Определение комплексного числа. Действия с комплексными числами

Определение

Мнимые числа, которыми мы дополняем действительные числа, записываются в виде *bi*, где *i* – мнимая единица, причем $i^2 = -1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b - действительные числа. При этом выполняются условия:

а) Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

б) Сложение комплексных чисел определяется правилом:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

в) Умножение комплексных чисел определяется правилом:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число

Комплексное число $a + bi$ считается равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$

Комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ считается совпадающим с действительным числом a:
$a + 0i = a$

Комплексное число $a + bi$ при $a = 0$ называется чисто мнимым и обозначается bi:
$0 + bi = bi$

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $z = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1) Сложение комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2, то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми

Свойства сложения комплексных чисел

1. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

3. Комплексное число $-a - bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$

Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$

$z + (-z) = 0$

ПРИМЕР 1

Выполните сложение $(3 - i) + (-1 + 2i)$

$$(3 - i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2)\, i = 2 + 1i$$

2) Вычитание комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$

ТЕОРЕМА:

Разность комплексных чисел существует и притом единственная

ПРИМЕР 2

Выполните вычитание $(4 - 2i) - (-3 + 2i)$

$$(4 - 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2)\, i = 7 - 4i$$

3) Умножение комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Произведением комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, определяемое равенством:

$z = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1) i$

Числа z_1 и z_2 называются **сомножителями**

Свойства умножения комплексных чисел

1. Коммутативность: $z_1z_2 = z_2z_1$

2. Ассоциативность: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

3. Дистрибутивность умножения относительно сложения:
$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

4. $z \cdot \bar{z} = \left(a+bi\right)\left(a-bi\right) = a^2 + b^2$

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части

В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму

ПРИМЕР 3

Выполните умножение (2 + 3*i*) (5 – 7*i*)

1 способ

$$(2+3i)(5-7i)=(2\cdot 5-3\cdot(-\ 7))+(2\cdot(-7)+3\cdot 5)i=(10+21)+(-14+15)i=31+i$$

2 способ

$$(2+3i)(5-7i)=2\cdot 5+2\cdot(-7i)+3i\cdot 5+3i\cdot(-7i)=10-14i+15i+21=31+i$$

4) Деление комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$

ТЕОРЕМА:

Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

В следующем примере выполним деление по формуле и правилу умножения на число, сопряженное знаменателю

ПРИМЕР 4

Найти частное $\dfrac{2-3i}{5+2i}$

1 способ:

$$\frac{2-3i}{5+2i}=\frac{2\cdot 5+(-3)\cdot 2}{5^2+2^2}+\frac{5\cdot(-3)-2\cdot 2}{5^2+2^2}i=\frac{10-6}{25+4}+\frac{-15-4}{25+4}i=\frac{4}{29}-\frac{19}{29}i$$

ПРИМЕР 4

Найти частное $\dfrac{2-3i}{5+2i}$

2 способ:

$$\frac{2-3i}{5+2i}=\frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)}=\frac{10-4i-15i-6}{5^2-(2i)^2}=\frac{4-19i}{25+4}=\frac{4}{29}-\frac{19}{29}i$$

5) Возведение комплексных чисел в целую положительную степень

Степени мнимой единицы

$i^2 = -1$,

$i^3 = i^2\, i = -i$,

$i^4 = i^2\, i^2 = 1$,

$i^5 = i^4\, i = i$,

$i^6 = i^4\, i^2 = -1$,

$i^7 = i^5\, i^2 = -i$,

$i^8 = i^6\, i^2 = 1$

…

ПРИМЕР 5

Вычислите: $\left(i^{36}+i^{17}\right)\cdot i^{23}$

$$i^{36}=\left(i^{4}\right)^{9}=1^{9}=1$$

$$i^{17}=i^{4\cdot 4+1}=\left(i^{4}\right)^{4}\cdot i=1\cdot i=i$$

$$i^{23}=i^{4\cdot 5+3}=\left(i^{4}\right)^{5}\cdot i^{3}=1\cdot i^{3}=-i$$

$$\left(i^{36}+i^{17}\right)\cdot i^{23}=\left(1+i\right)\left(-i\right)=-i+1=1-i$$

Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей

ПРИМЕР 6

Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$$(4+2i)^3 = 4^3 + 3\cdot 4^2 \cdot 2i + 3\cdot 4\cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i$$

ПРИМЕР 7

Решить уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$

Решение: Найдем дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$

Так как $a = 1$, $b = -6$, $c = 13$, то

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$$

Корни уравнения находим по формулам

$$x = \frac{6 - 4i}{2} \qquad x = \frac{6 + 4i}{2}$$

Найти корни квадратного уравнения $iz^2 + (3-2i)z - 6 = 0$

Решение: на первом месте расположена мнимая единица, и, в принципе, от неё можно избавиться (умножая обе части на i), однако, в этом нет особой надобности.

Для удобства выпишем коэффициенты: $a = i; b = 3 - 2i; c = -6$

Не теряем «минус» у свободного члена! ...Может быть не всем понятно − перепишу уравнение в стандартном виде $az^2 + bz + c = 0$: $iz^2 + (3-2i)z + (-6) = 0$

Вычислим дискриминант:

$$D = 9 - 12i + 4i^4 + 24i = (3+2i)^2$$

А вот и главное препятствие:

$$\sqrt{D} = \pm(3 + 2i)$$

Находим корни, не забывая, кстати, что $a = i$:

$$z_1 = \frac{2i - 3 + (3 + 2i)}{2i} = 2$$

$$z_2 = \frac{2i - 3 - (3 + 2i)}{2i} = \frac{3}{i}$$

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = \frac{3}{i}$$

Ответ: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{3}{i}$.