

Определение
КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ
ЧИСЛАМИ

Определение

Мнимые числа, которыми мы дополняем действительные числа, записываются в виде bi , где i – мнимая единица, причем $i^2 = -1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b - действительные числа. При этом выполняются условия:

а) Два комплексных числа $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

б) Сложение комплексных чисел определяется правилом:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

в) Умножение комплексных чисел определяется правилом:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число

Комплексное число $a + bi$ считается равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$

Комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ считается совпадающим с действительным числом a :

$$a + 0i = a$$

Комплексное число $a + bi$ при $a = 0$ называется чисто мнимым и обозначается bi :

$$0 + bi = bi$$

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $z = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1) Сложение комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z , действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2 , а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2 , то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми

Свойства сложения комплексных чисел

1. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Комплексное число $-a - bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$

Комплексное число, противоположное комплексному числу z , обозначается $-z$

$$z + (-z) = 0$$

ПРИМЕР 1

Выполните сложение $(3 - i) + (-1 + 2i)$

$$(3 - i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2)i = 2 + 1i$$

2) Вычитание комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2 , значит найти такое комплексное число z , что $z + z_2 = z_1$

ТЕОРЕМА:

Разность комплексных чисел существует и притом единственная

ПРИМЕР 2

Выполните вычитание $(4 - 2i) - (-3 + 2i)$

$$(4 - 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2)i = 7 - 4i$$

3) Умножение комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Произведением комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z , определяемое равенством:

$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Числа z_1 и z_2 называются **сомножителями**

Свойства умножения комплексных чисел

1. Коммутативность: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

2. Ассоциативность: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

3. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

$$4. z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части

В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму

ПРИМЕР 3

Выполните умножение $(2 + 3i)(5 - 7i)$

1 способ

$$(2 + 3i)(5 - 7i) = (2 \cdot 5 - 3 \cdot (-7)) + (2 \cdot (-7) + 3 \cdot 5)i = (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i$$

2 способ

$$(2 + 3i)(5 - 7i) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-7i) + 3i \cdot 5 + 3i \cdot (-7i) = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$$

4) Деление комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2 , значит найти такое комплексное число z , что $z \cdot z_2 = z_1$

ТЕОРЕМА:

Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \end{aligned}$$

В следующем примере выполним деление по формуле и правилу умножения на число, сопряженное знаменателю

ПРИМЕР 4

Найти частное $\frac{2-3i}{5+2i}$

1 способ:

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2}{5^2 + 2^2} + \frac{5 \cdot (-3) - 2 \cdot 2}{5^2 + 2^2} i = \frac{10-6}{25+4} + \frac{-15-4}{25+4} i = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i$$

ПРИМЕР 4

Найти частное $\frac{2-3i}{5+2i}$

2 способ:

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{10-4i-15i-6}{5^2-(2i)^2} = \frac{4-19i}{25+4} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$$

5) Возведение комплексных чисел в целую положительную степень

Степени мнимой единицы

$$j^2 = -1,$$

$$j^3 = j^2 j = -j,$$

$$j^4 = j^2 j^2 = 1,$$

$$j^5 = j^4 j = j,$$

$$j^6 = j^4 j^2 = -1,$$

$$j^7 = j^5 j^2 = -j,$$

$$j^8 = j^6 j^2 = 1$$

...

ПРИМЕР 5

Вычислите: $(j^{36} + j^{17}) \cdot j^{23}$

$$j^{36} = (j^4)^9 = 1^9 = 1$$

$$j^{17} = j^{4 \cdot 4 + 1} = (j^4)^4 \cdot j = 1 \cdot j = j$$

$$j^{23} = j^{4 \cdot 5 + 3} = (j^4)^5 \cdot j^3 = 1 \cdot j^3 = -j$$

$$(j^{36} + j^{17}) \cdot j^{23} = (1 + j)(-j) = -j + 1 = 1 - j$$

Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей

ПРИМЕР 6

Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$$(4 + 2i)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 2i + 3 \cdot 4 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i$$

ПРИМЕР 7

Решить уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$

Решение: Найдем дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$

Так как $a = 1$, $b = -6$, $c = 13$, то

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$$

Корни уравнения находим по формулам

$$x = \frac{6 - 4i}{2} \quad x = \frac{6 + 4i}{2}$$

Найти корни квадратного уравнения $iz^2 + (3 - 2i)z - 6 = 0$

Решение: на первом месте расположена мнимая единица, и, в принципе, от неё можно избавиться (умножая обе части на i), однако, в этом нет особой надобности.

Для удобства выпишем коэффициенты: $a = i; b = 3 - 2i; c = -6$

Не теряем «минус» у свободного члена! ...Может быть не всем понятно – перепишу уравнение в стандартном виде $az^2 + bz + c = 0$: $iz^2 + (3 - 2i)z + (-6) = 0$

Вычислим дискриминант:

$$D = 9 - 12i + 4i^4 + 24i = (3 + 2i)^2$$

А вот и главное препятствие:

$$\sqrt{D} = \pm(3 + 2i)$$

Находим корни, не забывая, кстати, что $a = i$:

$$z_1 = \frac{2i - 3 + (3 + 2i)}{2i} = 2$$

$$z_2 = \frac{2i - 3 - (3 + 2i)}{2i} = \frac{3}{i}$$

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = \frac{3}{i}$$

Ответ: $z_1 = 2, z_2 = \frac{3}{i}$.