- МЧС РОССИИ
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОП
СЛУЖБЫ

Кафедра прикладной математики и информационных технологий

Многокритериальная оптимизация

для обучающихся по направлению подготовки

«Системный анализ и управление»

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

ПРОВЕДЕНИЯ ЛЕКЦИИ

по учебной дисциплине

«**Методы многокритериальной оптимизации**»

Направление подготовки
27.04.03 «Системный анализ и управление»
(квалификация (степень) магистр)
Заочная форма обучения

Тема №1. Начальные понятия многокритериальной оптимизации

Занятие № 2. Обзор методов многокритериальной оптимизации

Учебные вопросы.

1. Оптимизация основного частного критерия
2. Метод взвешенной суммы оценок частных критериев
3. Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив.
4. Минимаксный критерий
5. Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив.
6. Метод Гурвица.
7. Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив.
8. Формат метода среднего геометрического.
9. Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив.
10. Модификация метода среднего геометрического.
11. Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив.
12. Постановка задачи стохастического программирования М- и Р- постановки задачи СП.

1. Оптимизация основного частного критерия

При таком подходе среди частных критериев выделяется один, который принимается как основной или исключительно важный: на его основе будут реализованы процедуры оптимизации. Остальные частные критерии будут учтены следующим образом. В формате их показателей ЛПР указывает предельно допустимые значения (учитывается имеющийся опыт бизнеса). Пусть критерий $g^{(1)}(\vec{x})$ является основным. Тогда исходная задача многокритериальной оптимизации (все частные критерии минимизируются) в формате рассматриваемого здесь подхода сводится к однокритериальной задаче следующим образом:

$$g^{(1)}(\vec{x}) \to \min$$

при ограничениях $g^{(k)}(\vec{x}) \le g_k$, $k=\overline{2,N}$, $\vec{x} \in X$, где g_k – задаваемые ЛПР предельно допустимые значения для показателей частных критериев (кроме основного).

Вместо исходной многокритериальной задачи оптимизации в формате подхода, называемого методом оптимизации основного частного критерия, решается скалярная задача оптимизации одной функции (основного частного критерия). При этом система ограничений модифицируется с учетом всех остальных частных критериев. Если найденное минимальное значение достигается при двух или более альтернативных решениях, то требуется проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето.

ПРИМЕР 2.2. Анализируется ситуация, связанная с моделированием работы звена цепи поставок, когда нужно выбрать наилучший вариант организации поставок товара из семи доступных и возможных вариантов A, B, C, D, E, F и G. Множество частных критериев задано четырьмя критериями. Частные критерии минимизируются. Оценки частных критериев заданы (в тыс. у.е.) в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

Оценки / показатели частных критериев для примера 2.2.

Альтернативные решения	Оценки частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Мы уже знаем (см. пример 1.1), что в рассматриваемом примере альтернативы A, B, C, F и G являются оптимальными по Парето. Найдем среди них наилучшее решение по методу оптимизации основного частного критерия. Упростим таблицу 2.1, удалив альтернативы D и E (не оптимальные по Парето). Результат представлен в таблице 2.2.

Таблица 2.2.

Показатели частных критериев для альтернатив оптимальных по Парето.

Альтернативные решения	Оценки частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Пусть в качестве основного частного критерия принят критерий $g^{(1)}$. Для остальных трех частных критериев ЛПР задает следующие ограничения: $g^{(2)} \leq 35$, $g^{(3)} \leq 150$, $g^{(4)} \leq 30$. Другими словами, в данном случае $g_2 = 35$, $g_3 = 150$ и $g_4 = 30$. Задача многокритериальной оптимизации будет преобразована к виду:

$$g^{(1)}(\vec{x}) \rightarrow \min$$

при ограничениях $g^{(2)}(\vec{x}) \leq 35$; $g^{(3)}(\vec{x}) \leq 150$; $g^{(4)}(\vec{x}) \leq 30$; $\vec{x} \in \{A, B, C, F, G\}$.

Для нахождения оптимального решения сначала обеспечим выполнение требуемой системы ограничений: удаляем альтернативы A и G. Альтернатива A не может быть рассмотрена, т.к. не удовлетворяет ограничениям по частному критерию $g^{(3)}$. Альтернатива G не может быть рассмотрена, т.к. не удовлетворяет ограничениям по частному критерию $g^{(2)}$. Получаем новую таблицу 2.3.

Таблица 2.3.

Показатели частных критериев для альтернатив оптимальных по Парето (удовлетворяющих системе ограничений).

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
F	43	32	147	27

Теперь согласно процедурам рассматриваемого метода оптимизации в формате оставшегося множества допустимых альтернативных решений находится наилучшая альтернатива по основному частному критерию $g^{(1)}(\vec{x})$. Она определяется по наименьшему показателю среди оставшихся элементов в первом столбце (этот столбец соответствует показателям основного частного критерия $g^{(1)}$). Нетрудно видеть, что выбор попадает на альтернативу В. Она и будет принята в качестве оптимальной (т.е. в качестве оптимального решения) в рамках метода оптимизации по основному частному критерию.

Метод взвешенной суммы оценок частных критериев

При таком подходе критерий выбора $F(\vec{x})$ формализуется как взвешенная сумма оценок частных критериев:

$$F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot g^{(k)}(\vec{x}).$$

Здесь c_k – вес k-го критерия, задаваемый, например экспертами или непосредственно лицом, принимающим решение. При этом учитывается и имеющийся опыт бизнеса, и особенности частных критериев, и особенности исходной рассматриваемой задачи многокритериальной оптимизации.

Указанная функция $F(\vec{x})$ исследуется на минимум (для задач многокритериальной оптимизации, представленных в стандартном виде, когда все частные критерии минимизируются) методами высшей математики. Точка минимума функции $F(\vec{x})$ принимается в качестве оптимального решения в рамках этого подхода к решению исходной задачи. Если найденное минимальное значение критериальной функции достигается при двух или более альтернативных решениях, то в качестве оптимального может быть выбрано любое из них: все они будут оптимальными о Парето.

2. Процедуры критерия взвешенной суммы в формате дискретного множества альтернатив.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Теперь обратимся к формату задач многокритериальной оптимизации по методу взвешенной суммы оценок частных критериев, которые имеют дискретное множество анализируемых альтернатив. Соответственно процедуры оптимизации в формате рассматриваемого метода будут следующими.

1) К таблице, где для всех анализируемых альтернативных решений представлены (вдоль строк) показатели частных критериев, приписывается дополнительный столбец.
2) Для каждой альтернативы определяются показатели «линии уровня» критерия: это взвешенная сумма элементов каждой строки (веса определены в формате критерия и соотносятся со столбцами таблицы). Указанные показатели критерия выбора для конкретной альтернативы записываются в дополнительный столбец (они соотносятся с соответствующей альтернативой по строке).

3) Наконец, по элементам дополнительного столбца находится оптимальное альтернативное решение по методу взвешенной суммы оценок критериев: оно соответствует (по строке) именно наименьшему из всех элементов указанного дополнительного столбца.

Таблица 2.4.

Выбор наилучшего решения по методу взвешенной суммы оценок частных критериев.

Альтернативные решения	Значения частных критериев				Показатель общего критерия $\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot g^{(k)}$
	$g^{(1)}$ $c_1=1$	$g^{(2)}$ $c_2=1$	$g^{(3)}$ $c_3=0,3$	$g^{(4)}$ $c_4=1$	
A	45	27	159	29	154
B	40	34	148	28	150, (6)
C	42	35	126	24	143
D	41	34	170	28	159, (6)
E	45	35	146	26	154,(3)
F	43	32	147	27	151
G	42	36	122	25	**140,(6)**

РЕШЕНИЕ. К таблице с показателями частных критериев уже приписан дополнительный столбец. В нем представлены показатели критерия выбора. Для удобства изложения весовые коэффициенты также представлены в ячейках таблицы с обозначениями частных критериев. По минимальному элементу дополнительного столбца (он равен $140\frac{2}{3}$ и выделен в таблице) находим оптимальное решение. Наилучшей (по методу взвешенной суммы оценок частных критериев) является альтернатива G.

1. Минимаксный критерий.

При таком подходе на основе заданных частных критериев для исходной многокритериальной задачи формируется критерий выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \max_{1 \le k \le N} \{g^{(k)}(\vec{x})\}.$$

Соответственно точка минимума этой критериальной функции $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение. Если найденное минимальное значение достигается при двух или более альтернативных решениях, то требуется проверка выбираемого решения на оптимальность по Парето.

2. Процедуры минимаксного критерия в формате дискретного множества альтернатив.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если множество анализируемых альтернатив является дискретным, то удобно использовать табличное представление задачи многокритериальной оптимизации. Соответственно процедуры оптимизации по минимаксному критерию будут следующими (*частные критерии минимизируются*).

1) К матрице оценок частных критериев приписывается дополнительный столбец.
2) В указанный столбец записывают максимальные из значений оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные элементы по строкам таблицы).
3) Затем из всех элементов этого дополнительного столбца выбирается наименьший (образно говоря, «из всех зол выбирают наименьшее»).

4) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации.
5) Если наименьший показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативах, то наилучшей может быть любая из них, но только оптимальная по Парето.

ПРИМЕР 2.9. Рассмотрим ситуацию, представленную в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (A, B, C, D, E, F и G). Множество частных критериев задано четырьмя критериями: они минимизируются. Показатели оценок указанных частных критериев (в тыс. у.е.) для удобства изложения приведены в таблице 2.5. Требуется: найти наилучшую альтернативу по минимаксному критерию.

Таблица 2.5.

Выбор наилучшего решения по минимаксному критерию.

Альтернативные решения	Значения частных критериев				Max $\{g^{(k)}\}$
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
A	45	27	159	29	159
B	40	34	148	28	148
C	42	35	126	24	126
D	41	34	170	28	170
E	45	35	146	26	146
F	43	32	147	27	147
G	42	36	122	25	122

РЕШЕНИЕ. К таблице со значениями оценок частных критериев приписываем дополнительный столбец (в таблице 2.5 это – столбец «max $g^{(k)}$»). В нем записываем максимальные из значений оценок частных критериев по строкам такой таблицы (они соответствуют каждому из вариантов альтернативных решений). Среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 122 (выделен в таблице жирным шрифтом) и ответствует альтернативе G (по строке матрицы). В рассматриваемом случае альтернатива G принимается в качестве оптимальной по минимаксному критерию.

2. Процедуры критерия Гурвица в формате дискретного множества альтернатив.

При формализации такого критерия выбора используется специальный метод / прием, который был разработан Л.Гурвицем применительно к решению задач другого типа: задач оптимизации решений в условиях неопределенности. В формате такого подхода имеется управляющий параметр, который позволяет менеджеру регулировать положение линий уровня критерия выбора. В этом параграфе будет проиллюстрировано, как такой подход можно использовать, чтобы позволить менеджеру более эффективно адаптировать линии уровня критерия выбора в поле издержек / потерь применительно к условиям бизнеса, специфике решаемой задачи многокритериальной оптимизации и имеющимся у ЛПР предпочтениям к оценкам частных критериев. Подчеркнем, что сегодня любой менеджер должен свободно владеть соответствующими методами и приемами. Это позволит в дальнейшем создавать соответствующие новые модификации, чтобы обеспечить такой выбор альтернативного решения при многих критериях, который действительно будет боле эффективным образом соответствовать предпочтениям и требованиям ЛПР.

Мы уже познакомились с подходом к решению задач многокритериальной оптимизации, когда конструируемый показатель критерия выбора учитывал для каждой альтернативы только оценку одного частного критерия, причем именно самую худшую из всех оценок (в формате ожидаемых издержек / потерь). Мы также уже познакомились с подходом к решению задач многокритериальной оптимизации, когда конструируемый показатель критерия выбора учитывал для каждой альтернативы все оценки заданных частных критериев. При этом такой учет был реализован на основе взвешенного результата оценок всех частных критериев. В конце 60-х годов прошлого столетия Л.Гурвиц предложил при конструировании показателя критерия выбора использовать / синтезировать именно две оценки особого типа. Применительно к рассматриваемой проблеме решения задач многокритериальной оптимизации (при минимизации частных критериев) это – следующие оценки:

- самая худшая / наибольшая из всех оценок заданных частных критериев (как и в формате рассмотренного выше минимаксного критерия);
- самая лучшая / наименьшая из всех оценок заданных частных критериев.

При этом конструировать результирующий показатель для рассматриваемого здесь критерия выбора по методу Гурвица требуется как взвешенный показатель на основе синтеза указанных выше двух крайних типов оценок. Эти “крайние” (самый неблагоприятный и самый благоприятный) результаты учитываются с определёнными “весами”, выбираемыми непосредственно самим ЛПР. При таком подходе их синтез позволит задавать приемлемый для ЛПР баланс для положения линий уровня в пространстве издержек / потерь (будет проиллюстрировано далее). Другими словами, при этом критерии выбора ЛПР как бы “взвешивает” для каждой альтернативы две крайние ее оценки, которые имеются по всем заданным частным критериям в формате задачи оптимизации при многих критериях. Выбирается решение, применительно к которому такая “взвешенная” или синтезированная оценка будет наименьшей (т.к. она относится к минимизируемым показателям издержек / потерь).

При таком подходе критериальная функция $F(\vec{x})$ для критерия выбора имеет вид:

$$F(\vec{x}) = c\cdot \max \{g^{(k)}(\vec{x})\} + (1-c)\cdot\min\{g^{(k)}\},$$

где максимум и минимум ищутся по всем частным критериям, а $c\in [0;1]$ – параметр, который выбирает ЛПР / менеджер (для адаптации линий уровня критерия к предпочтениям ЛПР). Соответственно точка минимума этой функции принимается как искомое оптимальное решение.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. В такой ситуации используют табличное представление задачи многокритериальной оптимизации. Укажем для такого случая требуемые процедуры оптимизации в формате критерия выбора по методу Гурвица.

1) К таблице оценок частных критериев приписывается три дополнительных столбца.
2) В первый записывают максимальные (наихудшие в формате задачи оптимизации) из значений оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. максимальные элементы по строкам таблицы с оценками частных критериев).
3) Во второй записывают наименьшие (наилучшие в формате задачи оптимизации) из значений оценок частных критериев для каждого из вариантов решений (т.е. минимальные элементы по строкам таблицы с оценками частных критериев).

4) В третий записывают средневзвешенный результат для элементов первых двух вспомогательных столбцов с «весами» c и $(1 - c)$. Весовой коэффициент c выбирается ЛПР из множества $c \in [0;1]$; он соотносится именно с тем вспомогательным столбцом, в котором записаны наихудшие из показателей частных критериев (для анализируемых альтернатив).
5) Затем из всех элементов указанного третьего дополнительного столбца выбирается наименьший, поскольку показатели оценок относятся к полю издержек/потерь.
6) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу третьего дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи минимизации частных критериев.

ПРИМЕР 2.12. Вернемся к ситуации примеров 1.1 и 2.2: необходимо выбрать наилучший вариант из семи допустимых альтернативных вариантов (A, B, C, D, E, F и G). При этом множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями: все они минимизируются. Показатели указанных частных критериев заданы (например, в тыс. у.е.) и для удобства изложения приведены в таблице 2.6. Требуется: найти наилучшую альтернативу по методу Гурвица, приняв для «c» значение $c = 0,5$.

Таблица 2.6.

Выбор на основе критерия Гурвица.

Альтернативные решения	Значения частных критериев					$Max\{g^{(k)}\}$	$Min\{g^{(k)}\}$	Показатель критерия выбора
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$				
A	45	27	159	29		159	27	186/2
B	40	34	148	28		148	28	176/2
C	42	35	126	24		126	24	150/2
D	41	34	170	28		170	28	198/2
E	45	35	146	26		146	26	172/2
F	43	32	147	27		147	27	174/2
G	42	36	122	25		122	25	**147/2**

РЕШЕНИЕ. К матрице значений частных критериев приписываем три дополнительных столбца (в таблице 2.6 это – столбцы «max $g^{(k)}$», «min $g^{(k)}$» и последний). В первый столбец записываем максимальные из значений оценок частных критериев по строкам таблицы. Во второй записываем минимальные из значений оценок частных критериев по строкам такой таблицы. В последний третий столбец записываем взвешенные показатели первых двух вспомогательных столбцов с заданными весами (0,5 и 0,5). Среди элементов этого дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 147/2 (выделен в таблице) и ответствует альтернативе G (по строке матрицы). Альтернатива G принимается в качестве оптимальной.

Возможность адаптации параметра «с» для конкретного ЛПР в рамках критерия выбора по методу Гурвица. Зная выбор ЛПР применительно к определённой задаче оптимизации при многих критериях, можно оценивать для него допустимые значения параметра «*с*». Такой подход позволяет уточнять (по результатам имевших место результатов выбора решений) характер линий уровня критерия.

Формат метода среднего геометрического

При таком подходе на основе частных критериев формируется критериальная функция выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^{N} g^{(k)}(\vec{x})} \; .$$

Точка минимума этой функции $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение (в формате задач минимизации частных критериев). Если минимальное значение указанной критериальной функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения может быть выбрано любое из решений, представленных такими точками. Все они будут оптимальными по Парето. Обоснование этого получим при графической интерпретации семейства линий уровня критерия.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Если менеджер использует табличное представление задачи многокритериальной оптимизации, то процедуры оптимизации в формате метода оптимизации по критерию среднего геометрического будут следующими.

1) К таблице с оценками частных критериев приписывается дополнительный столбец.
2) В указанный столбец для каждой альтернативы (т.е. по строкам таблицы) записывают значения среднего геометрического показателя для элементов соответствующей строки.
3) Затем в задачах на минимум из всех элементов этого дополнительного столбца выбирается наименьший такой показатель (в задачах, когда все частные критерии максимизируются ищется наибольший из показателей).

4) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации.
5) Если выбранный показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, т.к. в формате этого критерия такие альтернативы будут оптимальными по Парето (в этом легко убедиться на основе представленной ниже геометрической интерпретации).

Выбор наилучшего решения по критерию среднего геометрического.

Решения	Значения частных критериев				Показатель среднего геометрического
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
A	45	27	159	29	$\sqrt[4]{45 \cdot 27 \cdot 159 \cdot 29} = 48{,}65$
B	40	34	148	28	$\sqrt[4]{40 \cdot 34 \cdot 148 \cdot 28} = 48{,}72$
C	42	35	126	24	$\sqrt[4]{42 \cdot 35 \cdot 126 \cdot 24} = 45{,}92$
D	41	34	170	28	$\sqrt[4]{41 \cdot 34 \cdot 170 \cdot 28} = 50{,}75$
E	45	35	146	26	$\sqrt[4]{45 \cdot 35 \cdot 146 \cdot 26} = 49{,}45$
F	43	32	147	27	$\sqrt[4]{43 \cdot 32 \cdot 147 \cdot 27} = 48{,}34$
G	42	36	122	25	$\sqrt[4]{42 \cdot 36 \cdot 122 \cdot 25} = 46{,}34$

РЕШЕНИЕ. В дополнительный столбец таблицы 3.7 записываем показатели критерия выбора (они найдены по формулам для среднего геометрического). Среди элементов дополнительного столбца выбираем наименьший. Он равен 45,92 (выделен в таблице) и ответствует альтернативе С (по строке таблицы). Таким образом, в рассматриваемом случае альтернатива С и принимается в качестве оптимальной по методу среднего геометрического.

3.3. Модификация метода среднего геометрического

Чтобы в пространстве значений частных критериев изменить выпуклость для семейства линий уровня критерия выбора по методу среднего геометрического, надо изменить формат анализируемых оценок. Применительно к задачам минимизации частных критериев это можно сделать следующим образом. От оценок частных критериев перейдем к оценкам следующего типа. Каждой альтернативе сопоставим оценку для выигрыша, который она обеспечивает (по каждому частному критерию) относительно антиутопической точки АУТ в поле издержек/потерь.

Напомним, что координаты указанной АУТ определяются равенством

$$АУТ = (g_{max}^{(1)};\ g_{max}^{(2)}; \dots ;\ g_{max}^{(N)}),$$

где $g_{max}^{(k)}$ обозначает наихудшее (наибольшее) значение из всех оценок для анализируемых альтернатив по частному критерию $g^{(k)}$, т.е. $g_{max}^{(k)} = \max\{g^{(k)}(\vec{x})\}$. Для конкретного решения $\vec{x}$ из области допустимых решений выигрыш по k-му частному критерию (относительно указанной АУТ) составляет $g_{max}^{(k)} - g^{(k)}(\vec{x})$. Оценки указанного типа будем использовать для нахождения среднего геометрического показателя, определяющего критериальную функцию выбора. Предварительно реализуем требуемую модификацию. Для того, чтобы ни одна из таких оценок для указанных «выигрышей» не была равна нулю, введем понятие модифицированной антиутопической точки ($АУТ_{mod}$). Ее координаты определим на единицу большими, чем координаты АУТ:

$$АУТ_{mod} = (1+g_{max}^{(1)};\ 1+g_{max}^{(2)}; \dots\ 1+g_{max}^{(N)}).$$

Для решения $\vec{x}$ из области допустимых решений выигрыш по k-му частному критерию (относительно указанной $АУТ_{mod}$) составляет $1+g_{max}^{(k)} - g^{(k)}(\vec{x})$. Для таких параметров выигрышей можно определять показатель среднего геометрического. При этом, чем большим будет такой показатель, тем более предпочтительной будет альтернатива (в формате задач минимизации частных критериев).

При таком подходе на основе заданных частных критериев в рамках исходной многокритериальной задачи минимизации частных критериев формируется критерий выбора $F(\vec{x})$ следующим образом:

$$F(\vec{x}) = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^{N} (1 + g_{max}^{(k)} - g^{(k)}(\vec{x}))}.$$

Точка максимума этой критериальной функции выбора $F(\vec{x})$ принимается как искомое оптимальное решение (в формате задач минимизации частных критериев). Если максимальное значение функции достигается не в одной точке, а в двух или более точках, то в качестве оптимального решения может быть выбрано любое из них. Все они будут оптимальными по Парето. Обоснование этого получим при графической интерпретации семейства линий уровня критерия.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Процедуры оптимизации (при табличном представлении задачи многокритериальной оптимизации) по модифицированному критерию среднего геометрического будут следующими.

1) От таблицы с оценками частных критериев переходим к таблице, которая представляет указанные выше параметры «выигрышей» для таких оценок относительно модифицированной антиутопической точки (точка $АУТ_{mod}$ или точка АУТ(mod) в поле издержек / потерь).
2) К такой таблице с указанными параметрами «выигрышей» приписывается дополнительный столбец.
3) В дополнительный столбец для каждой альтернативы (т.е. по строкам таблицы) записывают значения среднего геометрического показателя для элементов соответствующей строки.

4) Затем в задачах многокритериальной оптимизации, когда все частные критерии минимизируются, из элементов этого дополнительного столбца выбирается наибольший такой показатель (в задачах, когда все частные критерии максимизируются можно искать наименьший из показателей).

5) Соответствующее (по строке таблицы) найденному элементу дополнительного столбца альтернативное решение и принимается в качестве наилучшего в рамках рассматриваемого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации.

6) Если выбранный показатель дополнительного столбца достигается при нескольких альтернативных решениях, то в качестве наилучшей альтернативы может быть выбрана любая из них, т.к. в формате этого критерия такие альтернативы будут оптимальными по Парето (в этом легко убедиться на основе представленной ниже геометрической интерпретации).

ПРИМЕР 3.14. Рассмотрим ситуацию, представленную в примерах 1.1 и 2.2, когда необходимо выбрать один наилучший вариант из семи допустимых вариантов решений (A, B, C, D, E, F и G). Множество частных критериев в этой ситуации задано четырьмя критериями: они минимизируются. Оценки частных критериев заданы в таблице 3.8 (в тыс. у.е.). В дополнительных строках таблицы представлены координаты антиутопической точки и координаты соответствующих модифицированных антиутопических точек. Требуется: найти наилучшую альтернативу по модифицированному методу среднего геометрического.

Атрибуты задачи минимизации частных критериев.

Альтернативы	Оценки частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25
АУТ	45	36	170	29
$АУТ_{mod}$	46	37	171	30
АУТ(mod)	171	171	171	171

Выбор наилучшего решения по модифицированному критерию

среднего геометрического (формат АУТ$_{mod}$).

Решения	«Выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к АУТ$_{mod}$				Средний геометрический показатель «выигрыша»
	$g^{(1)}$	$g^{(2}$	g	$g^{(4)}$	
A	1	10	12	1	$\sqrt[4]{1\cdot 10\cdot 12\cdot 1}=\sqrt[4]{120}$
B	6	3	23	2	$\sqrt[4]{6\cdot 3\cdot 23\cdot 2}=\sqrt[4]{828}$
C	4	2	45	6	$\sqrt[4]{4\cdot 2\cdot 45\cdot 6}=\sqrt[4]{2160}$
D	5	3	1	2	$\sqrt[4]{5\cdot 3\cdot 1\cdot 2}=\sqrt[4]{30}$
E	1	2	25	4	$\sqrt[4]{1\cdot 2\cdot 25\cdot 4}=\sqrt[4]{200}$
F	3	5	24	3	$\sqrt[4]{3\cdot 5\cdot 24\cdot 3}=\sqrt[4]{1080}$
G	4	1	49	5	$\sqrt[4]{4\cdot 1\cdot 49\cdot 5}=\sqrt[4]{980}$

Выбор наилучшего решения по модифицированному критерию

среднего геометрического (формат АУТ(mod)).

Решения	«Выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к $АУТ_{mod}$				Средний геометрический показатель «выигрыша»
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	
A	126	144	12	142	$\sqrt[4]{126 \cdot 144 \cdot 12 \cdot 142} = 74{,}57$
B	131	137	23	143	$\sqrt[4]{131 \cdot 137 \cdot 23 \cdot 143} = 87{,}65$
C	129	136	45	147	$\sqrt[4]{129 \cdot 136 \cdot 45 \cdot 147} = 103{,}79$
D	130	137	1	143	$\sqrt[4]{130 \cdot 137 \cdot 1 \cdot 143} = 39{,}95$
E	126	136	25	145	$\sqrt[4]{126 \cdot 136 \cdot 25 \cdot 145} = 88{,}78$
F	128	139	24	144	$\sqrt[4]{128 \cdot 139 \cdot 24 \cdot 144} = 88{,}55$
G	129	135	49	146	$\sqrt[4]{129 \cdot 135 \cdot 49 \cdot 146}$ = **105,65**

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим формат модификации $АУТ_{mod}$. В таблице 3.9 представлены «выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к $АУТ_{mod}$. К ней приписываем дополнительный столбец с показателями среднего геометрического (по строке). Из элементов дополнительного столбца выбираем наибольший. Он равен $\sqrt[4]{2160}$ и ответствует альтернативе С (по строке). Альтернатива С принимается в качестве оптимальной по модифицированному методу среднего геометрического. Проиллюстрируем процедуры оптимизации в формате модификации АУТ(mod). От оценок частных критериев, представленных в таблице 3.8, переходим к новому формату таких оценок. А именно, переходим к таблице 3.10, в которой уже представлены «выигрыши» в оценках частных критериев по отношению к АУТ(mod). Затем в дополнительном столбце записываем показатели критерия выбора: среднегеометрические показатели указанных «выигрышей» в требуемом формате.

Среди элементов дополнительного столбца выбираем наибольший. Он равен 105,65 (выделен в таблице 3.10) и ответствует альтернативе G (по строке таблицы). Она принимается в качестве оптимальной по модифицированному методу среднего геометрического (формат модификации АУТ(mod)). В этой ситуации отказ от «привязки» направляющей для линий уровня к АУТ (требование ее «привязки» к началу координат) изменил выбор.

1. Постановка задачи стохастического программирования. М- и Р- постановки задачи СП.

При перспективном и оперативном планировании работы предприятия возникает необходимость в учете ряда случайных факторов, существенно влияющих на процесс производства. К таким факторам относятся спрос, который не всегда может быть предсказуем, непредусмотренные сбои в поступлении сырья, энергии, рабочей силы, неисправности и аварии оборудования. Еще больше случайных факторов необходимо учитывать при планировании производства, эффективность которого зависит от климатических условий, урожайности и т.д. Подобного типа задачи ЛП принято классифицировать как задачи стохастического программирования (СП).

Подходы к постановке и анализу стохастических задач существенно различаются в зависимости от последовательности получения информации - в один прием или по частям. При построении стохастической модели важно также знать, необходимо ли принять единственное решение, не подлежащее корректировке, или можно по мере накопления информации один или несколько раз корректировать решение. В соответствии с этим в стохастическом программировании исследуются одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные задачи.

В одноэтапных задачах решение принимается один раз и не корректируется. Они различаются по показателям качества решения (по целевым функциям), по характеру ограничений и по виду решения.

Задача СП может быть сформулирована в М- и Р- постановках по отношению к записи целевой функции и ограничений.

При М-постановке целевая функция W записывается в виде

$$W = M\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \to \min(\max), \qquad (1.1)$$

что означает оптимизацию математического ожидания целевой функции. От математического ожидания целевой функции можно перейти к математическому ожиданию случайной величины c_j.

$$W = M\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \min(\max). \qquad (1.2)$$

При Р- постановке имеем:

* при максимизации

$$W = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq W_{min}\right) \to \max, \qquad (1.3)$$

где W_{min} - предварительно заданное допустимое наихудшее (минимальное) значение целевой функции.

* при минимизации

$$W = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq W_{max}\right) \to \max, \qquad (1.4)$$

где W_{max} - предварительно заданное допустимое наихудшее (максимальное) значение целевой функции.

Суть Р-постановки заключается в том, что необходимо найти такие значения xj, при которых максимизируется вероятность того, что целевая функция будет не хуже предельно допустимого значения.

Ограничения задачи, которые должны выполняться при всех реализациях параметров условий задачи, называются жесткими ограничениями. Часто возникают ситуации, в которых постановка задачи позволяет заменить жесткие ограничения их усреднением по распределению случайных параметров. Такие ограничения называют статистическими :

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \leq \overline{b_i}\,, \qquad (1.5)$$

В тех случаях, когда по содержательным соображениям можно допустить, чтобы невязки в условиях не превышали заданных с вероятностями, небольшими а i>0, говорят о стохастических задачах с вероятностными ограничениями:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i}\right\} \ge \alpha_i, \qquad (1.6)$$

Представленные задачи как в М-, так и в Р-постановках непосредственно решены быть не могут. Возможным методом решения этих задач является переход к их детерминированным эквивалентам. В основе этого перехода лежит использование закона распределения случайной величины. В инженерной практике наиболее часто используется нормальный закон распределения, поэтому дальнейшие зависимости приведем для этого случая.

Принимаем, что a_{ij}, b_i, c_j подчинены нормальному закону распределения.

В этом случае будет справедлива следующие детерминированные постановки:

*   P - постановка целевой функции, максимизация:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j - W_{\min}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \to \max \qquad (1.7)$$

где $\overline{c_j}$ и σ_j - математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины cj.

* Р - постановка целевой функции, минимизация:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j + W_{\max}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \to \max \qquad (1.8)$$

* Вероятностные ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i} - t_{\alpha i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2} \qquad (1.9)$$

где $\overline{a_{ij}}, \ldots, \sigma_{ij}^2, \overline{b_i}, \ldots, \Theta_i^2$ - соответственно, математические ожидания и дисперсии случайных величин a_{ij} и b_i;

$t_{\alpha i}$ - значение центрированной нормированной случайной величины в нормальном законе распределения, соответствующей заданному уровню вероятности соблюдения ограничений a_i.