20 октября

Классная работа

Элементы алгебры логики

Урок 12

Алгебра логики

Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

Создателем алгебры логики является живший в XIX веке английский математик ***Джордж Буль*** (1815-1864)*, в честь которого эта алгебра названа* ***Булевой алгеброй*** или ***Алгеброй высказываний.***

Алгебра логики

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей (**A = 1**), а если ложно - нулём (**B = 0**).

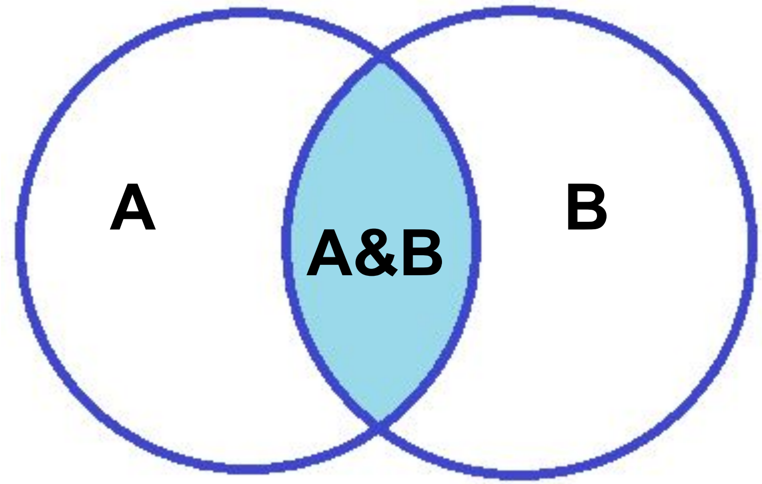
0 и **1** называются **логическими значениями**.

Конъюнкция

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



Конъюнкция – логическая операция, в результате которой **истина** будет тогда, когда **оба исходных высказывания истинны**.

Другое название: ***логическое умножение.***

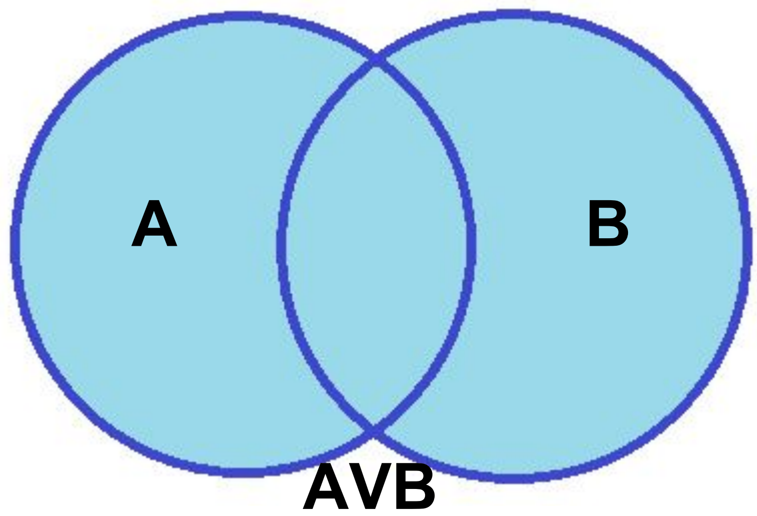
Обозначения: $\wedge$, ×, •, &, И.

Дизъюнкция

Таблица истинности:

A	B	AVB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



Дизъюнкция – логическая операция, в результате которой **ложь** будет тогда, когда **оба исходных высказывания ложны**.

Другое название: ***логическое сложение***.

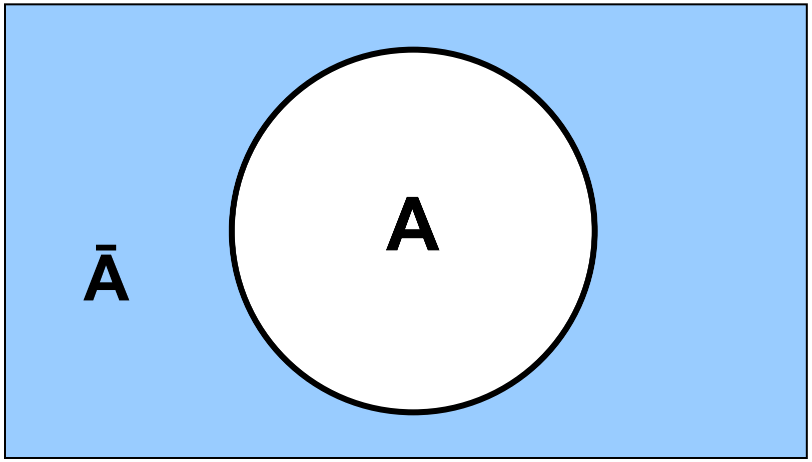
Обозначения: **V, |, ИЛИ, +.**

Инверсия

Таблица истинности:

A	Ā
0	1
1	0

Графическое представление



Инверсия – логическая операция, в результате которой будет значение **противоположное исходному**.

Другое название: ***логическое отрицание.***

Обозначения: **НЕ, ¬ , ¯** .

Импликация

Таблица истинности:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация – логическая операция, в результате которой **истина** будет тогда, когда **первое высказывание не больше второго**.

Обозначения: $\to$ **,** $\Rightarrow$**.**

Эквивалентность

Таблица истинности:

A	B	A≡B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликация – логическая операция, в результате которой **истина** будет тогда, когда оба высказывания **имеют одинаковую истинность**.

Обозначения: **≡, ↔.**

Логические выражения

Примеры:

НЕ (*A* ИЛИ *B*)

A & B

A V ¬B & C

Логическое выражение – это выражение содержащее логические переменные, логические значения, логические операции и скобки.

При вычислении логических выражений **сначала** выполняются действия в скобках.

Приоритет выполнения логических операций:

¬, &, V

(***инверсия,*** *затем* ***конъюнкция,*** *затем* ***дизъюнкция***).

Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать ***n*** - число переменных в выражении

↓

подсчитать общее число логических операций в выражении

↓

установить последовательность выполнения логических операций

↓

определить число столбцов в таблице

↓

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

↓

определить число строк в таблице без шапки: $\boldsymbol{m} = 2^{n}$

↓

выписать наборы входных переменных

↓

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Пример построения таблицы истинности

Построить таблицу истинности для выражения A** ∨ **A** & **B

Число переменных: *N = 2*
Число строк: $m = 2^2 = 4$
Приоритет операций: &, V
Число столбцов: *4 (2 переменных и 2 операции)*

A	*B*	*A&B*	*A∨A&B*
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Вывод: ***A V A & B = A***

Переместительный (коммутативный) закон

- *Для логического сложения:*

$$A \vee B = B \vee A$$

- *Для логического умножения:*

$$A \,\&\, B = B \,\&\, A$$

Сочетательный (ассоциативный) закон

- *Для логического сложения:*

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

- *Для логического умножения:*

$$(A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, (B \,\&\, C)$$

- При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать, как в обычной алгебре

Распределительный (дистрибутивный) закон

- *Для логического сложения:*

$$(A \vee B) \,\&\, C = (A \,\&\, C) \vee (B \,\&\, C)$$

- *Для логического умножения:*

$$(A \,\&\, B) \vee C = (A \vee C) \,\&\, (B \vee C)$$

Закон двойного отрицания

$$A = \overline{\overline{A}}$$

- Двойное отрицание исключает отрицание

Закон исключения третьего

$$A \vee \overline{A} = 1$$

- Из двух противоречащих высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе ложно, третьего не дано.

Закон противоречия

$$A \,\&\, \overline{A} = 0$$

- Невозможно, чтобы противоречащие высказывания были одновременно истинными.

Закон повторения (равносильности)

- *Для логического сложения:*

$$A \vee A = A$$

- *Для логического умножения:*

$$A \,\&\, A = A$$

- Закон означает отсутствие показателей степени

Закон исключения констант

- *Для логического сложения:*

$$A \vee 1 = 1, \; A \vee 0 = A$$

- *Для логического умножения:*

$$A \,\&\, 1 = A, \; A \,\&\, 0 = 0$$

Закон общей инверсии
(законы де Моргана)

- *Для логического сложения:*

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \;\&\; \overline{B}$$

- *Для логического умножения:*

$$\overline{A \;\&\; B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Упражнения (самоконтроль)

Постройте таблицы истинности для следующих логических выражений:

1) B v B & A

2) A & B & C

3) $\overline{A}$ & A

4) $\overline{A \text{ v } B}$

Задание

Постройте таблицы истинности для следующих логических выражений:

1) B & (A v B);

2) A & (A v $\overline{B}$ v C).