920.1ис 920.2ис

Предмет: Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Вопрос 1. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A), \ldots, P_{B_n}(A)$ события A. Как найти вероятность события A? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Пример 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

Решение. Обозначим через A событие «извлеченная деталь стандартна».

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(B_1)=1/2$.

Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(B_2)=1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A)=0,8$.

Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_2}(A)=0,9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)=$$
$$=0,5\cdot 0,8+0,5\cdot 0,9=0,85.$$

Вопрос 2. Формулы Бейеса.

т. е. условная вероятность любой гипотезы B_i ($i=1, 2, \ldots, n$) может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\,P_{B_i}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\,P_{B_n}(A)}.$$

Полученные формулы называют *формулами Бейеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). *Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.*

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);
2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A) + P(B_2)\,P_{B_2}(A)}.$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1) = 0{,}6$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2) = 0{,}4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность

$$P_A(B_1) = (0{,}6 \cdot 0{,}94)/(0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98) \approx 0{,}59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.