

Лекция по теме:

**КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

2. Модели в механике. Система отсчета. Материальная точка. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.

- ▶ *Механическое движение* – изменение положения тела относительно других тел с течением времени.

Для описания движения тел, в зависимости от условий конкретных задач, в механике используются различные *физические модели*, в которых из всего многообразия проявлений движения выделены главные, определяющие характер движения. Простейшей моделью является *материальная точка*.

- ▶ *Материальная точка* – это модель тела, размерами и формой которого можно пренебречь по сравнению с масштабами движения.

2. Модели в механике. Система отсчета. Материальная точка. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.

При взаимодействии тел друг с другом они могут деформироваться, то есть изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель – *абсолютно твердое тело*. Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться, и при всех условиях расстояние между двумя частицами этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движения. *Поступательное движение* – это движение, при котором любая прямая жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. *Вращательное движение* – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения*.

2. Модели в механике. Система отсчета. Материальная точка. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.

Движение тел происходит в *пространстве* и во *времени*. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Тела отсчета – тела, относительно которых определяется или изучается положение данного движущегося тела.

Система отсчета – это тело отсчета, связанная с ним система координат и способ измерения времени (часы).

Траектория – линия, которую описывает материальная точка в пространстве при движении. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным и криволинейным.

Расстояние, пройденное телом, с момента начала отсчета времени, называется *длиной пути*. Это длина траектории. Обозначения: L , S , ΔS .

2. Модели в механике. Система отсчета. Материальная точка. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.

Вектор, соединяющий начальное положение с последующим положением, называют *перемещением*. Обозначения: \vec{S} , \vec{r} , $\Delta \vec{r}$.

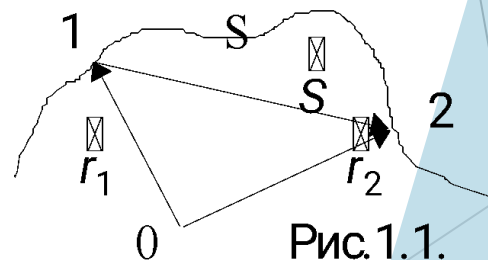
Вектор, соединяющий некоторую фиксированную точку пространства с данной движущейся точкой, называется *радиус-вектором*.

$$\vec{r}_1 + \vec{S} = \vec{r}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}},$$

перемещение равно изменению радиус-вектора. Если точку O совместить с точкой A ,

то $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $\vec{r}_2 = \vec{r}$, $\boxed{\vec{S} = \vec{r}}$

перемещение равно радиусу-вектору.



2. Модели в механике. Система отсчета. Материальная точка. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.

В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами x , y , z или радиусом-вектором. При этом проекции радиуса-вектора на оси системы отсчета эквивалентны координатам материальной точки x , y , z : $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. Уравнение движения материальной точки может быть задано 3-мя способами:

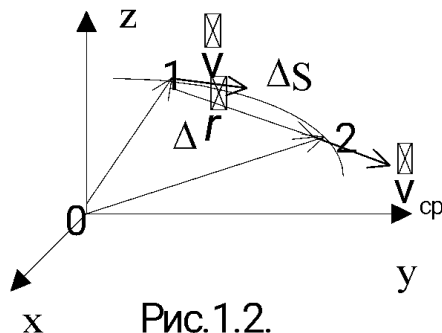


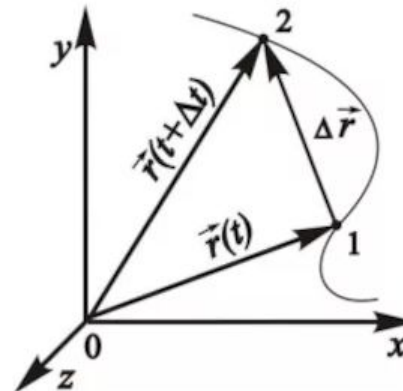
Рис.1.2.

- а) координатный $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$
- б) векторному: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (эквивалентен координатному);
- в) траекторный (естественный) $S = S(t)$.)

3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

Кинематика – это раздел механики, изучающий движение тел без учета взаимодействия, то есть без учета причин, вызывающих это движение.

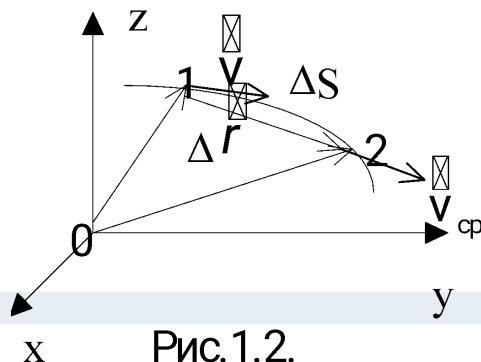
Пусть положение материальной точки задано радиусом-вектором , проведенным из некоторой неподвижной точки O выбранной системы отсчета. При движении материальной точки ее радиус-вектор меняется в общем случае как по величине, так и по направлению, то есть радиус-вектор зависит от времени t . Геометрическое место концов радиуса-вектора будет траекторией материальной точки.



3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

Введем понятие **скорости** материальной точки. Пусть за промежуток времени Δt материальная точка переместилась из точки 1 в точку 2 (см. рис. 1.2). *Средняя скорость* определяет путь, пройденный в единицу времени. Пусть к моменту t_1 был пройден путь S_1 , а к моменту t_2 – S_2 . За промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ будет пройден путь $\Delta S = S_2 - S_1$. И средняя скорость, определяемая соотношением $v_{\text{cp}} = \Delta S / \Delta t$. Из рисунка видно, что вектор перемещения $\Delta \vec{r}$ материальной точки представляет собой приращение радиуса-вектора \vec{r} за время: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Вектор средней скорости

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \Delta \vec{r} / \Delta t.$$



3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

Вектор $\overset{\Delta}{V}_{\text{cp}}$ совпадает по направлению с вектором $\overset{\Delta}{r}$. Определим вектор скорости материальной точки как предел отношения $\overset{\Delta}{r} / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то

есть

$$\boxed{\overset{\Delta}{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overset{\Delta}{r}}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}}$$

Это значит, что *вектор скорости материальной точки в данный момент времени равен производной от радиуса-вектора $\overset{\Delta}{r}$ по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке* в сторону движения материальной точки. Модуль вектора $|\overset{\Delta}{v}| = |dr / dt|$.

3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

В классической механике состояние частицы или материальной точки в момент времени при координатном способе характеризуется тремя координатами и тремя компонентами скорости, причем предполагается, что все шесть величин в указанный момент можно найти на опыте с любой степенью точности.

Другим понятием, характеризующим движение точки, является **ускорение**. Ускорение – это физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости

3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

Среднее ускорение – это отношения изменения скорости ко времени, за которое это изменение произошло: $\mathbf{a}_{\text{cp}} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$. Вектор среднего ускорения: $\mathbf{a}_{\text{cp}} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$, (где $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$) – вектор изменения скорости за промежуток времени Δt . Переходя к пределу, получим вектор

мгновенного ускорения: $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, т.е. вектор ускорения

материальной точки равен производной от скорости по времени. Направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора $d\mathbf{v}$ (приращение вектора \mathbf{v} за время dt).

3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

При использовании для описания движения прямоугольной декартовой системы координат положение материальной точки задается тремя координатами x , y , z . При движении точки эти координаты изменяются во времени и, следовательно ее движение описывается тремя уравнениями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. В этом случае вектор скорости может быть разложен на три взаимно перпендикулярные компоненты: $v_x = dx / dt$; $v_y = dy / dt$; $v_z = dz / dt$, причем $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, а вектор ускорения – на компоненты: $a_x = dv_x / dt$; $a_y = dv_y / dt$; $a_z = dv_z / dt$, причем $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

4. Кинематика материальной точки при прямолинейном движении.

► Движение, при котором траектория – прямая линия, называется *прямолинейным* движением. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения равен пройденному пути, если направление движения не изменяется.

1) В случае прямолинейного *равномерного* движения

$$\bar{v} = \frac{\bar{s}}{t} = \text{const};$$

$$\bar{s} = \bar{v}t;$$

$$\bar{a} = 0.$$

В проекции на ось OX:

$$v_x = \frac{x - x_0}{t} = \text{const};$$

$$x = x_0 + v_x t;$$

$$a_x = 0$$

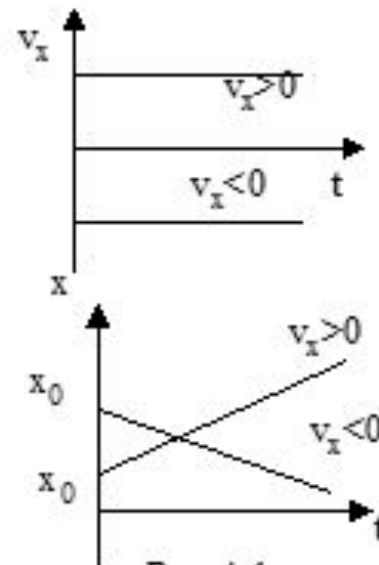


Рис. 4.1

4. Кинематика материальной точки при прямолинейном движении.

2) В случае прямолинейного равнопеременного движения

$$\bar{a} = \text{const};$$

$$\bar{v} = v_0 + \bar{a}t$$

$$\bar{s} = v_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2}.$$

В проекции на ось OX:

$$a_x = \text{const}$$

$$v_x = v_{x0} \pm a_x t;$$

$$x = x_0 + v_{x0} t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

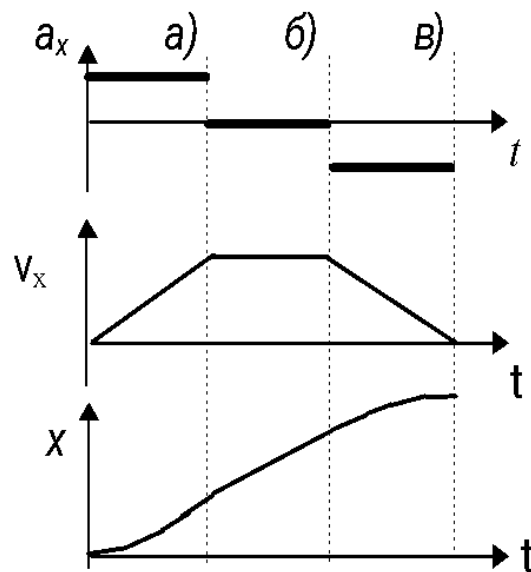


Рис.4.2.

На рис.4.2 изображены графики зависимостей $a(t)$, $v(t)$, $s(t)$ при равноускоренном ($a > 0$, случай *a*), равномерном ($a = 0$, случай *б*) и равнозамедленном ($a < 0$, случай *в*) движении.

4. Кинематика материальной точки при прямолинейном движении.

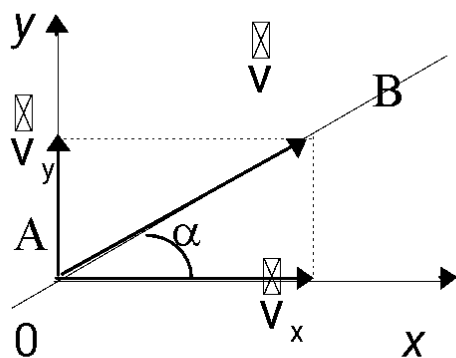


Рис.4.3.

Любое равномерное движение, происходящее с постоянной скоростью v вдоль произвольной прямой АВ (рис.4.3), можно разложить на два независимых равномерных и прямолинейных движения вдоль осей ОХ и ОУ со скоростями v_x и v_y : $x = \pm x_0 \pm v_x t$, $y = \pm y_0 \pm v_y t$, где $v_x = v \cos \alpha$, $v_y = v \sin \alpha$.

Скорость тела в любой точке траектории

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{и направлена вдоль траектории}$$

движения.

5. Криволинейное движение материальной точки.

- ▶ *Криволинейное движение* – движение, при котором траектория – кривая линия. Если материальная точка движется по произвольной кривой, то эту кривую надо разбить на малые дуги и каждую из них совместить с дугой некоторой окружности. Каждая такая окружность называется окружностью кривизны, а радиус называется радиусом кривизны траектории в данной точке.

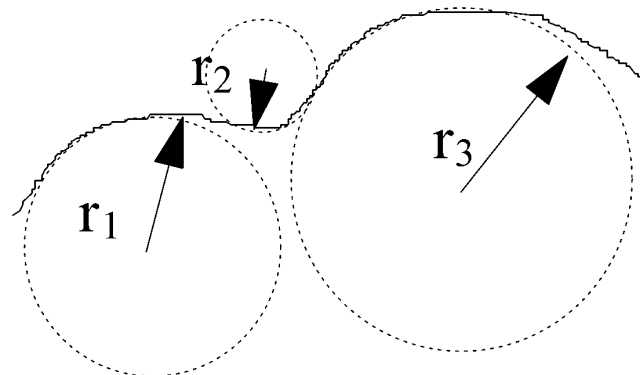


Рис.5.1.

5. Криволинейное движение материальной точки.

Рассмотрим один из видов криволинейного движения – движение материальной точки по окружности.

1 случай: равномерное движение по окружности, когда скорость по величине является постоянной $|\vec{v}| = \text{const}$, но изменяется по направлению (см. рис.5.2). В этом случае $\Delta \vec{v} \neq 0$, поэтому материальная точка движется с ускорением (т.к. $\vec{a}_{\text{ф}} = \Delta \vec{v} / \Delta t \neq 0$). Рассмотрим

треугольник ΔABC . Он равнобедренный со стороной $|\vec{v}| = v$ и основанием Δv , причем $\vec{a} \uparrow \uparrow \Delta \vec{v}$. Если точка D стремится к точке A, то угол в вершине ΔABC $\alpha \rightarrow 0$.

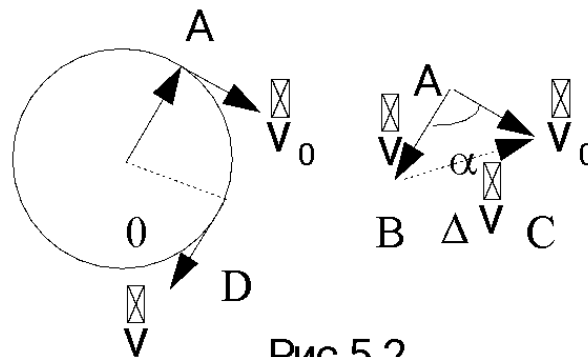


Рис.5.2.

5. Криволинейное движение материальной точки.

Но углы при основании $\triangle ABC$ равны (равнобедренный). Так как сумма всех углов $\triangle ABC$ равна 180° , то углы при основании будут стремиться к 90° каждый, то есть в пределе $\Delta \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$, тогда и ускорение будет перпендикулярно вектору скорости ($\mathbf{a}_n \perp \mathbf{v}$). Длина вектора $|\Delta \mathbf{v}| =$

$\Delta v = 2v \sin \frac{\alpha}{2}$. Длина дуги $\overset{\frown}{DA} = l = R\alpha$, а время, за которое точка пройдет этот путь $\Delta t = l / v = R\alpha / v$. Тогда модуль среднего ускорения

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{R\alpha} = \frac{v^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{R \frac{\alpha}{2}}. \text{ Используя первый замечательный}$$

предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = 1$, определим мгновенное ускорение:

$$a_n = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{R \frac{\alpha}{2}} = \frac{v^2}{R}, \text{ то есть } \boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}.$$

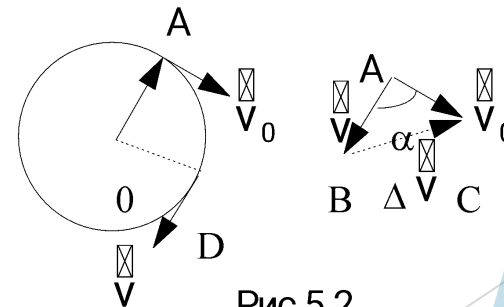


Рис.5.2.

Нормальное (центростремительное) ускорение характеризует *изменение скорости по направлению*. Вектор нормального ускорения направлен по радиусу к центру окружности.

5. Криволинейное движение материальной точки.

2 случай. Скорость движущейся по окружности материальной точки изменяется по величине и направлению: $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$.

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ – полное изменение скорости; $\Delta\vec{v}'$ – изменение скорости по направлению, $\Delta\vec{v}''$ – изменение скорости по величине.

$$\text{Из } \triangle CED \Rightarrow \Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}' + \Delta\vec{v}''$$

Поделим обе части этого равенства на Δt перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}''}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau}$$

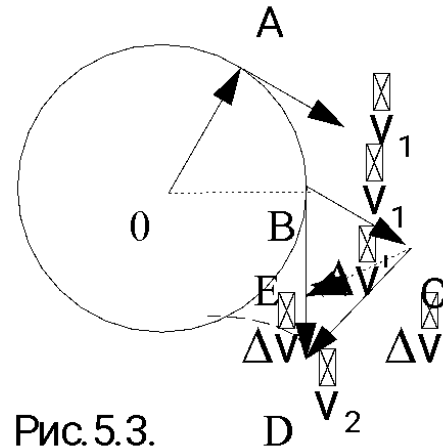


Рис. 5.3.

5. Криволинейное движение материальной точки.

Первое слагаемое является нормальным ускорением, второе $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}$ –

тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории.

$\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$ – если движение ускоренное; $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$ – если движение замедленное (рис.5.4).

Итак, при криволинейном движении полное ускорение состоит из двух составляющих:

- 1) нормальное ускорение \vec{a}_n – характеризуется изменением скорости по направлению;
- 2) тангенциальное ускорение \vec{a}_τ характеризуется изменением скорости по величине.

Так как компоненты \vec{a}_n и \vec{a}_τ взаимно перпендикулярны, то

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Найти полное ускорение – это значит найти не только его величину,

но и его направление в пространстве: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\vec{a}_\tau|}{|\vec{a}_n|}$, или $\operatorname{tg} \beta = \frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}$ (см.

рис.5.4.).

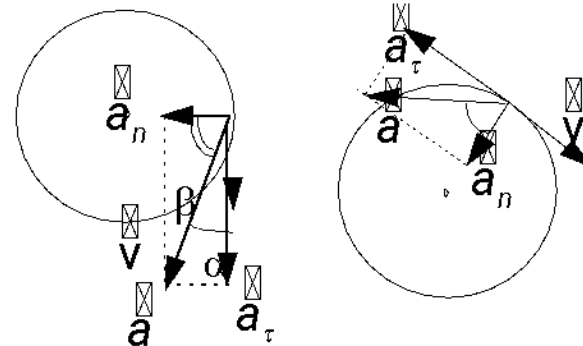


Рис.5.4.

6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Связь между линейными и угловыми величинами.

► *Вращательным движением* называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO' . Рассмотрим бесконечно поворот тела вокруг этой оси. Угол поворота будем характеризовать вектором $d\varphi$, модуль которого равен углу поворота, а направление совпадает с осью OO' так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора $d\varphi$.

Найдем перемещение точки A . Положение точки A зададим радиусом-вектором r , проведенным из некоторой точки O на оси вращения. Линейное перемещение конца радиуса-вектора связано с углом поворота $d\varphi$ соотношением: $|dr| = r \sin \alpha d\varphi$ или в векторном виде:

$$dr = [d\varphi \cdot r]$$

Равенство справедливо для бесконечно малого поворота $d\varphi$.

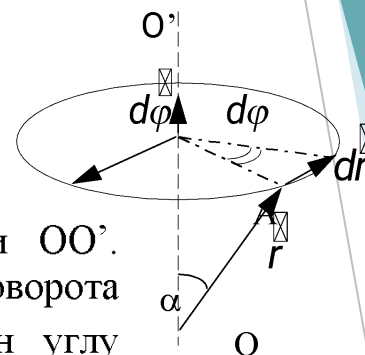


Рис.6.1.

6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Связь между линейными и угловыми величинами.

Векторы, направление которых связывают с направлением вращения, называют *аксиальными*. Вектор $d\varphi$ является аксиальным.

Введем векторы *угловой скорости* и *углового ускорения*.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ определяют как: $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$. Вектор $\vec{\omega}$

совпадает по направлению с вектором $d\varphi$ и представляет собой аксиальный вектор.

Изменение вектора $\vec{\omega}$ со временем характеризуется вектором углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, который определяют как $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $d\vec{\omega}$ – приращением вектора $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\varepsilon}$ также является аксиальным.

При равномерном вращении $\vec{\varepsilon} = \mathbf{0}$ и $\vec{\omega} = \text{const}$. $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, где φ_0 – начальное угловое перемещение.

6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Связь между линейными и угловыми величинами.

Вращательное движение характеризуется периодом T и частотой вращения n .

Частота вращения $n = \frac{N}{t}$, или $n = \frac{1}{T}$, где N – число оборотов, совершаемых телом за время t ; T – период вращения (время одного полного оборота).

Для угловых перемещения и скорости: $\varphi = 2\pi N$; $\omega = 2\pi n$.

При равнопеременном ($\varepsilon = \text{const}$) вращении $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$,

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$, где ω_0 – начальная угловая скорость.

6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Связь между линейными и угловыми величинами.

Установим связь между линейными и угловыми величинами.

Найдем скорость \vec{V} произвольной точки A твердого тела, которое вращается вокруг оси с угловой скоростью ω . Формулу $d\vec{r} = [d\varphi \cdot \vec{r}]$

поделим на соответствующий промежуток dt : $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$,

тогда

$$\boxed{\vec{V} = [\omega \cdot \vec{r}]} \quad (*)$$

Т.е. скорость \vec{V} любой точки A твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω , равна векторному произведению ω на радиус-вектор \vec{r} точки A относительно произвольной точки O оси вращения.

Модуль вектора скорости $v = \omega r \sin \alpha = \omega R$, где R —радиус окружности, по которой движется точка A . Таким образом, $\boxed{v = \omega R}$.

6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Связь между линейными и угловыми величинами.

Продифференцируем (*) по времени: $\vec{a} = \left[\frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{r} \right] + \left[\omega \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right]$.

Так как $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = [\omega \cdot \vec{r}]$, то $\vec{a} = [\varepsilon \cdot \vec{r}] + [\omega \cdot [\omega \cdot \vec{r}]]$.

Здесь вектор $\vec{a}_\tau = [\varepsilon \cdot \vec{r}]$ – тангенциальное ускорение, а вектор $\vec{a}_n = [\omega \cdot [\omega \cdot \vec{r}]]$ – нормальное ускорение. Модули этих ускорений:

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R.$$

Модуль полного ускорения $\boxed{a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

Спасибо за внимание!