются асимптотами гиперболы.

Асимптоты задаются уравнениями $y = \pm \frac{b}{a}x$

Гипербола расположена за пределами
прямоугольника со сторонами, $x = a, x = -a, y = b, y = -b$

Алгоритм построения гиперболы

- 1) Найдите значения параметров a и b
- 2) Изобразите координатную плоскость и отметьте значения a и b на осях Ox и Oy соответственно
- 3) Постройте прямоугольник со сторонами
 $x = a, x = -a, y = b, y = -b$
- 4) Проведите диагонали прямоугольника и продлите их за пределами прямоугольника
- 5) Постройте гиперболу

Например, изобразите гиперболу, заданную уравнением

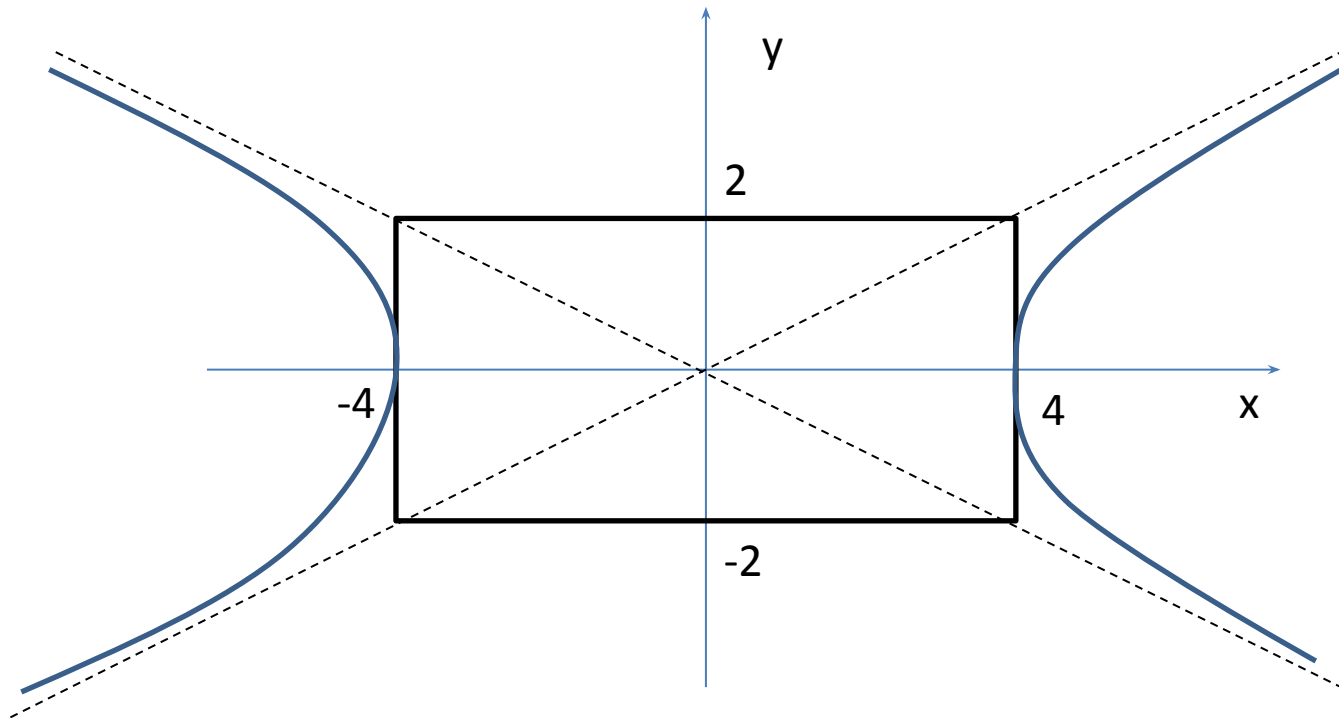
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Решение:

Найдем значения параметров a и b

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$



Определение: Эксцентриситетом гиперболы (ε) называют отношение фокусного расстояния к длине большей оси $\varepsilon = \frac{c}{a}$

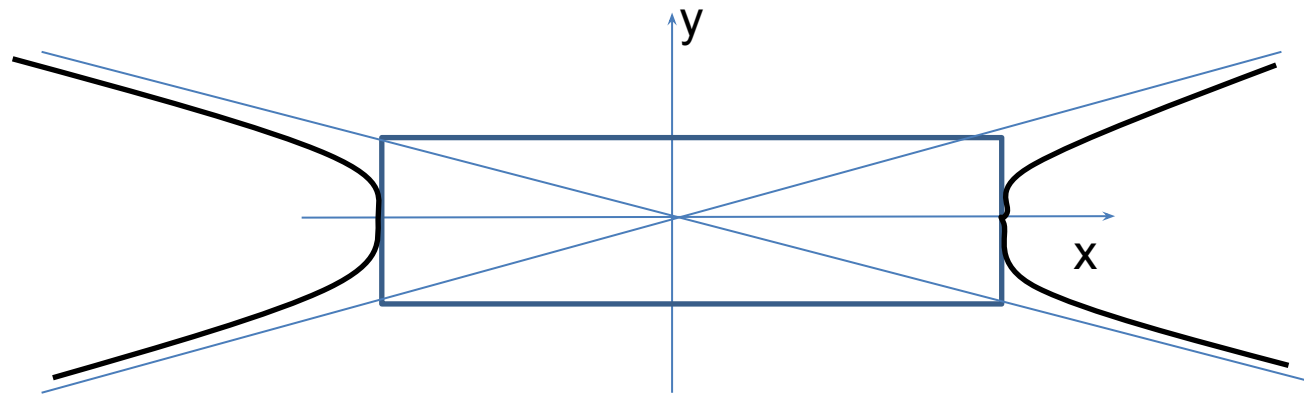
т.к. $a < c$, то $\varepsilon \geq 1$

Влияние эксцентриситета на форму гиперболы:

1) Если $\varepsilon \approx 1$, то $\frac{c}{a} \approx 1 \Rightarrow c \approx a$, значит

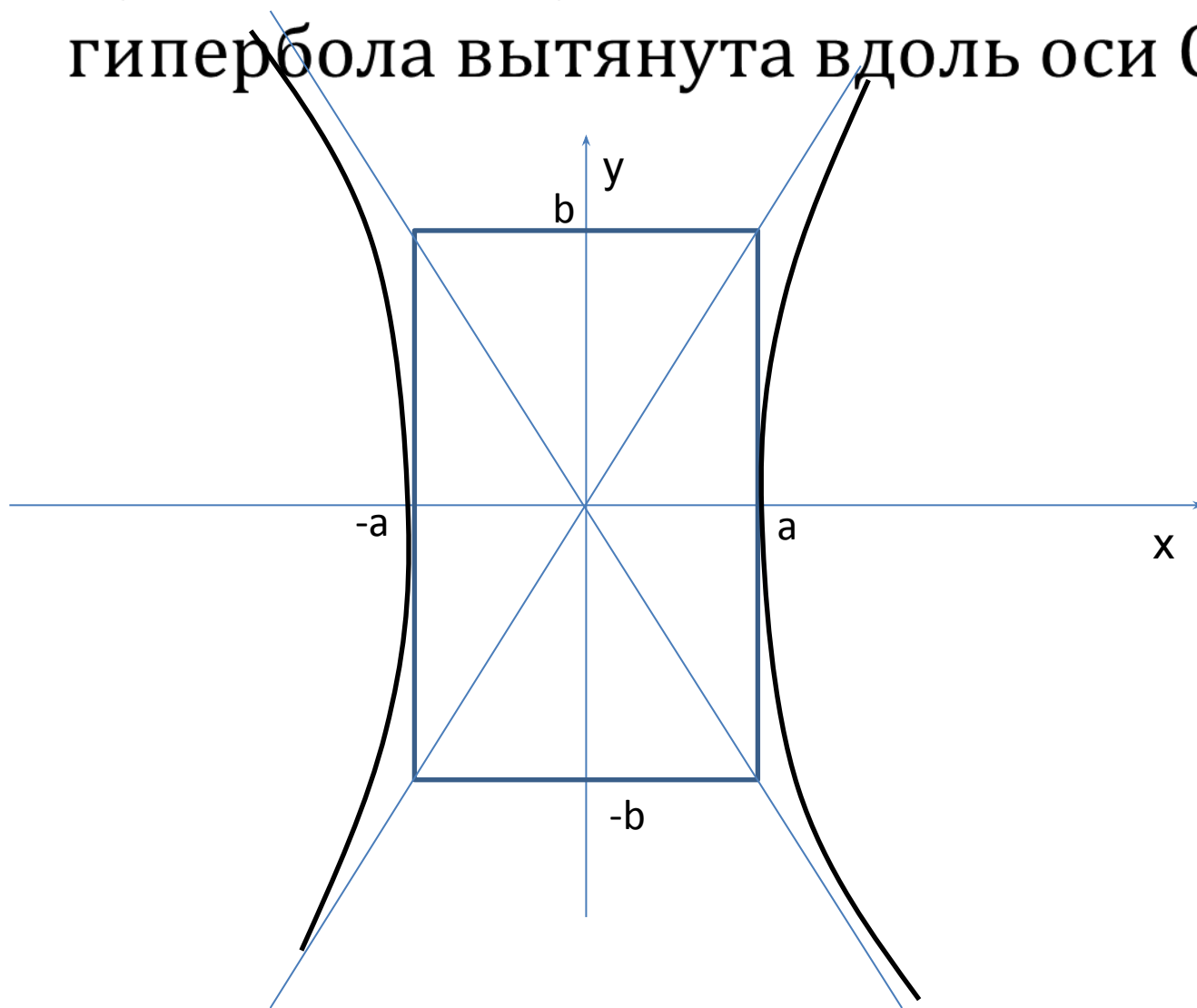
$b \approx 0$ ($b^2 = c^2 - a^2$) \Rightarrow

Гипербола сжата вдоль оси Ox



2) Если $\varepsilon \gg 1$, то $\frac{c}{a} \gg 1 \Rightarrow c \gg a$, значит
 $b \gg a$ ($b^2 = c^2 - a^2$) \Rightarrow

гипербола вытянута вдоль оси Ox



Расположение гиперболы относительно осей координат

Если $a > b$, то гипербола задается

уравнением: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a - действительная полуось

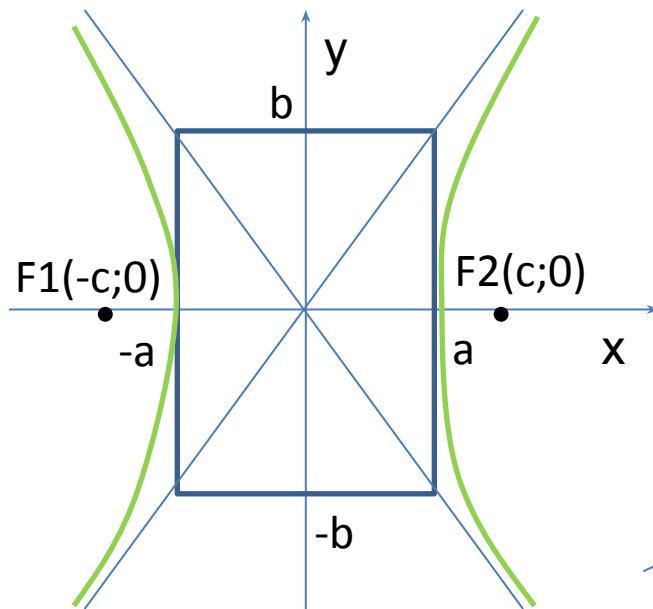
b - мнимая полуось

$F_1F_2=2c$ - фокусное расстояние

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – уравнения асимптот



Если $a < b$, то гипербола задается

уравнением: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

a -мнимая полуось

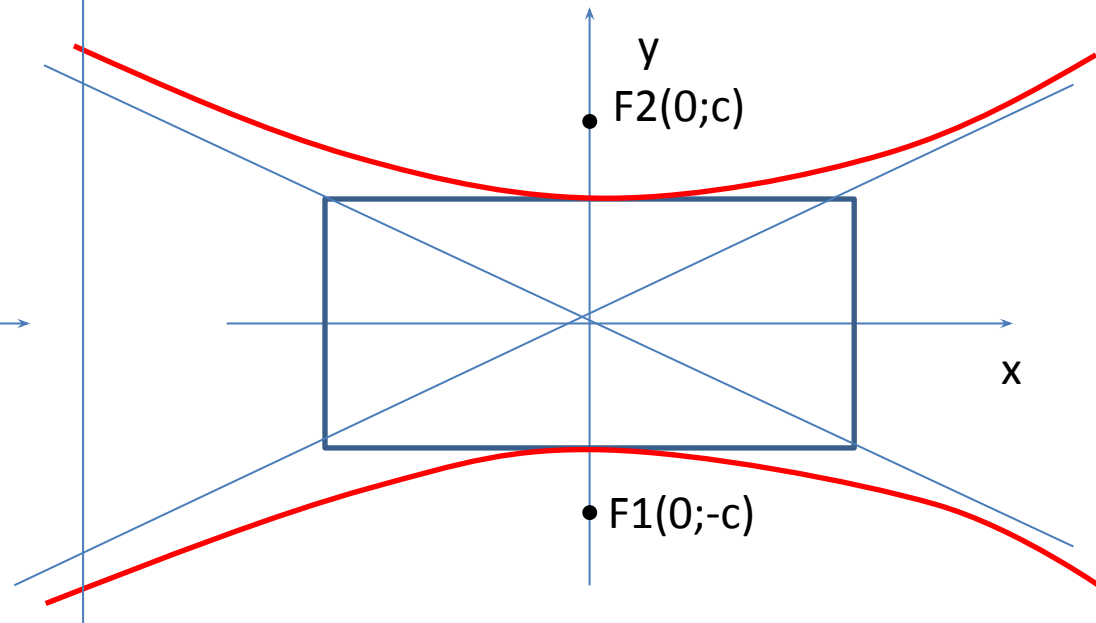
b - действительная полуось

$F_1F_2=2c$ - фокусное расстояние

$F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ – фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{b}$ - эксцентриситет

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – уравнения асимптот



Приведите уравнение

$$25y^2 - 100y - 4x^2 - 24x = 36$$

к каноническому виду и изобразите кривую второго
порядка

Решение:

Выделим полный квадрат

$$(25y^2 - 100y) - (4x^2 + 24x) = 36$$

$$25(y^2 - 4y) - 4(x^2 + 6x) = 36$$

$$25(y^2 - 4y + 4) - 100 - 4(x^2 + 6x + 9) - 36 = 36$$

$$25(y - 2)^2 - 4(x + 3)^2 = 100$$

$$\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x + 3)^2}{25} = 1$$

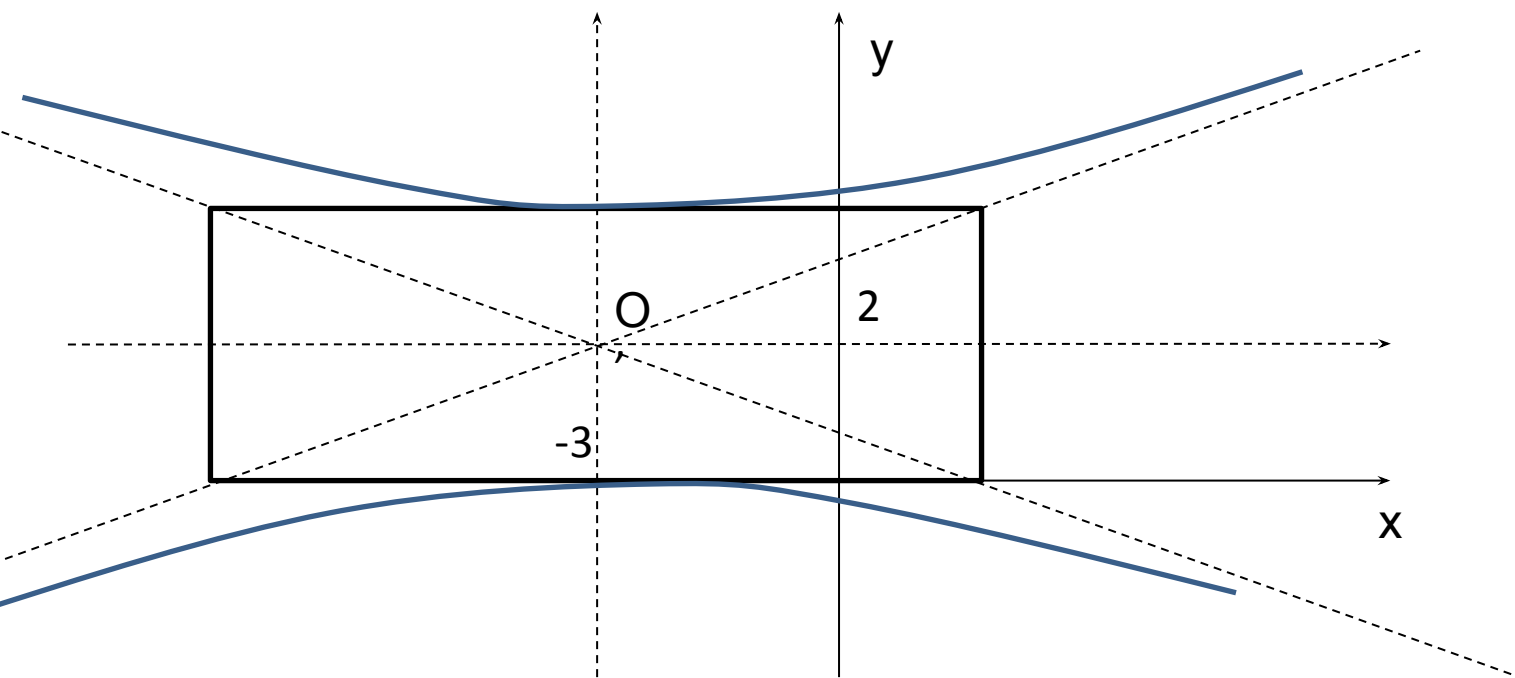
Каноническое уравнение гиперболы

Изобразим эту гиперболу:

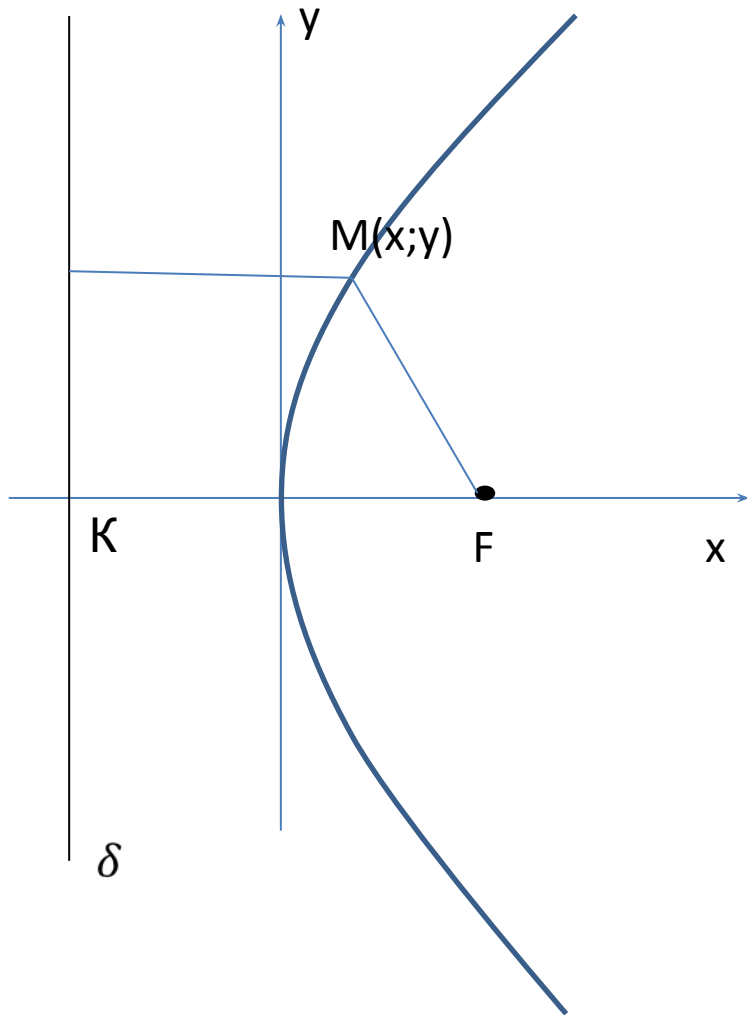
$$\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x + 3)^2}{25} = 1$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2; \quad a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

Оси координат смещены на 3 ед. отрезка влево и на 2 ед. отрезок вверх



Парабола



Определение: **Параболой** называют множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы)

Пусть $FK=p$, тогда

$F(\frac{p}{2}; 0)$ - фокус

$\delta: x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы

Каноническое уравнение параболы имеет вид:
 $y^2 = 2px$, или $x^2 = 2py$

Например, изобразите параболу, заданную уравнением $y^2 = 4x$

Решение:

Найдем значение параметра p

$$2p = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow \frac{p}{2} = 1$$

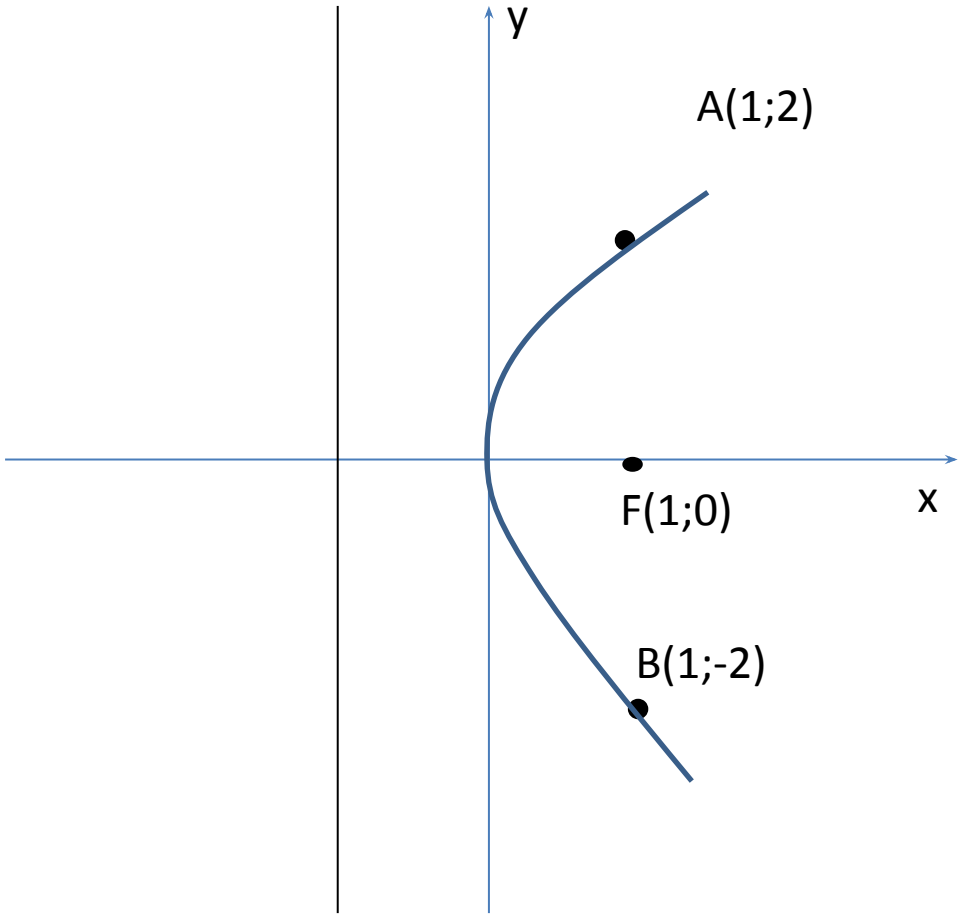
$F(1;0)$ – фокус,

$\delta: x = -1$ – уравнение директрисы

Найдем координаты точек, через которые пройдет параболы

Пусть $x = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$A(1;2)$, $B(1;-2)$

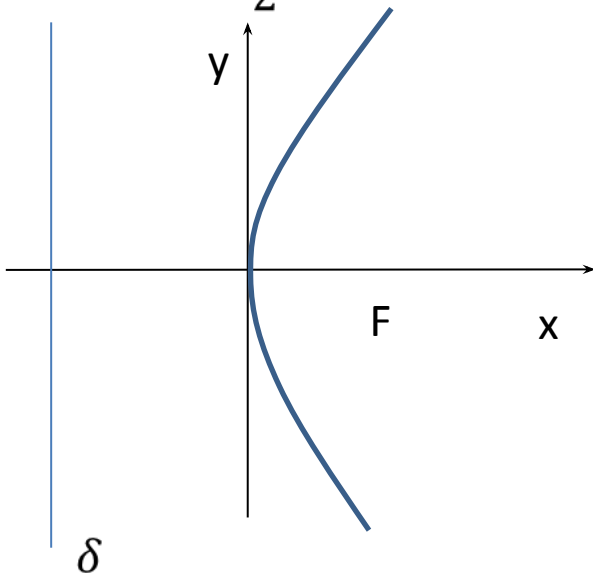


Расположение параболы относительно осей координат

1) $y^2 = 2px$, при $p > 0$

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус

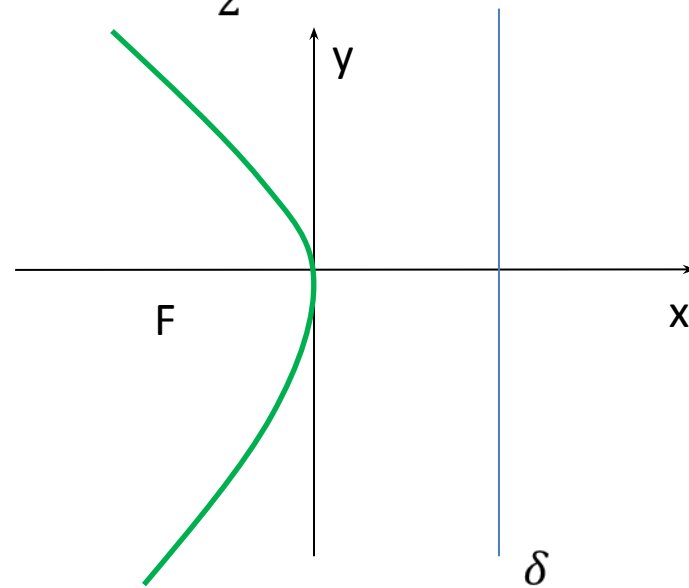
$\delta: x = -\frac{p}{2}$ – директрисса



2) $y^2 = 2px$, при $p < 0$

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус

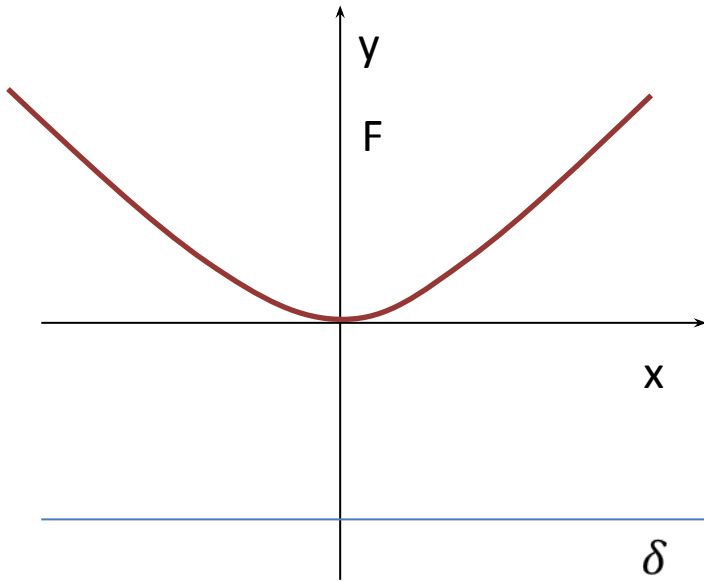
$\delta: x = -\frac{p}{2}$ – директрисса



3) $x^2 = 2py$, при $p > 0$

$F(0; \frac{p}{2})$ – фокус

$\delta: y = -\frac{p}{2}$ – директрисса



4) $x^2 = 2py$, при $p < 0$

$F(0; \frac{p}{2})$ – фокус

$\delta: y = -\frac{p}{2}$ – директрисса

