

# Решение заданий №7

Прямая  $y = 4x + 11$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 + 8x + 6$ .  
Найдите абсциссу точки касания.



№1

Решение:

Если прямая параллельна касательной к графику функции в какой-то точке (назовем ее  $x_0$ ), то ее угловой коэффициент (в нашем случае  $k = 4$  из уравнения  $y = 4x + 11$ ) равен значению производной функции в точке  $x_0$ :

$$k = f'(x_0) = 4$$

Производная функции

$$f'(x) = (x^2 + 8x + 6)' = 2x + 8.$$

Значит, для нахождения искомой точки касания необходимо, чтобы  $2x_0 + 8 = 4$ ,  
откуда  $x_0 = -2$ .

**Ответ:  $-2$ .**

Прямая  $y = 3x + 11$  является касательной к графику функции  $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$ .  
Найдите абсциссу точки касания.



№2

Решение:

Заметим, что если прямая является касательной к графику, то ее угловой коэффициент ( $k = 3$ ) должен быть равен производной функции в точке касания, откуда имеем  $3x^2 - 6x - 6 = 3$ , то есть  $3x^2 - 6x - 9 = 0$  или  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . Это квадратное уравнение имеет два корня:  $-1$  и  $3$ . Таким образом есть две точки, в которых касательная к графику функции  $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$  имеет угловой коэффициент, равный  $3$ . Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая  $y = 3x + 11$  касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной.

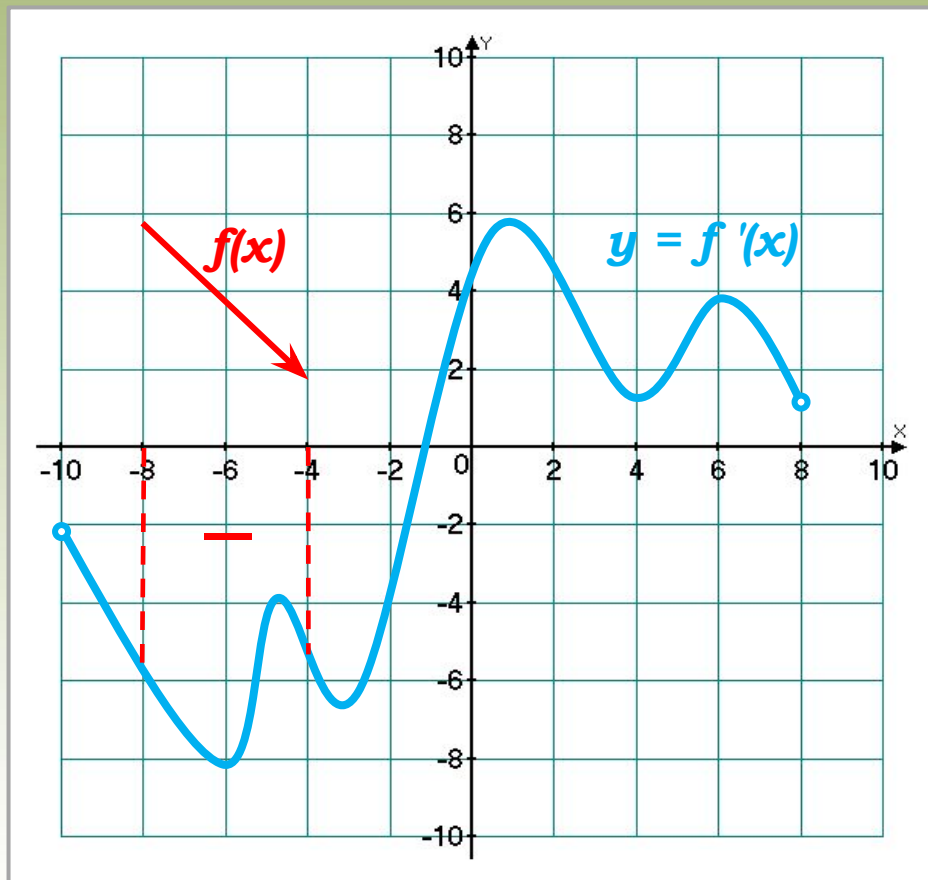
Значение функции в точке  $-1$  равно  $y(-1) = -1 - 3 + 6 + 6 = 8$ , а значение в точке  $3$  равно  $y(3) = 27 - 27 - 18 + 6 = -12$ . Заметим, что точка с координатами  $(-1; 8)$  удовлетворяет уравнению касательной, так как  $8 = -3 + 11$ . А вот точка  $(3; -12)$  уравнению касательной не удовлетворяет, так как  $-12 \neq 9 + 11$ .

Значит, искомая абсцисса точки касания равна  $-1$ .

**Ответ:  $-1$ .**

На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-10; 8)$ . В какой точке отрезка  $[-8; -4]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение.

№3



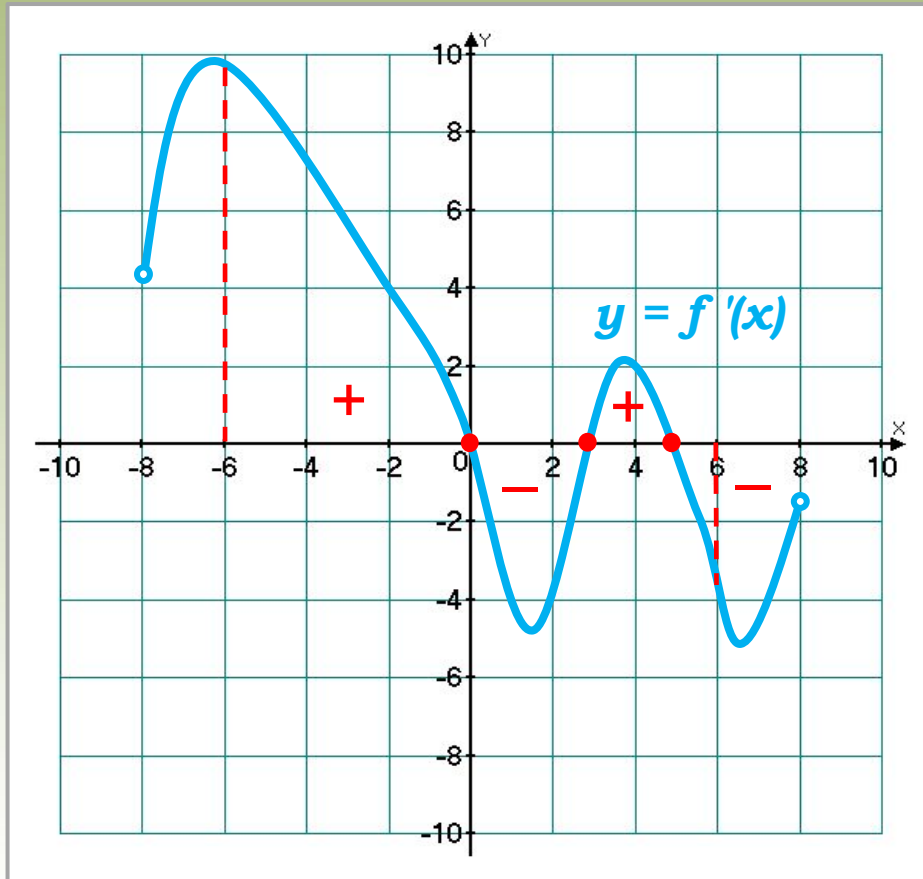
Решение:

Заметим, что на отрезке  $[-8; -4]$  производная функции отрицательна, значит, сама функция убывает, а значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает на правом конце отрезка, то есть в точке  $-4$ .

Ответ:  $-4$ .

На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 8)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-6; 6]$ .

№4



Решение:

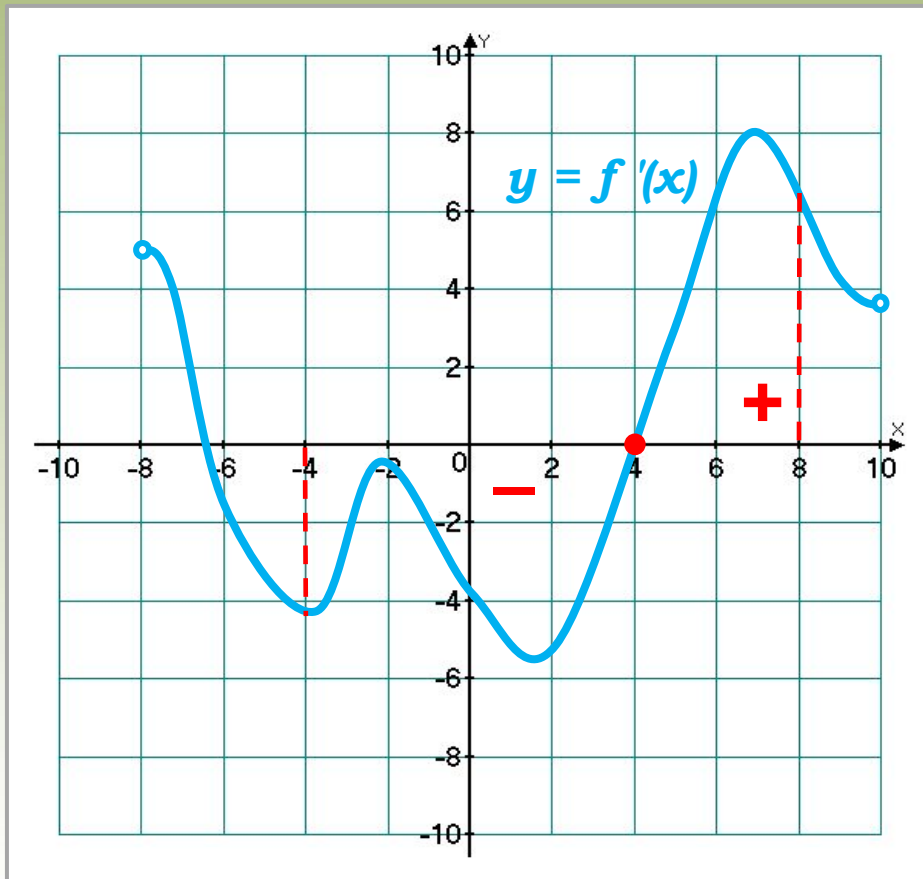
В точке экстремума производная функции равна 0 либо не существует.

Видно, что таких точек принадлежащих отрезку  $[-6; 6]$  три. При этом в каждой точке производная меняет знак либо с «+» на «-», либо с «-» на «+».

**Ответ: 3.**

На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 10)$ . Найдите точку экстремума функции  $f(x)$  на интервале  $(-4; 8)$ .

№5

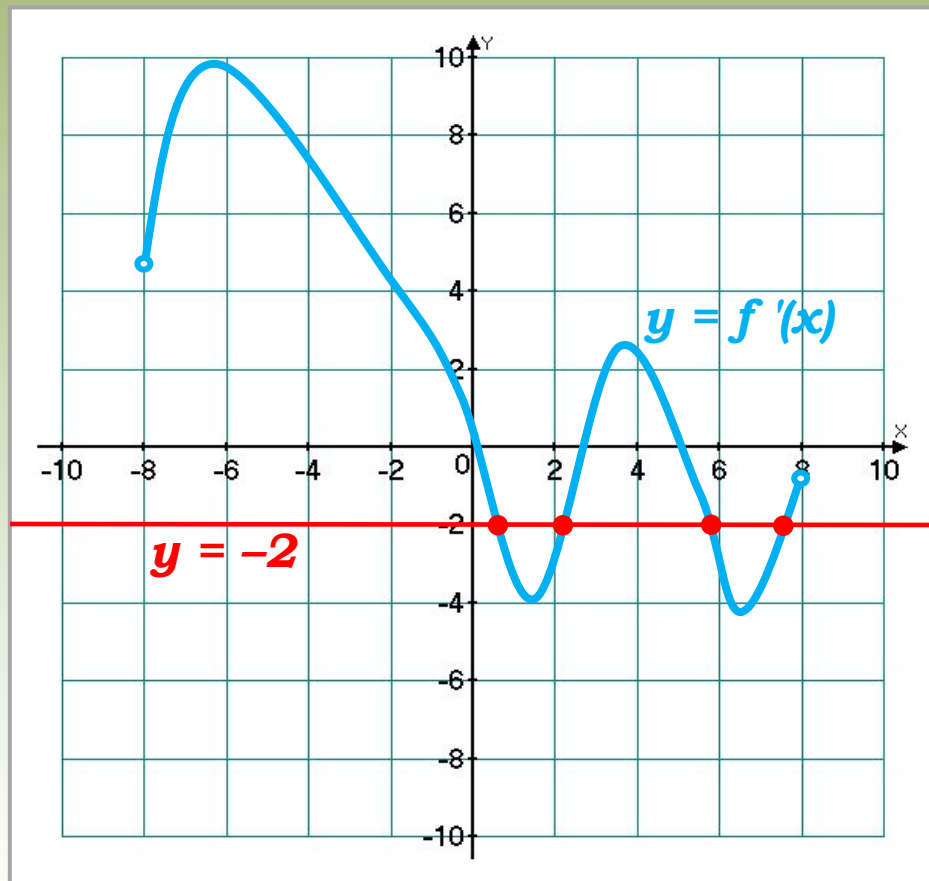


Решение:

Заметим, что на интервале  $(-4; 8)$  производная в точке  $x_0 = 4$  обращается в 0 и при переходе через эту точку меняет знак производной с «-» на «+», точка 4 и есть искомая точка экстремума функции на заданном интервале.

Ответ: 4.

На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 8)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y = -2x + 2$  или совпадает с ней.

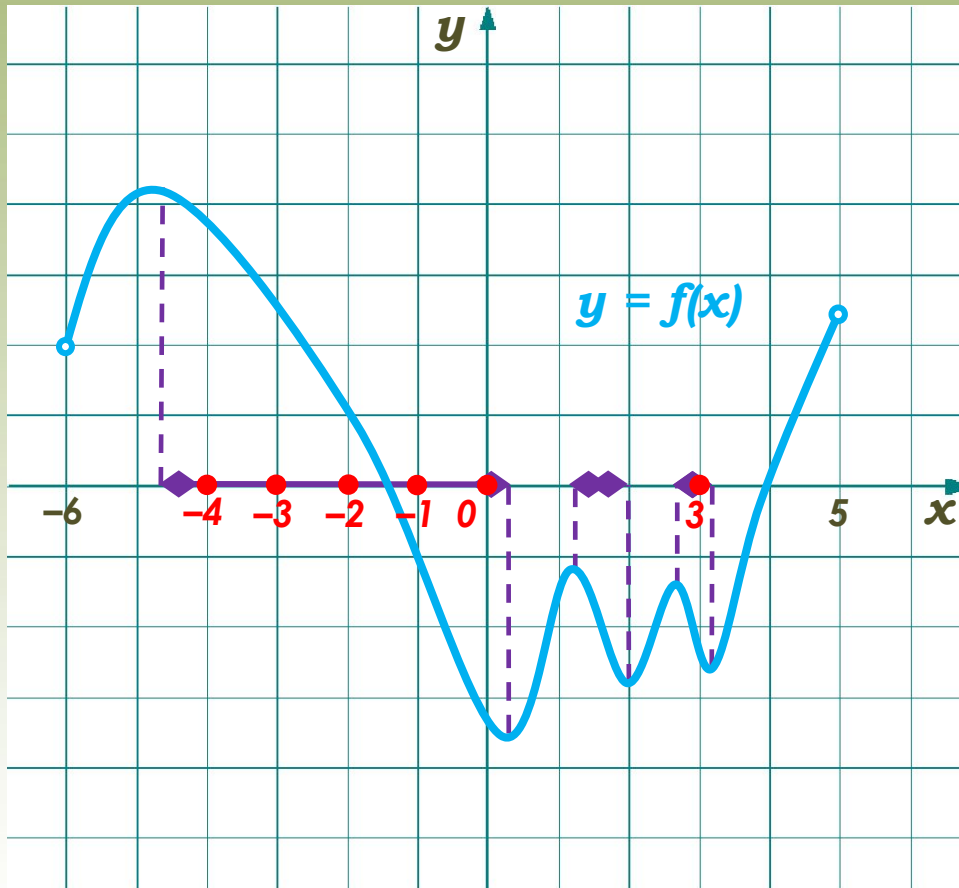


**Ответ: 4.**

Решение:

Если касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y = -2x + 2$  или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент  $k = -2$ , а значит нам нужно найти количество точек, в которых производная функции  $f'(x) = -2$ . Для этого на графике производной проведем прямую  $y = -2$ , и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. Таких точек 4.

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 5)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение:

Заметим, что производная функции отрицательна, если сама функция  $f(x)$  убывает, а значит, необходимо найти количество целых точек, входящих в промежутки убывания функции.

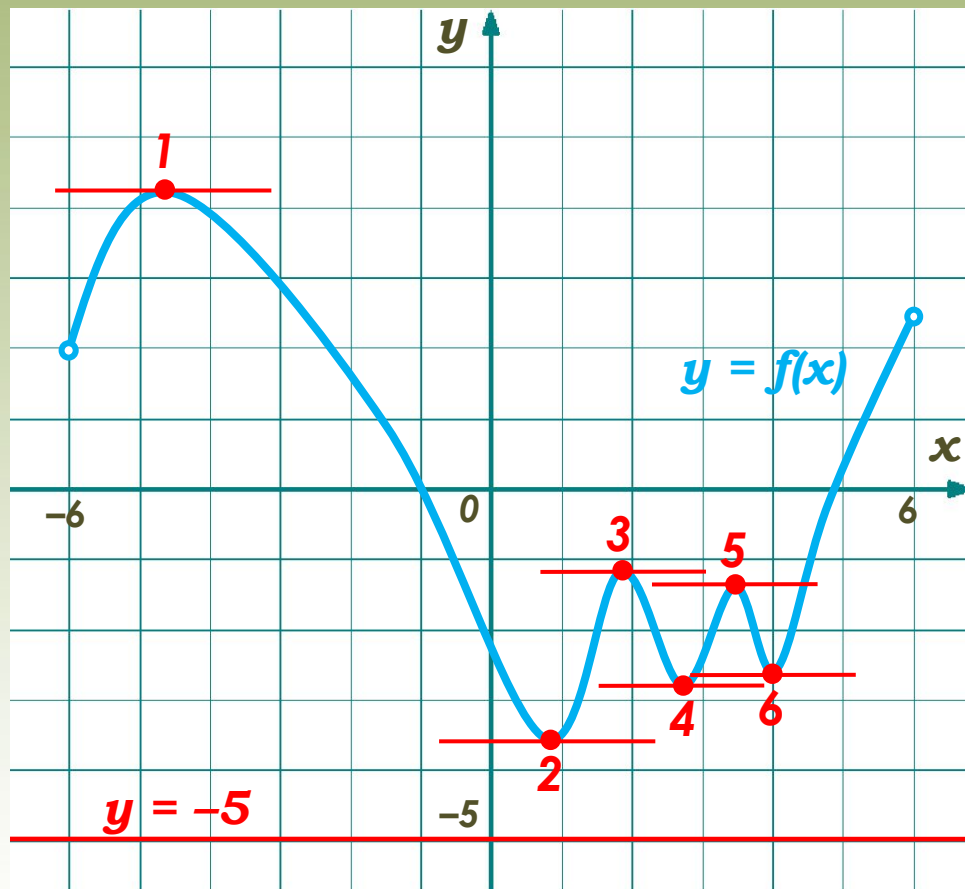
Таких точек **6**:

$x = -4, x = -3, x = -2,$   
 $x = -1, x = 0, x = 3.$

**Ответ: 6.**



На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -5$ .



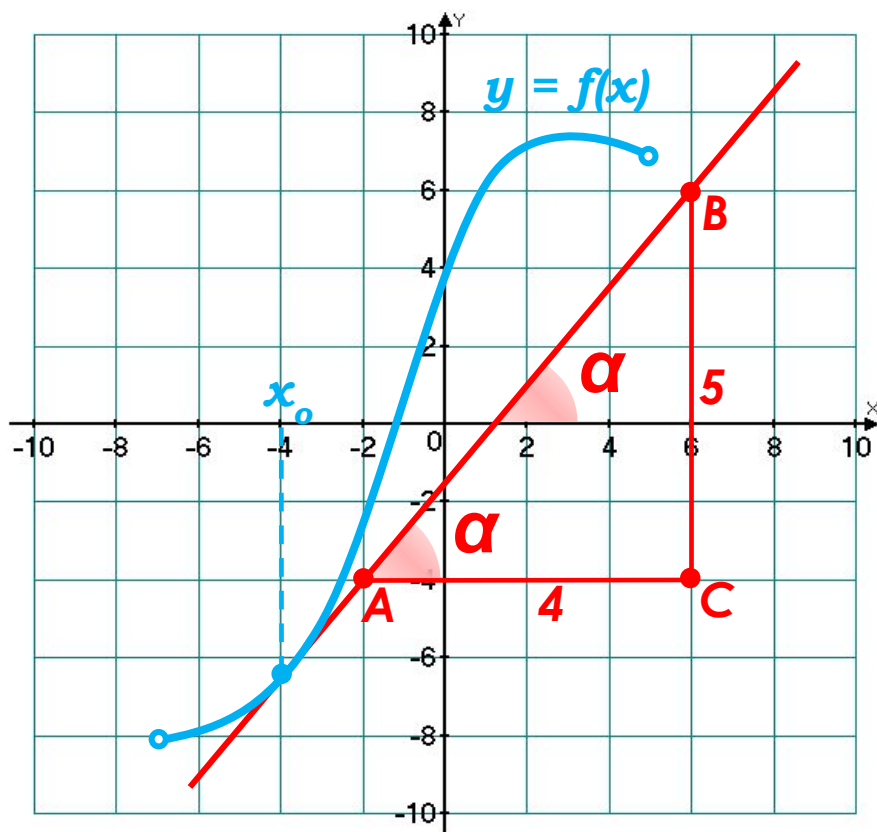
Ответ: 6.

Решение:

Прямая  $y = -5$  горизонтальная, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Следовательно, угловой коэффициент в искомых точках  $k = f'(x) = 0$ .

В нашем случае – это точки экстремума. Таких точек 6.

На рисунке изображен график  $y = f(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-7; 5)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: 1,25.

Решение:

Значение производной функции  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$  равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

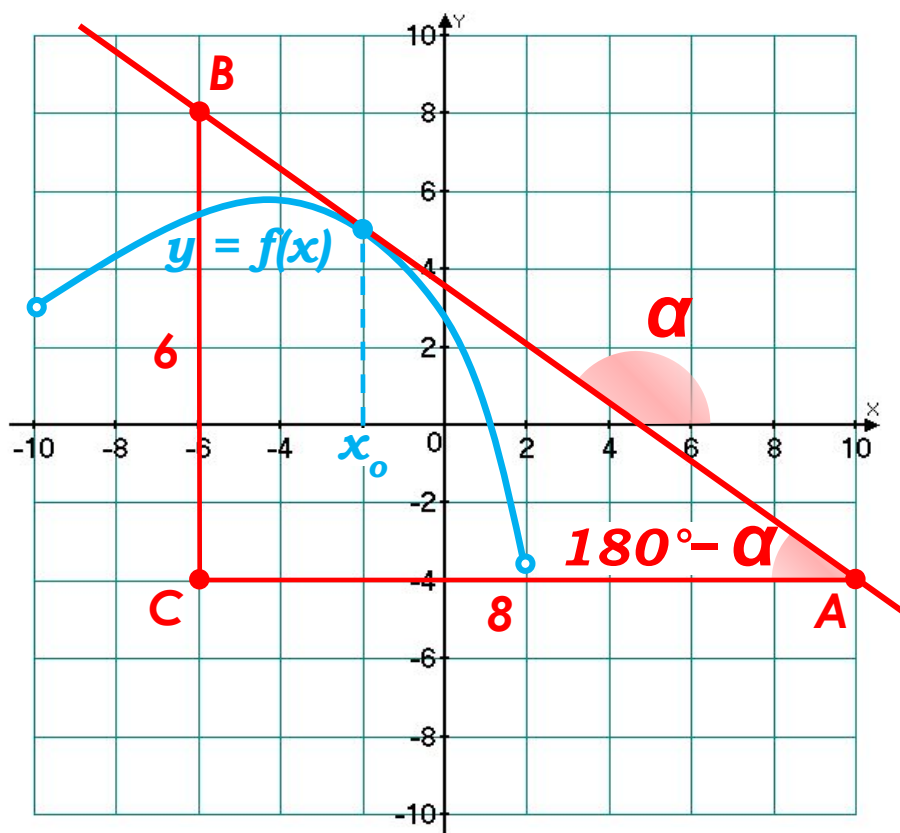
В нашем случае  $k > 0$ , так как  $\alpha$  – острый угол ( $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ).

Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых – целые числа.

Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC.

$$\operatorname{tg} \alpha = BC : AC = 5 : 4 = 1,25$$

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-10; 2)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ .  
Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**Ответ:  $-0,75$ .**

Решение:

Значение производной функции  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$  равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

В нашем случае  $k < 0$ , так как  $\alpha$  – тупой угол ( $\operatorname{tg} \alpha < 0$ ).

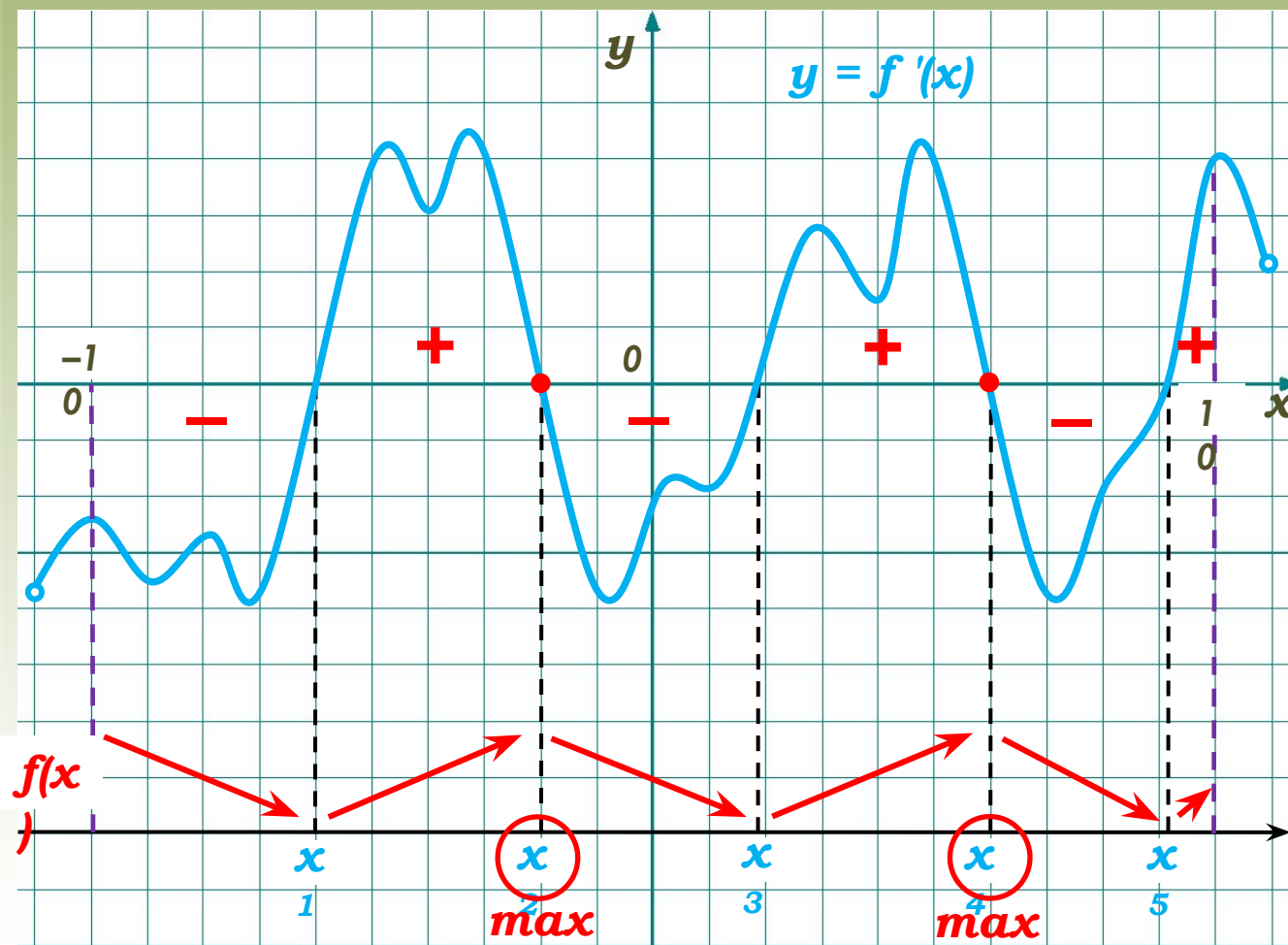
Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки А и В, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых – целые числа.

Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник АВС.

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = BC : AC = 6 : 8 = 0,75$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -0,75$$

На рисунке изображен график производной  $y = f'(x)$  – функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-11; 11)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-10; 10]$ .



Решение:

В точке экстремума производная функции равна 0 либо не существует. Видно, что таких точек принадлежащих отрезку  $[-10; 10]$  пять. В точках  $x_2$  и  $x_4$  производная меняет знак с «+» на «-» – это точки максимума.

Ответ: 2.

Прямая  $y = 4x - 4$  является касательной к графику функции  $ax^2 + 34x + 11$ . Найдите  $a$ .



№12

Решение:

Производная функции в точке касания должна совпадать с угловым коэффициентом прямой.

Откуда, если за  $x_0$  принять абсциссу точки касания, имеем:  $2ax_0 + 34 = 4$ . То есть  $ax_0 = -15$ .

Найдем значение исходной функции в точке касания:

$$ax_0^2 + 34x_0 + 11 = -15x_0 + 34x_0 + 11 = 19x_0 + 11.$$

Так как прямая  $y = 4x - 4$  – касательная, имеем:

$$19x_0 + 11 = 4x_0 - 4, \text{ откуда } x_0 = -1.$$

А значит  $a = 15$ .

**Ответ: 15.**

Прямая  $y = -4x - 5$  является касательной к графику функции  $9x^2 + bx + 20$ . Найдите  $b$ , учитывая, что абсцисса точки касания больше  $0$ .



№13

Решение.

Если  $x_0$  – абсцисса точки касания, то  $18x_0 + b = -4$ , откуда  $b = -4 - 18x_0$ .

Аналогично задаче №12 найдем  $x_0$ :

$$9x_0^2 + (-4 - 18x_0)x_0 + 20 = -4x_0 - 5,$$

$$9x_0^2 - 4x_0 - 18x_0^2 + 20 + 4x_0 + 5 = 0,$$

$$-9x_0^2 + 25 = 0,$$

$$x_0^2 = 25/9.$$

Откуда  $x_0 = 5/3$  или  $x_0 = -5/3$ .

Условию задачи соответствует только положительный корень, значит  $x_0 = 5/3$ , следовательно  $b = -4 - 18 \cdot 5/3$ , имеем  $b = -34$ .

**Ответ:  $-34$ .**

Прямая  $y = 2x - 6$  является касательной к графику функции  $x^2 + 12x + c$ . Найдите  $c$ .



№14

Решение.

Аналогично предыдущим задачам обозначим абсциссу точки касания  $x_0$  и приравняем значение производной функции в точке  $x_0$  угловому коэффициенту касательной.

$$2x_0 + 12 = 2, \text{ откуда } x_0 = -5.$$

Значение исходной функции в точке  $-5$  равно:

$$25 - 60 + c = c - 35, \text{ значит } c - 35 = 2 \cdot (-5) - 6, \\ \text{откуда } c = 19.$$

**Ответ: 19.**

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = 0,5t^2 - 2t - 6$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени  $t = 6$ с.

Решение.

Так как мгновенная скорость точки в момент времени  $t_0$ , прямолинейного движения, совершаемого по закону  $x = x(t)$ , равна значению производной функции  $x$  при  $t = t_0$ , искомая скорость будет равна

$$x'(t) = 0,5 \cdot 2t - 2 = t - 2,$$

$$x'(6) = 6 - 2 = 4 \text{ м/с.}$$

**Ответ: 4.**



Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = 0,5t^2 - 2t - 22$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна **4 м/с**?

Решение.

Так как мгновенная скорость точки в момент времени  $t_0$ , прямолинейного движения, совершаемого по закону  $x = x(t)$ , равна значению производной функции  $x$  при  $t = t_0$ ,

искомая скорость будет равна

$$x'(t_0) = 0,5 \cdot 2t_0 - 2 = t_0 - 2,$$

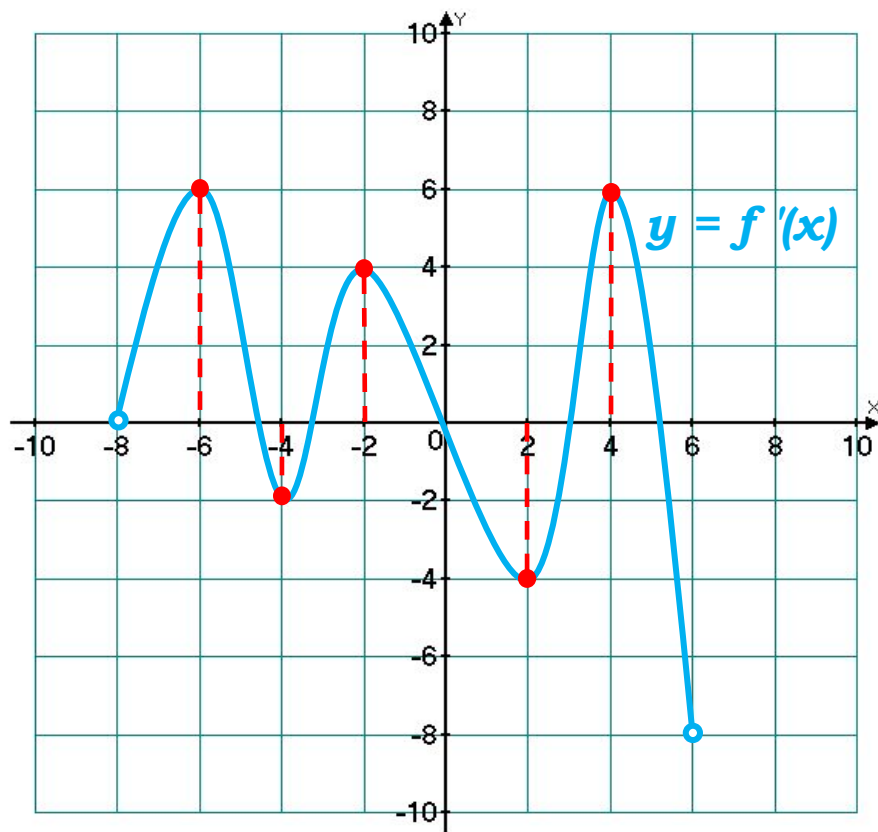
Т.к. по условию,  $x'(t_0) = 4$ , то  $t_0 - 2 = 4$ , откуда

$$t_0 = 4 + 2 = 6 \text{ м/с.}$$

**Ответ: 6.**

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 6)$ .  
Найдите сумму точек экстремума функции  $f(x)$ .

№17



Решение:

Точки экстремума – это точки минимума и максимума.

Видно, что таких точек принадлежащих промежутку  $(-8; 6)$  пять.

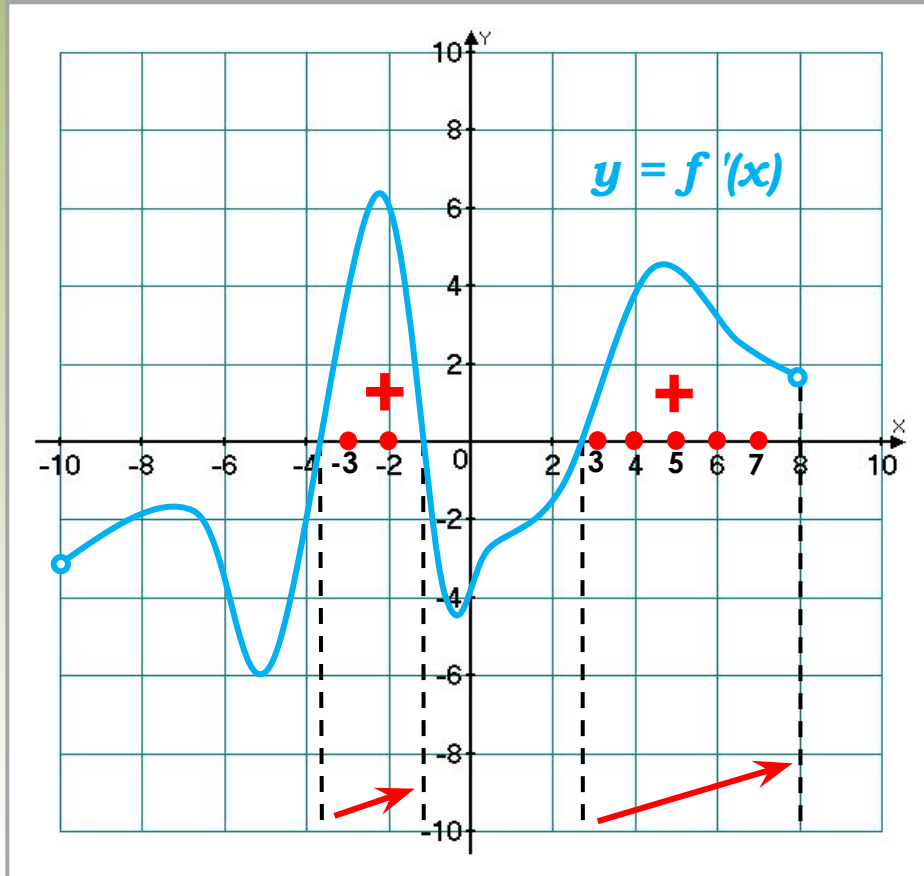
Найдем сумму их абсцисс:

$$-6 + (-4) + (-2) + 2 + 4 = 6.$$

**Ответ: 6.**



На рисунке изображен график производной  $y = f'(x)$  – функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-10; 8)$ .  
Найдите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



**Ответ: 20.**

Решение:

Заметим, что функция  $f(x)$  возрастает, если производная функции положительна; а значит, необходимо найти сумму целых точек, входящих в промежутки возрастания функции.

Таких точек 7:

$x = -3, x = -2, x = 3,$   
 $x = 4, x = 5, x = 6, x = 7.$

Их сумма:

$-3 + (-2) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 20$

# Используемые материалы



- *ЕГЭ 2012. Математика. Задача В8. Геометрический смысл производной. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Яценко. 3-е изд. стереотип. – М.: МЦНМО, 2012. – 88 с.*
- <http://mathege.ru/or/ege/Main> – *Материалы открытого банка заданий по математике 2012 года*