

***ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ***

Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема существования неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Исходным понятием интегрального исчисления является понятие первообразной.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором интервале, если во всех точках этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет соотношению

$$F'(x) = f(x)$$

или, что то же самое, соотношению

$$dF(x) = f(x)dx.$$

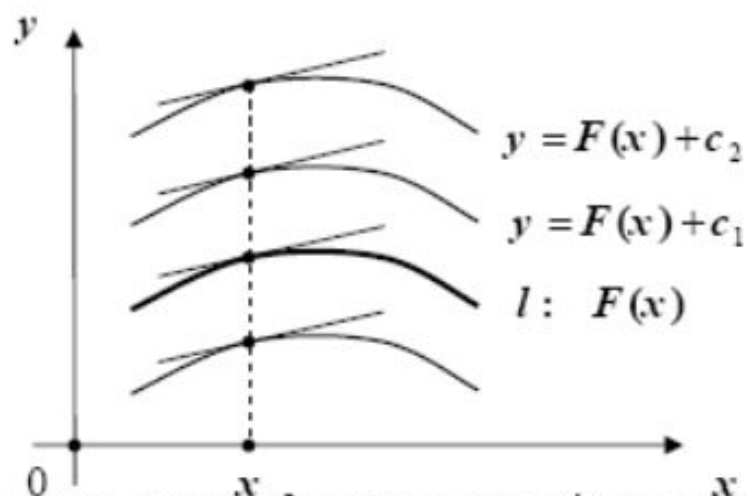
Пример 1. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$ на всей числовой прямой, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно заметить, что если функция имеет первообразную, то эта первообразная не единственная. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и C — постоянная, то функция $F(x)+C$ также является первообразной для $f(x)$.

Теорема 1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на некотором интервале, то выражение $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, содержит все первообразные для $f(x)$.

Рассмотренная теорема имеет простую геометрическую интерпретацию.



Действительно, пусть кривая l является графиком функции $F(x)$ — первообразной функции $f(x)$ на некотором интервале.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором интервале называется интегралом на этом интервале и обозначается символом

$$\int f(x)dx .$$

В этом выражении функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, произведение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, переменная x — переменной интегрирования, знак \int называется знаком интеграла. Итак, если функция $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, то по определению:

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла называют интегрированием функции $f(x)$, при этом говорят, что мы не решаем данный интеграл, а «берем» интеграл.

Пример 2. Легко видеть, что если $f(x) = \cos x$, то

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

Замечание 1. При интегрировании данной функции могут получиться различные формы записи результата. Это зависит от способа нахождения первообразных. Но всегда разность найденных первообразных равна некоторому числу. Например, функции $F_1 = \frac{1}{2}(x+1)^2$ и $F_2 = \frac{1}{2}x^2 + x$ являются первообразными для функции $f(x) = x+1$ и, следовательно, мы можем написать два правильных и различных по форме результата

$$\int (x+1)dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C ,$$

$$\int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C .$$

Нетрудно видеть, что разность данных первообразных $F_1(x) - F_2(x) = \frac{1}{2}$.

Приведем еще один пример. А именно, легко убедиться, что справедливы соотношения

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C ,$$
$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C .$$

Действительно, достаточно продифференцировать правые части этих соотношений.

Заметим кроме того, что операция нахождения первообразной бывает достаточно трудоемкой и требует иногда значительного интеллектуального напряжения.

Замечание 2. Равенства, содержащие в качестве слагаемых неопределенные интегралы, не являются равенствами в обычном смысле. О таких равенствах говорят, что они справедливы с точностью до произвольной постоянной. Рассмотренные выше примеры убеждают нас в этом. Действительно, разность между обеими частями равенства, содержащего в качестве слагаемых неопределенные интегралы, равна не нулю, а произвольной постоянной.

Теорема 2 (теорема существования неопределенного интеграла). Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, то на этом интервале она и интегрируема, т.е. имеет первообразную, и, следовательно, существует неопределенный интеграл.

(Без доказательства.)

Заметим, что сформулированная теорема дает достаточное условие существования неопределенного интеграла.

В частности, из приведенной теоремы следует, что всякая элементарная функция имеет неопределенный интеграл в той области, где она определена.

Свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1. Производная неопределенного интеграла равно подинтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

Справедливость этого равенства следует непосредственно из определения неопределенного интеграла, если под словами «производная неопределенного интеграла» понимать производную от любой первообразной для функции $f(x)$.

Свойство 2. Постоянный множитель k можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx .$$

Доказательство. Убедимся, что совпадают производные обеих частей равенства. Действительно, в соответствии со свойством 1, имеем:

$$\left(\int k \cdot f(x) dx \right)' = k \cdot f(x).$$

Если продифференцировать выражение, стоящее в правой части равенства, то, учитывая, что постоянный множитель можно вынести за знак производной и используя св.1, получим:

$$\left(k \int f(x) dx \right)' = k \left(\int f(x) dx \right)' = k f(x).$$

Свойство 3.

$$\begin{aligned} \int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)] dx &= \\ &= k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx \end{aligned}$$

Свойство 4. (Инвариантность формул интегрирования.)

Всякая формула интегрирования справедлива, независимо от того, является переменная интегрированием независимой переменной или дифференцируемой функцией независимой переменной, т.е. если справедливо равенство

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то справедливо соотношение

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

где $u = u(x)$ — любая непрерывная и дифференцируемая функция аргумента x .

Доказательство. Упростим равенство

$$\int f[u(x)] u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

и убедимся в том, что производная левой и правой части совпадают.

Действительно,

$$\left(\int f[u(x)] u'(x) dx \right)' = f[u(x)] u'(x),$$

с другой стороны

$$\left(F[u(x)] + C \right)'_x = F'_u[u(x)] u'_x(x).$$

Пример. Используя справедливость равенства $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$,

взять интеграл $J = \int \sin^3 x \cos x dx$.

Решение. Запишем исходный интеграл в виде

$$J = \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

Таблица неопределенных интегралов

Заметим, что операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными операциями, поэтому обращая формулы дифференцирования основных элементарных функций, без труда составить таблицу основных неопределенных интегралов. Остановимся лишь на некоторых из них

Пример 1. Доказать, что $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Напомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$

следовательно

$$|x|' = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases},$$

значит

$$(\ln|x| + C)'_x = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases},$$

Пример. Принимая во внимание справедливость соотношения

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ взять интегралы } \int \frac{dx}{x^2}, \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

$$1. \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \sqrt{x} + C.$$

Пример Доказать, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C.$$

Для доказательства этой формулы продифференцируем правую часть:

$$\begin{aligned} \left(\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \right)'_x &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)'_x = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)'_x \cdot \text{sign}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \text{sign}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \left[1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}. \end{aligned}$$

Откуда и следует справедливость приведенной в условии примера формулы.

Составим теперь таблицу основных неопределенных интегралов, которую следует выучить наизусть и пользоваться ею без дополнительных обоснований.

Таблица неопределенных интегралов

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C .$$

$a \neq -1, a \in \mathbb{R}$

$$2. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C .$$

$$3. \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C .$$

$a > 0.$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C .$$

$a > 0.$

$$6. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C .$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C .$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C .$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C .$$

$$11. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C .$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C .$$

Примеры. Взять следующие интегралы, пользуясь непосредственно приведенной таблицей неопределенных интегралов (полученный результат проверить дифференцированием)

$$1. \int (x - \sin x) dx = \int x dx - \int \sin x dx = \frac{x^2}{2} + \cos x + C .$$

$$2. \int \frac{(2e)^x}{5^x} dx = \int (0,4e)^x dx = \frac{(0,4e)^x}{\ln(0,4e)} + C .$$

$$3. \int (1 + \sqrt{x})^3 dx = \int (1 + 3\sqrt{x} + 3x + x^{1,5}) dx = x + 3 \cdot \frac{x^{1,5}}{1,5} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^{2,5}}{2,5} + C .$$

$$4. \int \left(\frac{1+x}{x} \right)^2 dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x^2} = \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x} + \int dx = -\frac{1}{x} + 2 \ln|x| + x + C .$$

$$5. \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C .$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C .$$

$$7. \int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C .$$

8.

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C .$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C .$$

Непосредственное интегрирование с помощью таблиц неопределенных интегралов

Решая задачу нахождения первообразной для простейших интегралов с помощью таблицы, прежде всего следует принимать во внимание не только таблицу, но и свойства неопределенного интеграла и это, прежде всего свойство инвариантности формул интегрирования. Поясним суть дела подробнее. Для этого напомним, что дифференциалом функции:

$$dy(x) \stackrel{def}{=} y'_x(x)dx .$$

В частности $d(x + a) = dx$, (1)

$$d(bx) = \frac{1}{b}dx , \quad (2)$$

где a и b некоторые постоянные.

Отсюда вытекают два правила внесения постоянной под знак дифференциала в неопределенном интеграле.

I. Неопределенный интеграл не изменится, если под знаком дифференциала к переменной интегрирования прибавить любую константу, т.е.

$$\int f(x)dx = \int f(x)d(x + a) \quad (3)$$

Примеры. Взять следующие интегралы

$$1. \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C .$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x+5}} = 2 \int \frac{d(x+5)}{2\sqrt{x+5}} = 2\sqrt{x+5} + C .$$

$$3. \int \frac{2x+1}{x+1} dx = \int \frac{2(x+1)-1}{x+1} dx = 2 \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = \\ = 2 \int dx - \int \frac{d(x+1)}{x+1} = 2x - \ln|x+1| + C .$$

$$4. \int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C .$$

$$5. \int 2^{x+5} dx = \int 2^{x+5} d(x+5) = \frac{2^{x+5}}{\ln 2} + C .$$

$$6. \int \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) dx = \int \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) d\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + C .$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2(x - \pi^2/4)} = \int \frac{d(x - \pi^2/4)}{\cos^2(x - \pi^2/4)} = \operatorname{tg}(x - \pi^2/4) + C .$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \\ = \operatorname{arctg}(x+1) + C .$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2x + 1) - 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} = \\ = \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + C .$$

II. Неопределенный интеграл следует разделить на константу, если переменная интегрирования под знаком дифференциала в неопределенном интеграле умножается на эту константу, т.е.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{b} \int f(x) dbx .$$

Примеры.

$$1. \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d 3x = \frac{1}{3} \sin 3x + C .$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C .$$

$$3. \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x + C .$$

$$4. \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} d 5x = \frac{1}{5} e^{5x} + C .$$

$$5. \int \frac{dx}{5^{2x}} = \int 5^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int 5^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} \frac{5^{-2x}}{\ln 5} + C .$$

$$6. \int (e^x + 2)^2 dx = \int (e^{2x} + 4e^x + 4) dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d 2x + 4 \int e^x dx + 4 \int dx = \\ = \frac{1}{2} e^{2x} + 4e^x + 4x + C .$$

$$7. \int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d 2x}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C .$$

Заметим, что иногда приходится комбинировать эти два правила внесения постоянной под знак дифференциала в неопределенном интеграле. Приведем примеры

Примеры.

$$1. \int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} + C.$$

$$2. \int \sqrt{4x-7} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{4x-7} d(4x-7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-7)^{1,5}}{1,5} + C = \\ = \frac{1}{6} (4x-7)^{1,5} + C.$$

$$3. \int e^{5x+1} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x+1} d(5x+1) = \frac{1}{5} e^{5x+1} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{3^{1-2x}} = \int 3^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int 3^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2} \frac{3^{2x-1}}{\ln 3} + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{5x+7} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+7)}{5x+7} = \frac{1}{5} \ln|5x+7| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{4x^2+12x+11} = \int \frac{dx}{4x^2+2 \cdot 2 \cdot 3x+9+2} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2+(\sqrt{2})^2} = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{2}} + C.$$

Очень часто для получения табличного интеграла под знак дифференциала в неопределенном интеграле приходится вносить не только константы, но и часть подынтегральной функции, зачастую комбинируя эти приемы

Примеры.

$$1. \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln|e^x + 1| + C .$$

$$2. \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln|\ln|x|| + C .$$

$$3. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + C .$$

$$4. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int (\sin x)^{-\frac{2}{3}} d \sin x = \frac{(\sin x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C .$$

$$5. \int 2x \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \sqrt{x^2 + 1} dx^2 = \int \sqrt{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{(x^2 + 1)^{1,5}}{1,5} + C .$$

$$6. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 4}} = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 4)}{\sqrt{x^5 + 4}} = \frac{2}{5} \sqrt{x^5 + 4} + C .$$

Подстановка в неопределенном интеграле

Суть метода подстановки (замены переменной) состоит в том, что с помощью специальным образом подобранной замены переменной интегрирования данное подынтегральное выражение преобразуется к другому подынтегральному выражению, которое является более простым в смысле интегрирования.

Пусть $x = \varphi(t)$ — строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения переменной t . Если на соответствующем интервале изменения x функция $f(x)$ непрерывна, то получим:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Справедливость равенства (1) следует из свойства инвариантности формул интегрирования, ибо если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то, находя производную сложной функции $F[\varphi(t)]$ по переменной t , получим:

$$(F[\varphi(t)])'_t = F'[\varphi(t)] \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t).$$

Нетрудно заметить, что $F[\varphi(t)]$ является первообразной для $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$. Это означает, что каждая из частей равенства (1) представляет собою совокупность всех первообразных для функции $f(x)$. Разница состоит только в том, что интеграл в левой части выражает эту совокупность в виде явных функций от переменной x , а интеграл в правой части — в виде функций, выраженных параметрически с помощью параметра t , причем $x = \varphi(t)$. Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Для выражения интеграла в виде функции от x следует после интегрирования по переменной t в полученном результате перейти от переменной t к переменной x при помощи соотношения $x = \varphi(t)$. Заметим, что иногда при использовании метода замены переменной удобно вводить подстановки в виде $t = \psi(x)$ или $\varphi(t) = \psi(x)$. Познакомимся с этим методом на конкретных примерах.

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Данный интеграл существует $\forall x \geq 0$. Сделаем подстановку $\sqrt{x} = t$, откуда следует $x = t^2$ и $dx = 2t dt$. Тогда имеем:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = 2 \left(\int dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) = 2(t - \ln|t+1|) + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2 \left[\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}| \right] + C.$$

2. Считая, что $x > 0$, вычислить интеграл

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$$

Для вычисления данного интеграла разумно сделать подстановку $x = t^6$ (чтобы упростить оба корня в подынтегральном выражении). Тогда будет: $dx = 6t^5 dt$,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 6 \left[\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} \right] = \\ &= 6[t - \operatorname{arctg} t] + C = 6 \left[\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} \right] + C. \end{aligned}$$

Интегрирование «по частям»

Этот метод является обращением правила дифференцирования произведения двух функций.

Действительно, пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на некотором интервале. Очевидно, что

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Произведение $u \cdot v$ является первообразной для суммы $u'v + uv'$ и, следовательно, по определению неопределенного интеграла, можем написать

$$\int (u'v + uv') dx = uv + C$$

или так:

$$\int u'v dx + \int uv' dx = uv + C.$$

Принимая во внимание, что $u'(x)dx = du$, $v'(x)dx = dv$, окончательно получим:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Это и есть формула интегрирования по частям. Заметим, что произвольная постоянная C здесь не выписывается явно, т.к. неопределенный интеграл неявным образом уже содержит произвольную постоянную. Метод интегрирования по частям применим тогда, когда подынтегральное выражение предложенного интеграла можно представить в виде $u \cdot dv$, причем функции $u(x)$ и $v(x)$ выбираются так, чтобы интегрирование выражения $v \cdot du$ было проще интегрирования выражения $u \cdot dv$. Следует отметить, что при интегрировании по частям приходится по дифференциалу dv находить функцию $v(x)$. При этом произвольную постоянную обычно опускают, т.к. достаточно найти только одну какую-нибудь первообразную. При вычислении интеграла по частям за $u(x)$ следует принять функцию, которая упрощается при дифференцировании, если структура подынтегрального выражения это позволяет.

Пример 1. $\int (x + 2)e^x dx$.

Здесь под знаком интеграла стоит произведение двух функций. Примем за $u(x) = x + 2$, т.к. e^x при дифференцировании не упрощается. Получим

$$\begin{array}{l|l} u = x + 2 & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}$$

тогда

$$J = uv - \int v du = (x + 2)e^x - \int e^x dx = (x + 2)e^x - e^x + C.$$

Заметим, что в процессе решения интеграла метод интегрирования по частям иногда приходится применять неоднократно.

Пример $J = \int e^x \sin x dx$.

В данном случае не играет роли, какую из функций принять за $u(x)$, т.к. ни e^x , ни $\sin x$ при дифференцировании не упрощаются. Итак, имеем:

$$\begin{array}{l|l} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}$$

Тогда

$$J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Пришли к интегралу который также решим по частям, а именно

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

$$\begin{array}{l|l} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array}$$

Таким образом, мы пришли к уравнению относительно исходного интеграла:

$$J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J,$$

откуда следует:

$$J = \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$$

Пример

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx =$$

$$\begin{array}{l|l} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Пример

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\begin{array}{l} u = x \\ dv = \frac{x dx}{(x^2+1)^2} \end{array} \left| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2x^2+1} \end{array} \right.$$

Пример

$$J = \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = \frac{x dx}{(x^2+1)} \end{array} \left| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x^2+1} \\ v = \int \frac{x dx}{(x^2+1)} = -\frac{1}{2x^2+1} \end{array} \right.$$

Найдем отдельно

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)} = \\ &= \operatorname{arctg} x - \left(-\frac{x}{2x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C \right) = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Окончательно

$$J = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2x^2+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)} \right) + C.$$

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Заметим, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ во втором интеграле стоит под корнем.

Рассмотрим простой подход к решению таких интегралов, который всегда приводит к цели.

I. Прежде всего, выделим в числителе выражение, пропорциональное производной квадратного трехчлена. Имеем:

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b,$$

следовательно

$$(Ax + B) = \frac{A}{2a}(2ax + b) - \frac{Ab}{2a} + B.$$

Тогда получим

$$J_1 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$J_2 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене: $ax^2 + bx + c =$
 $= a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} + c - \frac{b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right].$

Будем иметь:

$$J_1 = \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{d(x + b/2a)}{a \left[(x + b/2a)^2 + (c - b^2/4a^2) \right]},$$

$$J_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{d(x + b/2a)}{\sqrt{a \left[(x + b/2a)^2 + (c - b^2/4a^2) \right]}}.$$

Очевидно, что не составляет труда получить окончательный ответ

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}}$.

Заметим, что нет необходимости выделять в числителе производную квадратного трехчлена. Нужно только выделить полный квадрат под корнем

$$\begin{aligned} 5x^2 - x - 1 &= 5\left(x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right) = 5\left[x^2 - 2\frac{1}{10}x + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} - \frac{1}{5}\right] = \\ &= 5\left[\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{21}{100}\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{21}{100}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{10}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{21}{100}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x - 0,1 + \sqrt{x^2 - 0,2x - 0,2} \right| + C. \end{aligned}$$

Интегрирование тригонометрических выражений.

Рассмотрим различные способы решения некоторых интегралов, содержащих тригонометрические функции под знаком интеграла.

$$1. \int R(\sin x) \cos x dx, \int R(\cos x) \sin x dx$$

Здесь через $R(\sin x)$, $R(\cos x)$ обозначена любая рациональная функция, аргументом которой является $\sin x$ или соответственно $\cos x$.

В первом интеграле следует сделать подстановку $\sin x = t$, а во втором $\cos x = t$.

Пример 1.
$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 4}.$$

Сделаем подстановку $\sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$. Подставим эти результаты в интеграл:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2} + C.$$

II. Интегралы вида:

а) $\int \sin m x \cos n x dx$,

б) $\int \sin m x \sin n x dx$,

в) $\int \cos m x \cos n x dx$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

В данном случае произведение, стоящее под знаком интеграла, следует преобразовать в сумму. Напомним известные формулы из тригонометрии

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (4)$$

Складывая формулы (1) и (2) получим

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Полагая $\alpha = m x$, $\beta = n x$ получим

$$\sin m x \cos n x = \frac{1}{2} [\sin(m + n)x + \sin(m - n)x]. \quad (5)$$

Складывая и вычитая формулы (3) и (4) получим соответственно

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(m - n)x - \cos(m + n)x] \quad (6)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(m + n)x + \cos(m - n)x] \quad (7)$$

Пример 1. $\int \cos 2x \sin^2 4x dx$.

$$\begin{aligned}\int \cos 2x \sin^2 4x dx &= \frac{1}{2} \int \cos 2x (1 - \cos 8x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \cos 8x dx = \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \int \cos 10x dx - \frac{1}{4} \int \cos 6x dx = \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{40} \sin 40x - \frac{1}{24} \sin 6x + C.\end{aligned}$$

Пример 2. $\int \sin x \cos 5x dx$.

Используя формулу (5), получим

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin 6x - \sin 4x] dx = \frac{1}{12} \int \sin 6x d 6x - \frac{1}{8} \int \sin 4x d 4x = \\ &= -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 4x}{4} + C.\end{aligned}$$

Пример 3. $\int \sin^2 2x \cos^4 x dx$.

Пользуясь формулами удвоения углов, преобразуем подынтегральное выражение

$$\begin{aligned}\sin^2 2x \cos^4 x &= \frac{1 - \cos 4x}{2} \cdot \frac{(1 + \cos x)^2}{4} = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) \left(1 + 2 \cos x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{16} (3 + 4 \cos x + \cos 2x - 3 \cos 4x - 4 \cos x \cos 4x - \cos 2x \cos 4x).\end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\int \cos x \cos 4x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos 3x) dx = \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{6} \sin 3x + C, \\ \int \cos 2x \cos 4x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 2x) dx = \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

$$\text{III. } \int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx .$$

Если под знаком интеграла стоят тригонометрические функции, возведенные в четную степень, то рекомендуется сделать подстановку

$\text{tg} x = t$, тогда $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$ или в силу подстановки $x = \text{arctg} t$ получаем

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \text{ очевидно, что}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

аналогично

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Итак, полагая $\text{tg} x = t$, получим

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Заметим, что иногда бывает уместна подстановка $\text{ctg} x = t$.

Пример 1. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

Полагая $\text{tg} x = t$, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^2/(t^2+1))} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + (1/\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg}(\sqrt{2}t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg}(\sqrt{2} \text{tg} x) + C . \end{aligned}$$

IV. $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Введем подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой и позволяет выразить $\sin x$, $\cos x$ и dx рационально через переменную t . Эта подстановка всегда приводит к цели, однако пользоваться ею следует осторожно, т.к. при высоких степенях $\cos x$ и $\sin x$ она приводит к очень громоздким выкладкам.

Итак, подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ дает нам

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее из равенства $x = 2 \operatorname{arctg} t$, которое следует из подстановки, получим после дифференцирования

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример $\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$.

Применяя подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left[1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right]} = - \int \frac{dt}{t-1} = -\ln|t-1| + C = \\ &= -\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

Пример $\int \frac{dx}{5 - 4x + 3 \cos x}$.

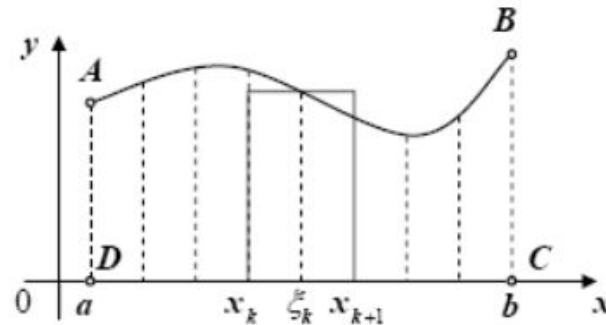
Применяя подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 4x + 3 \cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left[5 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{3-3t^2}{1+t^2} \right]} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2} = \\ &= -\frac{1}{t-2} = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

Определенный интеграл

Определенный интеграл. Его свойства

Определение определенного интеграла.



Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$, определенную на промежутке $[a; b]$ ($a < b$), рис. 2.1.1.

Выполним 5 операций.

1. Разобьем промежуток $[a; b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n = b$ произвольным образом на n частей. Обозначим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, а наибольшую из длин этих частичных участков обозначим через λ , т.е. $\lambda = \sup \{ \Delta x_k \}$; λ будем называть рангом дробления.
2. На каждом частичном участке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_k и вычислим в ней значение функции $f(\xi_k)$.
3. Составим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.
4. Составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Эта сумма называется интегральной суммой или суммой Римана.

5. Измельчая дробление (за счёт увеличения числа точек дробления n) и устремляя при этом шаг дробления к нулю ($\lambda \rightarrow 0$) (т.е. увеличивая число точек дробления, мы следим за тем, чтобы уменьшалась и стремилась к нулю длина каждого из частичных участков Δx_k), будем находить предел последовательности интегральных сумм

$$J = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sigma_n .$$

Если этот предел существует, не зависит от способа дробления и выбора точек ξ_k , то он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ и обозначается так:

$$J = \int_a^b f(x) dx .$$

Итак, мы привели ни что иное, как развернутое определение определенного интеграла от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$. Принимая во внимание сказанное выше, можем дать определение определенного интеграла более компактно так:

$$J = \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \quad (a < b),$$

где a — нижний предел интегрирования, b — верхний предел. В этом случае, когда для функции $f(x)$ существует определенный интеграл

$\int_a^b f(x) dx$, функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a, b]$. Заметим, что в приведенном определении предполагается $a < b$.

Понятие определенного интеграла можно обобщить и на случай, когда $b < a$ или $b = a$. Действительно, будем иметь в силу определения, что

если $b < a$, то $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, а если $a = b$, то $\int_a^b f(x) dx = 0$.

2. Теорема существования определенного интеграла.

Возникает вопрос: всякая ли функция $f(x)$ интегрируема на данном промежутке $[a, b]$. Предварительно дадим определение кусочно-непрерывной функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **кусочно-непрерывной** на данном промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке она ограничена и имеет конечное число точек разрыва.

Геометрически кусочно-непрерывную функцию можно изобразить линией, состоящей из конечного числа непрерывных участков. Очевидно, что функция, непрерывная на промежутке $[a, b]$, является частным случаем кусочно-непрерывной функции.

Приведем теперь без доказательства теорему существования определенного интеграла.

Теорема (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на промежутке $[a, b]$, то на этом про-

межутке она интегрируема, т.е. существует $\int_a^b f(x) dx$.

(Без доказательства.)

Заметим, что класс функций, указанных в теореме, практически исчерпывает все функции, встречающиеся в приложениях. В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваются только такие функции.

4. Свойства определенного интеграла.

Свойство 1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ (по определению).

Свойство 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (по определению), т.е. при пере-

мене местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный.

Свойство 3 (линейность интеграла).

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx .$$

Для доказательства достаточно составить интегральную сумму для функции $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ и воспользоваться свойствами пределов функции. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} [c_1 f_1(\xi_k) + c_2 f_2(\xi_k)] \cdot \Delta x_k &= c_1 \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \\ &+ c_2 \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\xi_k) \cdot \Delta x_k = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx . \end{aligned}$$

Отметим, что из доказанного следуют такие очевидные факты

а) $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx ,$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

б) $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx ,$

т.е. интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций по данному промежутку $[a, b]$.

Свойство 4. Каковы бы ни были числа a , b и c , имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

лишь бы только функция $f(x)$ была интегрируема на каждом из промежутков $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$ (рис. 2.1.2).

Для доказательства этого свойства достаточно составить интегральные суммы для каждого из трех интегралов, включив точку c в число точек дробления, а затем рассмотреть пределы получившихся интегральных сумм при условии, что $n \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$.

Свойство 5 (оценка определенного интеграла).

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то имеет место такая оценка определенного интеграла:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Свойство 6 (теорема о среднем).

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то между точками a и b найдется хотя бы одна точка ξ такая, что будет иметь место равенство

Свойство 7.

а) Если $a < b$, и $\forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

б) Если $a < b$, и $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Свойство 8.

Если $a < b$, и $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$.

Свойство 9.

Если $a < b$, и $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Свойство 10. Изменение значения $f(x)$ в одном или любом конечном числе точек из промежутка интегрирования не влияет на интегрируемость функции и не меняет значения определенного интеграла.

Вычисление определенного интеграла

1. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом (теорема Барроу).

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t) dt$ имеет производную, равную значению подынтегральной функции при верхнем пределе, т.е.

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

2. Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то определенный интеграл от этой функции по промежутку $[a, b]$ равен разности значений какой-либо первообразной этой функции на верхнем и на нижнем пределах интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ (формула Ньютона-Лейбница).}$$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, и в определенном интеграле произвести замену переменной интегрирования при помощи подстановки $x = \varphi(t)$, причем функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на промежутке $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и, кроме того, функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \psi(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt .$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, тогда

$$(F[\varphi(t)])'_t = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) .$$

Следовательно

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) ,$$

а так как

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) ,$$

то ясно, что

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt .$$

Замечание 1. Для вычисления определенных интегралов замена переменной может определяться соотношением $t = \varphi(x)$ или $\varphi(t) = \psi(x)$, или $\Phi(x, t) = 0$ при выполнении необходимых ограничений на функции, задающие замену переменных.

Замечание 2. При вычислении определенных интегралов с помощью подстановки нет необходимости возвращаться к первоначальному аргументу (это с очевидностью следует из доказательства теоремы).

4. Интегрирование по частям.

Теорема. Если в промежутке $[a, b]$ функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные, то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$d(u(x) \cdot v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x).$$

Проинтегрируем его на промежутке $[a, b]$, получим

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Заметим, что в этом выражении интегрирование ведется по переменной x .

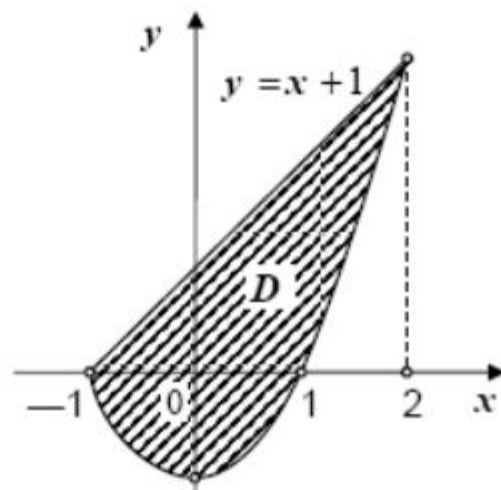
Пример 3. Вычислить $J = \int_1^3 x \ln x dx$.

Решение. Вычислим данный интеграл по частям, положив $u(x) = \ln x$, $dv(x) = x dx$. Тогда $du(x) = \frac{dx}{x}$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Следовательно

$$J = \int_1^3 x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2}\Big|_1^3 - \frac{1}{2} \int_1^3 x dx = \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^3 = \frac{9}{2} \ln 3 - 2.$$

Ответ: $J = \frac{9}{2} \ln 3 - 2$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 - 1$ и $y = x + 1$ (рис. 2.3.4)



Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{array} \right\} \text{Рис. 2.3.4}$$

Решив ее, найдем координаты точек $A(-1, 0)$ и $B(2, 3)$. Тогда очевидно, что площадь фигуры

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [(x+1) - (x^2-1)] dx = \int_{-1}^2 [x - x^2 + 2] dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{29}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{29}{3}$ кв. ед.

5. Приложение определенного интеграла к экономическим задачам.

Рассмотрим следующую типовую задачу.

Предприятие выпускает однородную продукцию. Интенсивность ее выпуска в различные моменты времени t может быть различной в силу неравномерности поставок сырья и других причин. Интенсивность выпуска продукции обозначим $\varphi(t)$ — это количество выпущенной продукции за единицу времени, начиная с момента t (в предположении, что с этого момента интенсивность постоянна).

Стоимость выпускаемой продукции также не постоянна, а меняется по закону $f(t)$, в силу различной стоимости сырья, стоимости труда, величины налогов и т.д. Требуется найти стоимость выпущенной продукции за промежуток времени $[T_1, T_2]$. Будем предполагать функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывными.

Пусть Q — искомая стоимость. Подсчитаем стоимость ΔQ продукции, выпущенной за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$. Если бы интенсивность $\varphi(t)$ и стоимость $f(t)$ за этот малый промежуток времени не менялись, то $\Delta Q = \varphi(t)f(t)\Delta t$. Если же они меняются, то это произведение является лишь главной частью ΔQ , пропорциональной Δt , что можно записать в виде

$$\Delta Q = \varphi(t)f(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Здесь $o(\Delta t)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем Δt : $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Действительно, за бесконечно малое время Δt функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ изменятся на бесконечно малые величины Δf и $\Delta \varphi$ соответственно, что в произведении с Δt даст бесконечно малую высшего порядка, чем Δt . Это бесконечно малая отнесена в $o(\Delta t)$.

Итак, слагаемое $\varphi(t)f(t)\Delta t$ есть главная часть ΔQ , пропорциональная Δt , т.е. по определению — дифференциал функции $Q(t)$ — стоимость выпущенной продукции к моменту t , начиная с какого-либо фиксированного момента:

$$dQ = \varphi(t)f(t)\Delta t.$$

Тогда, интегрируя дифференциал в пределах T_1 и T_2 , находим

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dQ(t) = \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t)f(t)dt.$$

Несобственные интегралы по неограниченному промежутку

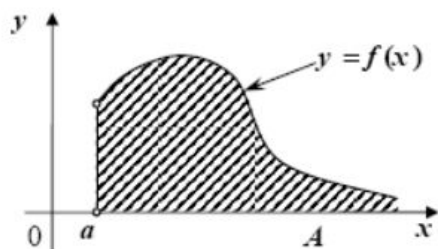
1. Определение несобственного интеграла по неограниченному промежутку.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, A] \subset [a, +\infty)$.

Определение 1. Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty[$ (несобственным интегралом 1-го рода) называют предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx.$$

Если этот предел конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, в противном случае — **расходящимся**.



Если $f(x) > 0$ (рис. 3.1.1), то очевидно, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ дает нам площадь бесконечной криволинейной трапеции.

Принимая во внимание формулу Ньютона-Лейбница и определение несобственного интеграла 1-го рода, вычислим

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на любом промежутке $[a, A] \subset [a, +\infty)$. Обобщив формулу Ньютона-Лейбница, можно окончательно написать

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Аналогично определяется и интеграл $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ и его сходимость,

т.е.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty).$$

В том случае, когда бесконечны и верхний и нижний пределы интегрирования, по определению имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

где c — любое действительное число. При этом несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла, стоящие справа.

2. Главное значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Определение. Главным значением несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ называется предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [F(R) - F(-R)],$$

который обозначается так:

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$

(от франц. *valeur principal* — главное значение).

Заметим что в определении главного значения несобственного интеграла имеется в виду симметричное возрастание модуля переменной x в положительном и отрицательном направлении, в то время как по определению несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ мы прежде всего

должны заменить суммой $\int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ и отдельно исследовать

сходимость каждого слагаемого, не накладывая никакой связи на вычисление возникающих при этом несобственных интегралов.

Может оказаться, что несобственный интеграл расходится, а его главное значение сходится.

Очевидно, что для несобственных интегралов справедливы все основные свойства неопределенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Вычислить $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_2^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 2 = +\infty,$$

т.е. данный интеграл расходится.

Пример 4. Найти, при каком значении r несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r} \quad (a > 0) \text{ сходится.}$$

Решение. Рассмотрим отдельно случаи, когда $r = 1$, $r > 1$ и $r < 1$.

1. Если $r = 1$, тогда будет

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \ln|x| \Big|_a^{+\infty} = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

2. Если $r > 1$, положим $r = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Будем иметь:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \int_a^{+\infty} x^{-1-\varepsilon} dx = \frac{x^{-1-\varepsilon+1}}{-\varepsilon} \Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{-\varepsilon x^\varepsilon} \Big|_a^{+\infty} = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon a^\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon a^\varepsilon}$$

т.е. в данном случае интеграл сходится.

3. Если $r < 1$, положим $r = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \int_a^{+\infty} x^{-1+\varepsilon} dx = \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} \Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\varepsilon - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится

Итак, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r}$, где $a > 0$, сходится, если $r > 1$ и расходится, если $r \leq 1$.

В дальнейшем этот факт можно использовать как очевидный при исследовании сходящихся несобственных интегралов.