

***ЧИСЛОВЫЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ
СЛУЧАЙНЫХ
ВЕЛИЧИН***

Математическое ожидание - (среднее значение) случайной величины есть сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Задача № 1.

Найти математическое ожидание случайной величины, образующейся при бросании правильного однородного куба с пронумерованными гранями 1,2,3,4,5,6.

Решение:

*. Составим закон распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2. Воспользуемся формулой для расчета математического ожидания:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6.$$

$$M(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

Ответ: $M(x)=3,5$

Задача № 2.

При изучении электрического сопротивления кожи до введения атропина установлен закон распределения случайной величины:

X_i	5	7	8	10	12
P_i	0.1	0.3	0.1	0.2	0.3

Найдите математическое ожидание случайной величины.

Решение:

1. Воспользуемся формулой для расчета математического ожидания:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5.$$

$$M(x) = 5 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,3 =$$

$$= 0,5 + 2,1 + 0,8 + 2 + 3,6 = 9$$

Ответ: $M(x) = 9$.

Задача № 3.

При оценке жизненной емкости легких ($X, л$) юных спортсменов были получены следующие результаты $X_1 = 1$ при вероятности $P_1 = 0,1$; $X_2 = 2$ при вероятности $P_2 = 0,2$; $X_3 = 3$ при вероятности $P_3 = 0,4$; $X_4 = 4$ при вероятности $P_4 = 0,2$; и $X_5 = 5$ при вероятности $P_5 = 0,1$. Найдите математическое ожидание данной случайной величины.

Решение:

*. Составим закон распределения:

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2. Воспользуемся формулой для расчета математического ожидания:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5.$$

$$M(x) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 = \\ = 0,1 + 0,4 + 1,2 + 0,8 + 0,5 =$$

Ответ: $M(x) = 3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти математическое ожидание случайной величины, образующейся при бросании правильного однородного икосаэдра с пронумерованными гранями 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20.

2. Дан закон распределения значений физиологического показателя – частоты сердечных сокращений у водителей до работы по данным ЭКГ:

X_i	61	73	78	82	90
P_i	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

Найдите математическое ожидание случайной дискретной величины.

3. При оценке функционального состояния тяжелоатлетов получили следующие показатели частоты дыхания (дых/мин): $X_1 = 9$ с вероятностью $P_1 = 0,1$; $X_2 = 10$ с вероятностью $P_2 = 0,2$; $X_3 = 11$ с вероятностью $P_3 = 0,3$; $X_4 = 12$ с вероятностью $P_4 = 0,3$ и $X_5 = 14$ с вероятностью $P_5 = 0,1$. Найдите математическое ожидание данного показателя.

Дисперсия случайной величины - это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(x) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \dots + (x_i - M(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n (M(X) - x_i)^2 p_i$$

Задача № 1.

Дан закон распределения значений физиологического показателя (мышечная сила в кг) водителей после рабочего дня:

x	50	60	70	80
P	0.3	0.3	0.3	0.1

Математическое ожидание этой случайной величины принимает значение, равное 62. Определите дисперсию.

Решение:

$M(x)=62$ – по условию.

Воспользуемся формулой для расчета дисперсии:

$$D(x) = (M(x) - x_1)^2 \cdot p_1 + (M(x) - x_2)^2 \cdot p_2 + \\ + (M(x) - x_3)^2 \cdot p_3 + (M(x) - x_4)^2 \cdot p_4.$$

$$D(x) = (50 - 62)^2 \cdot 0,3 + (60 - 62)^2 \cdot 0,3 + (70 - 62)^2 \cdot 0,3 + \\ + (80 - 62)^2 \cdot 0,1 = 43,2 + 1,2 + 19,2 + 32,4 = 96$$

Ответ: $D(x) = 96$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Дан закон распределения значений частоты пульса до введения атропина:

x	72	80	82	84
P	0.2	0.3	0.4	0.1

Математическое ожидание этой случайной величины равно 79.6. Определить дисперсию случайной величины.

2. Дан закон распределения значений физиологического показателя (индекса напряжения по данным ЭКГ /лежа/) водителей до работы:

x	40	50	60	65
P	0.1	0.3	0.4	0.2

Математическое ожидание этой случайной величины принимает значение, равное 56. Определите дисперсию.

3. При оценке показателей теппинг-теста студенток первого курса медицинского университета (X , ударов/с) были получены следующие результаты $X_1 = 5$ при вероятности $P_1 = 0,1$; $X_2 = 6$ при вероятности $P_2 = 0,2$; $X_3 = 7$ при вероятности $P_3 = 0,4$; $X_4 = 8$ при вероятности $P_4 = 0,2$ и $X_5 = 9$ при вероятности $P_5 = 0,1$. Найдите дисперсию показателей теппинг-теста студенток первого курса медицинского университета, если математическое ожидание данной случайной величины $M(X) = 7$ ударов в секунду.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

Задача № 1.

Найти среднеквадратичное отклонение случайной величины, если ее дисперсия принимает значение, равное 169.

Решение:

По определению $\sigma = \sqrt{D(x)}$, тогда $\sigma = \sqrt{169} = 13$.

Ответ: $\sigma = 13$.

Задача № 2.

Найдите дисперсию частоты дыхания спортсменов, если среднее квадратическое отклонение данного показателя равно 1,91.

Решение: По определению $\sigma = \sqrt{D(x)}$, тогда $D(x) = \sigma^2$

$$D(x) = 1,91^2 = 3,648$$

Ответ: $D(x) = 3,648$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти среднеквадратичное отклонение случайной величины, если ее дисперсия принимает значение, равное 225.
2. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины, если ее дисперсия принимает значение, равное 64.
3. Найдите дисперсию электрокожного сопротивления спортсменов, если среднее квадратическое отклонение данного показателя равно 4,21.

КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Как изменится математическое ожидание, если случайную величину X уменьшили в 16 раз?

Решение:

По формуле математического ожидания :

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Зависимость между $M(x)$ и X_i прямая, т.е. если X_i уменьшается (или увеличивается), значит и $M(x)$ тоже уменьшается (или увеличивается) так же как и X_i . По условию X_i уменьшили в 16 раз, следовательно $M(x)$ тоже уменьшится в 16 раз.

Ответ: уменьшится в 16 раз.

2. Случайную величину X увеличили в 11 раз. Как при этом изменится дисперсия этой случайной величины?

Решение:

По формуле дисперсии случайной величины:

$$D(x) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \dots + (x_i - M(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n (M(X) - x_i)^2 p_i$$

Зависимость между $D(x)$ и X_i прямая, т.е. если X_i уменьшается (или увеличивается), значит и $D(x)$ тоже уменьшается (или увеличивается), но только в X_i^2 раз. По условию X_i увеличили в 11 раз, следовательно $D(x)$ увеличится в 121 раз.

Ответ: увеличится в 121 раз.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Как изменится математическое ожидание, если случайную величину X увеличили в 25 раз?
2. Случайную величину X уменьшили в 7 раз. Как при этом изменится дисперсия этой случайной величины?