ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема существования неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Исходным понятием интегрального исчисления является понятие первообразной.

Определение 1. *Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором интервале, если во всех точках этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет соотношению*

$$F'(x)=f(x)$$

или, что то же самое, соотношению

$$dF(x)=f(x)dx.$$

Пример 1. *Функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$ на всей числовой прямой, так как*

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2, \forall x\in R.$$

Нетрудно заметить, что если функция имеет первообразную, то эта первообразная не единственная. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и C — постоянная, то функция $F(x)+C$ также является первообразной для $f(x)$.

Теорема 1. *Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на некотором интервале, то выражение $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, содержит все первообразные для $f(x)$.*

Рассмотренная теорема имеет простую геометрическую интерпретацию.

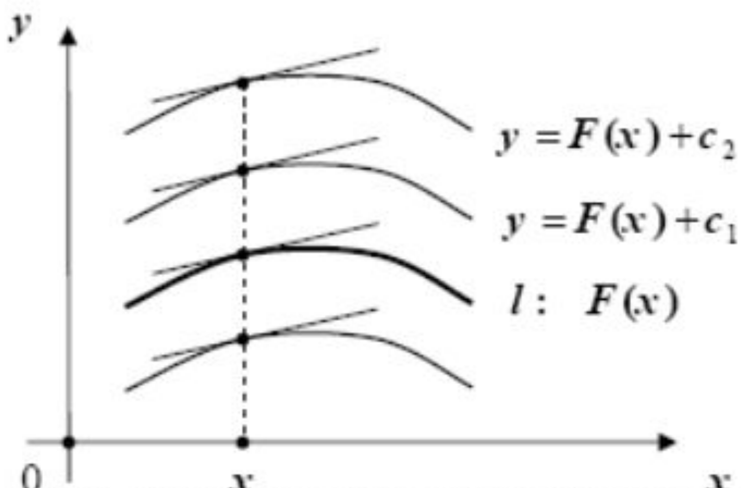

Рис. 1.1

Действительно, пусть кривая l является графиком функции $F(x)$ — первообразной функции $f(x)$ на некотором интервале.

Определение. *Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором интервале называется интегралом на этом интервале и обозначается символом*

$$\int f(x)dx .$$

В этом выражении функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, произведение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, переменная x — переменной интегрирования, знак $\int$ называется знаком интеграла. Итак, если функция $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, то по определению:

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла называют интегрированием функции $f(x)$, при этом говорят, что мы не решаем данный интеграл, а «берем» интеграл.

Пример 2. Легко видеть, что если $f(x) = \cos x$, то

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

Замечание 1. При интегрировании данной функции могут получиться различные формы записи результата. Это зависит от способа нахождения первообразных. Но всегда разность найденных первообразных равна некоторому числу. Например, функции $F_1 = \frac{1}{2}(x+1)^2$ и $F_2 = \frac{1}{2}x^2 + x$ являются первообразными для функции $f(x) = x + 1$ и, следовательно, мы можем написать два правильных и различных по форме результата

$$\int (x+1)dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C ,$$

$$\int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C .$$

Нетрудно видеть, что разность данных первообразных $F_1(x) - F_2(x) = \frac{1}{2}$.

Приведем еще один пример. А именно, легко убедиться, что справедливы соотношения

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C \ ,$$

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C \ .$$

Действительно, достаточно продифференцировать правые части этих соотношений.

Заметим кроме того, что операция нахождения первообразной бывает достаточно трудоемкой и требует иногда значительного интеллектуального напряжения.

Замечание 2. Равенства, содержащие в качестве слагаемых неопределенные интегралы, не являются равенствами в обычном смысле. О таких равенствах говорят, что они справедливы с точностью до произвольной постоянной. Рассмотренные выше примеры убеждают нас в этом. Действительно, разность между обеими частями равенства, содержащего в качестве слагаемых неопределенные интегралы, равна не нулю, а произвольной постоянной.

Теорема 2 (теорема существования неопределенного интеграла). *Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, то на этом интервале она и интегрируема, т.е. имеет первообразную, и, следовательно, существует неопределенный интеграл.*

(Без доказательства.)

Заметим, что сформулированная теорема дает достаточное условие существование неопределенного интеграла.

В частности, из приведенной теоремы следует, что всякая элементарная функция имеет неопределенный интеграл в той области, где она определена.

Свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1. Производная неопределенного интеграла равно подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)_x' = f(x).$$

Справедливость этого равенства следует непосредственно из определения неопределенного интеграла, если под словами «производная неопределенного интеграла» понимать производную от любой первообразной для функции $f(x)$.

Свойство 2. Постоянный множитель k можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Доказательство. Убедимся, что совпадают производные обеих частей равенства. Действительно, в соответсвии со свойством 1, имеем:

$$\left(\int k \cdot f(x)dx\right)' = k \cdot f(x).$$

Если продифференцировать выражение, стоящее в правой части равенства, то, учитывая, что постоянный множитель можно вынести за знак производной и используя св.1, получим:

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x).$$

Свойство 3.

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]dx =$$

$$= k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + \ldots + k_n\int f_n(x)dx$$

Свойство 4. *(Инвариантность формул интегрирования.)*

Всякая формула интегрирования справедлива, независимо от того, является переменная интегрированием независимой переменной или дифференцируемой функцией независимой переменной, т.е. если справедливо равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ,$$

то справедливо соотношение

$$\int f(u)du = F(u) + C \ ,$$

где $u = u(x)$ — любая непрерывная и дифференцируемая функция аргумента x.

Доказательство. Упростим равенство

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

и убедимся в том, что производная левой и правой части совпадают.

Действительно,

$$\left(\int f[u(x)]u'(x)dx\right)' = f[u(x)]u'(x),$$

с другой стороны

$$\left(F[u(x)] + C\right)_x' = F_u'[u(x)]u_x'(x).$$

Пример. Используя справедливость равенства $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$, взять интеграл $J = \int \sin^3 x \cos x\, dx$.

Решение. Запишем исходный интеграл в виде

$$J = \int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\; d(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + C\ .$$

Таблица неопределенных интегралов

Заметим, что операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными операциями, поэтому обращая формулы дифференцирования основных элементарных функций, без труда составить таблицу основных неопределенных интегралов. Остановимся лишь на некоторых из них

Пример 1. Доказать, что $\int \frac{dx}{x} \underset{x\neq 0}{=} \ln|x| + C$

Напомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$

следовательно

$$|x|' = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases},$$

значит

$$\left(\ln|x| + C\right)'_x = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}, & x < 0 \end{cases},$$

Пример **.** Принимая во внимание справедливость соотношения $\int x^n dx \underset{n\neq -1}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, взять интегралы $\int\frac{dx}{x^2}$, $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

1. $\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$.

2. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x}+C$.

Пример Доказать, что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C.$$

Для доказательства этой формулы продифференцируем правую часть:

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right)'_x=\frac{1}{\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|}\cdot\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|'_x=$$

$$=\frac{1}{\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|}\cdot\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)'_x\cdot sign\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\cdot sign\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)}\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Откуда и следует справедливость приведенной в условии примера формулы.

Составим теперь таблицу основных неопределенных интегралов, которую следует выучить наизусть и пользоваться ею без дополнительных обоснований.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$.

$a \neq -1, a \in R$

2. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

3. $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$

$a > 0$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$

$a > 0$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Примеры. Взять следующие интегралы, пользуясь непосредственно приведенной таблицей неопределенных интегралов (полученный результат проверить дифференцированием)

1. $\int (x - \sin x)dx = \int x\,dx - \int \sin x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + \cos x + C$.

2. $\int \dfrac{(2e)^x}{5^x}dx = \int (0,4e)^x\,dx = \dfrac{(0,4e)^x}{\ln(0,4e)} + C$.

3. $\int \left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx = \int \left(1+3\sqrt{x}+3x+x^{1,5}\right)dx = x + 3\cdot\dfrac{x^{1,5}}{1,5} + 3\cdot\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^{2,5}}{2,5} + C$.

4. $\int\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x^2}=\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{x}+\int dx=-\frac{1}{x}+2\ln|x|+x+C$.

5. $\int \mathbf{tg}^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathbf{tg}x-x+C$.

6. $\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)}=\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}-\mathbf{arctg}x+C$.

7. $\int\frac{\left(1+2x^2\right)dx}{x^2\left(1+x^2\right)}=\int\frac{\left(1+x^2\right)+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\mathbf{arctg}x+C$.

8.

$\int\frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x\,\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\,\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\mathbf{ctg}x-\mathbf{tg}x+C$.

9. $\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathbf{tg}x+C$.

Непосредственное интегрирование с помощью таблиц неопределенных интегралов

Решая задачу нахождения первообразной для простейших интегралов с помощью таблицы, прежде всего следует принимать во внимание не только таблицу, но и свойства неопределенного интеграла и это, прежде всего свойство инвариантности формул интегрирования. Поясним суть дела подробнее. Для этого напомним, что дифференциалом функции:

$$dy(x) \overset{def}{=} y'_x(x)dx .$$

В частности
$$d(x+a) = dx , \qquad (1)$$

$$d(bx) = \frac{1}{b}dx , \qquad (2)$$

где a и b некоторые постоянные.

Отсюда вытекают два правила внесения постоянной под знак дифференциала в неопределенном интеграле.

I. Неопределенный интеграл не изменится, если под знаком дифференциала к переменной интегрирования прибавить любую константу, т.е.

$$\int f(x)dx = \int f(x)d(x+a) \qquad (3)$$

Примеры. Взять следующие интегралы

1. $$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C .$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}} = 2\int \frac{d(x+5)}{2\sqrt{x+5}} = 2\sqrt{x+5} + C .$$

3. $$\int \frac{2x+1}{x+1}dx = \int \frac{2(x+1)-1}{x+1}dx = 2\int dx - \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= 2\int dx - \int \frac{d(x+1)}{x+1} = 2x - \ln|x+1| + C .$$

4. $$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C .$$

5. $$\int 2^{x+5}dx = \int 2^{x+5}d(x+5) = \frac{2^{x+5}}{\ln 2} + C .$$

6. $$\int \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)dx = \int \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)d\left(x+\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) + C .$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2(x-\pi^2/4)} = \int \frac{d(x-\pi^2/4)}{\cos^2(x-\pi^2/4)} = \mathrm{tg}(x-\pi^2/4) + C .$$

8. $$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$
$$= \mathrm{arctg}(x+1) + C .$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+1)-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$
$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C .$$

II. Неопределенный интеграл следует разделить на константу, если переменная интегрирования под знаком дифференциала в неопределенном интеграле умножается на эту константу, т.е.

$$\int f(x)dx = \frac{1}{b}\int f(x)dbx .$$

Примеры.

1. $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,d\,3x = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$.

3. $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

4. $\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}d\,5x = \frac{1}{5}e^{5x} + C$.

5. $\int \frac{dx}{5^{2x}} = \int 5^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int 5^{-2x}d(-2x) = -\frac{1}{2}\frac{5^{-2x}}{\ln 5} + C$.

6. $\int (e^x+2)^2 dx = \int (e^{2x}+4e^x+4)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d\,2x + 4\int e^x dx + 4\int dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x + 4 + C$.

7. $\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,2x}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$.

Заметим, что иногда приходится комбинировать эти два правила внесения постоянной под знак дифференциала в неопределенном интеграле. Приведем примеры

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} + C$.

2. $\int \sqrt{4x-7}dx = \frac{1}{4}\int \sqrt{4x-7}\, d(4x-7) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(4x-7)^{1,5}}{1,5} + C =$

$= \frac{1}{6}(4x-7)^{1,5} + C$.

3. $\int e^{5x+1}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x+1}d(5x+1) = \frac{1}{5}e^{5x+1} + C$.

4. $\int \frac{dx}{3^{1-2x}} = \int 3^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int 3^{2x-1}d(2x-1) = \frac{1}{2}\frac{3^{2x-1}}{\ln 3} + C$.

5. $\int \frac{dx}{5x+7} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+7)}{5x+7} = \frac{1}{5}\ln|5x+7| + C$.

6. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+11} = \int \frac{dx}{4x^2+2\cdot2\cdot3x+9+2} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{2}} + C$.

Очень часто для получения табличного интеграла под знак дифференциала в неопределенном интеграле приходится вносить не только константы, но и часть подынтегральной функции, зачастую комбинируя эти приемы

Примеры.

1. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = \ln\left|e^x+1\right| + C$.

2. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln\left|\ln|x|\right| + C$.

3. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + C$.

4. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \left(\sin x\right)^{-\frac{2}{3}} d\sin x = \frac{\left(\sin x\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C$.

5. $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{x^2+1}dx^2 = \int \sqrt{x^2+1}\, d\left(x^2+1\right) = \frac{\left(x^2+1\right)^{1,5}}{1,5} + C$.

6. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5+4}} = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(x^5+4\right)}{\sqrt{x^5+4}} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5+4} + C$.

Подстановка в неопределенном интеграле

Суть метода подстановки (замены переменной) состоит в том, что с помощью специальным образом подобранной замены переменной интегрирования данное подынтегральное выражение преобразуется к другому подынтегральному выражению, которое является более простым в смысле интегрирования.

Пусть $x = \varphi(t)$ — строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения переменной t. Если на соответствующем интервале изменения x функция $f(x)$ непрерывна, то получим:

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt \,. \qquad (1)$$

Справедливость равенства (1) следует из свойства инвариантности формул интегрирования, ибо если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то, находя производную сложной функции $F\left[\varphi(t)\right]$ по переменной t, получим:

$$\left(F\left[\varphi(t)\right]\right)'_t = F'\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t) = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t).$$

Нетрудно заметить, что $F\left[\varphi(t)\right]$ является первообразной для $f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)$. Это означает, что каждая из частей равенства (1) представляет собою совокупность всех первообразных для функции $f(x)$. Разница состоит только в том, что интеграл в левой части выражает эту совокупность в виде явных функций от переменной x, а интеграл в правой части — в виде функций, выраженных параметрически с помощью параметра t, причем $x=\varphi(t)$. Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Для выражения интеграла в виде функции от x следует после интегрирования по переменной t в полученном результате перейти от переменной t к переменной x при помощи соотношения $x=\varphi(t)$. Заметим, что иногда при использовании метода замены переменной удобно вводить подстановки в виде $t=\psi(x)$ или $\varphi(t)=\psi(x)$. Познакомимся с этим методом на конкретных примерах.

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Данный интеграл существует $\forall x \geq 0$. Сделаем подстановку $\sqrt{x}=t$, откуда следует $x=t^2$ и $dx=2t\,dt$. Тогда имеем:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{t+1}\right) = 2\left(t-\ln|t+1|\right)+C .$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x} - \ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right]+C .$$

2. Считая, что $x>0$, вычислить интеграл

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} .$$

Для вычисления данного интеграла разумно сделать подстановку $x=t^6$ (чтобы упростить оба корня в подынтегральном выражении). Тогда будет: $dx = 6t^5 dt$,

$$J = \int \frac{6t^5 dt}{t^3\left(1+t^2\right)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 6\left[\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right] =$$

$$= 6\left[t - \mathrm{arctg}\,t\right]+C = 6\left[\sqrt[6]{x} - \mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}\right]+C .$$

Интегрирование «по частям»

Этот метод является обращением правила дифференцирования произведения двух функций.

Действительно, пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на некотором интервале. Очевидно, что

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Произведение $u \cdot v$ является первообразной для суммы $u'v + uv'$ и, следовательно, по определению неопределенного интеграла, можем написать

$$\int (u'v + uv')dx = uv + C$$

или так:

$$\int u'v\,dx + \int uv'dx = uv + C\ .$$

Принимая во внимание, что $u'(x)dx = du$, $v'(x)dx = dv$, окончательно получим:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\ . \qquad (1)$$

Это и есть формула интегрирования по частям. Заметим, что произвольная постоянная C здесь не выписывается явно, т.к. неопределенный интеграл неявным образом уже содержит произвольную постоянную. Метод интегрирования по частям применим тогда, когда подынтегральное выражение предложенного интеграла можно представить в виде $u \cdot dv$, причем функции $u(x)$ и $v(x)$ выбираются так, чтобы интегрирование выражения $v \cdot du$ было проще интегрирования выражения $u \cdot dv$. Следует отметить, что при интегрировании по частям приходится по дифференциалу dv находить функцию $v(x)$. При этом произвольную постоянную обычно опускают, т.к. достаточно найти только одну какую-нибудь первообразную. При вычислении интеграла по частям за $u(x)$ следует принять функцию, которая упрощается при дифференцировании, если структура подынтегрального выражения это позволяет.

Пример 1. $\int (x+2)e^x dx$.

Здесь под знаком интеграла стоит произведение двух функций. Примем за $u(x) = x + 2$, т.к. e^x при дифференцировании не упрощается. Получим

$$\begin{array}{c|c} u = x+2 & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array},$$

тогда

$$J = uv - \int v\,du = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C \; .$$

Заметим, что в процессе решения интеграла метод интегрирования по частям иногда приходится применять неоднократно.

Пример $J = \int e^x \sin x \, dx$.

В данном случае не играет роли, какую из функций принять за $u(x)$, т.к. ни e^x, ни $\sin x$ при дифференцировании не упрощаются. Итак, имеем:

$$\left.\begin{array}{r} u = e^x \\ dv = \sin x \, dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{array}.$$

Тогда

$$J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Пришли к интегралу который также решим по частям, а именно

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx .$$

$$\left.\begin{array}{r} u = e^x \\ dv = \cos x \, dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{array}$$

Таким образом, мы пришли к уравнению относительно исходного интеграла:

$$J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J ,$$

откуда следует:

$$J = \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + C$$

Пример

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx =$$

$$\left.\begin{array}{r} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x \, dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx\right) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + C .$$

Пример

$$\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C\ .$$

$$\left.\begin{array}{l} u=x \\ dv=\dfrac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2} \end{array}\right| \begin{array}{l} du=dx \\ v=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Пример

$$J=\int\frac{x\ \mathrm{arctg}x}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{\mathrm{arctg}x}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\mathrm{arctg}x \\ dv=\dfrac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)} \end{array}\right| \begin{array}{l} du=\dfrac{dx}{x^2+1} \\ v=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Найдем отдельно

$$J=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\int\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)}=$$

$$\mathrm{arctg}x-\left(-\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C\right)=$$

$$=\mathrm{arctg}x+\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}-\frac{\mathrm{arctg}x}{2}+C=\frac{\mathrm{arctg}x}{2}+\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+C\ .$$

Окончательно

$$J=-\frac{\mathrm{arctg}x}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{arctg}x}{2}+\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}\right)+C\ .$$

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен ax^2+bx+c

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \quad \text{и} \quad \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Заметим, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c во втором интеграле стоит под корнем.

Рассмотрим простой подход к решению таких интегралов, который всегда приводит к цели.

I. Прежде всего, выделим в числителе выражение, пропорциональное производной квадратного трехчлена. Имеем:

$$\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b\ ,$$

следовательно

$$\left(Ax+B\right)=\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right)-\frac{Ab}{2a}+B\ .$$

Тогда получим

$$J_1=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{\left(2ax+b\right)dx}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

$$J_2=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{\left(2ax+b\right)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене: $ax^2+bx+c=$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+c-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right].$$

Будем иметь:

$$J_1=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{d\left(x+b/2a\right)}{a\left[\left(x+b/2a\right)^2+\left(c-b^2/4a^2\right)\right]},$$

$$J_2=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{d\left(x+b/2a\right)}{\sqrt{a\left[\left(x+b/2a\right)^2+\left(c-b^2/4a^2\right)\right]}}.$$

Очевидно, что не составляет труда получить окончательный ответ

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}}$.

Заметим, что нет необходимости выделять в числителе производную квадратного трехчлена. Нужно только выделить полный квадрат под корнем

$$5x^2 - x - 1 = 5\left(x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right) = 5\left[x^2 - 2\frac{1}{10}x + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} - \frac{1}{5}\right] =$$

$$= 5\left[\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{21}{100}\right].$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{21}{100}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{10}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{21}{100}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x - 0{,}1 + \sqrt{x^2 - 0{,}2x - 0{,}2}\right| + C.$$

Интегрирование тригонометрических выражений.

Рассмотрим различные способы решения некоторых интегралов, содержащих тригонометрические функции под знаком интеграла.

I. $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, $\int R(\cos x)\sin x\,dx$

Здесь через $R(\sin x)$, $R(\cos x)$ обозначена любая рациональная функция, аргументом которой является $\sin x$ или соответственно $\cos x$.

В первом интеграле следует сделать подстановку $\sin x = t$, а во втором $\cos x = t$.

Пример 1. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x + 4}$.

Сделаем подстановку $\sin x = t$, тогда $\cos x\,dx = dt$. Подставим эти результаты в интеграл:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2} + C .$$

II. ***Интегралы вида:***

а) $\int \sin mx \cos nx \, dx$,

б) $\int \sin mx \sin nx \, dx$,

в) $\int \cos mx \cos nx \, dx$, где $m, n \in N$.

В данном случае произведение, стоящее под знаком интеграла, следует преобразовать в сумму. Напомним известные формулы из тригонометрии

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha , \tag{1}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha , \tag{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta , \tag{3}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta . \tag{4}$$

Складывая формулы (1) и (2) получим

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$

Полагая $\alpha = mx$, $\beta = nx$ получим

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]. \tag{5}$$

Складывая и вычитая формулы (3) и (4) получим соответственно

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] \tag{6}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] \tag{7}$$

Пример 1. $\int \cos 2x \sin^2 4x \, dx$.

$$\int \cos 2x \sin^2 4x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \left(1-\cos 8x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \cos 8x \, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\int \cos 10x \, dx - \frac{1}{4}\int \cos 6x \, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{40}\sin 40x - \frac{1}{24}\sin 6x + C \, .$$

Пример 2. $\int \sin x \cos 5x \, dx$.

Используя формулу (5), получим

$$\int \sin x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin 6x - \sin 4x\right] dx = \frac{1}{12}\int \sin 6x \, d\, 6x - \frac{1}{8}\int \sin 4x \, d\, 4x =$$
$$= -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 4x}{4} + C \, .$$

Пример 3. $\int \sin^2 2x \cos^4 x \, dx$.

Пользуясь формулами удвоения углов, преобразуем подынтегральное выражение

$$\sin^2 2x \cos^4 x = \frac{1-\cos 4x}{2} \cdot \frac{\left(1+\cos x\right)^2}{4} = \frac{1}{8}\left(1-\cos 4x\right)\left(1+2\cos x + \frac{1+\cos 2x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(3+4\cos x + \cos 2x - 3\cos 4x - 4\cos x \cos 4x - \cos 2x \cos 4x\right).$$

Имеем:

$$\int \cos x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 5x + \cos 3x\right) dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x + C \, ,$$
$$\int \cos 2x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 6x + \cos 2x\right) dx = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \, .$$

III. $\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right)dx$.

Если под знаком интеграла стоят тригонометрические функции, возведенные в четную степень, то рекомендуется сделать подстановку $\mathrm{tg}\,x = t$, тогда $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$ или в силу подстановки $x = \mathrm{arctg}\,t$ получаем $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ очевидно, что

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

аналогично

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Итак, полагая $\mathrm{tg}\,x = t$, получим

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Заметим, что иногда бывает уместна подстановка $\mathrm{ctg}\,x = t$.

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Полагая $\mathrm{tg}\,x = t$, получим:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^2/(t^2+1)\right)} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(1/\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}t\right)+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x\right)+C.$$

IV. $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Введем подстановку $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой и позволяет выразить $\sin x$, $\cos x$ и dx рационально через переменную t . Эта подстановка всегда приводит к цели, однако пользоваться ею следует осторожно, т.к. при высоких степенях $\cos x$ и $\sin x$ она приводит к очень громоздким выкладкам.

Итак, подстановка $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ дает нам

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее из равенства $x = 2\,\mathrm{arctg}\,t$, которое следует из подстановки, получим после дифференцирования

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$.

Применяя подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, имеем:

$$\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}=\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left[1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]}=-\int \frac{dt}{t-1}=-\ln|t-1|+C=$$

$$=-\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

Пример $\int \frac{dx}{5-4x+3\cos x}$.

Применяя подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, получим:

$$\int \frac{dx}{5-4x+3\cos x}=\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left[5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}\right]}=\int \frac{dt}{(t-2)^2}=\int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{t-2}=\frac{1}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Определенный интеграл

Определенный интеграл. Его свойства

Определение определенного интеграла.

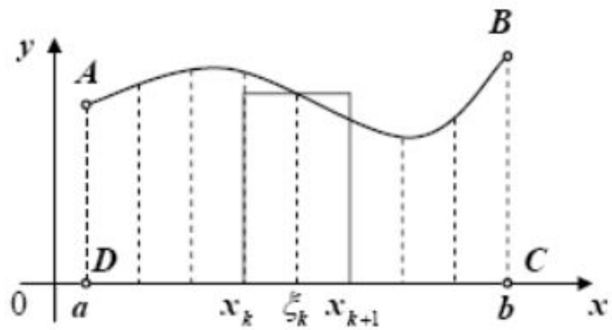

Рис. 2.1.1

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке $[a;b]$ $(a < b)$, рис. 2.1.1.

Выполним 5 операций.

1. Разобьем промежуток $[a;b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n = b$ произвольным образом на n частей. Обозначим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, а наибольшую из длин этих частичных участков обозначим через λ, т.е. $\lambda = \sup\{|\Delta x_k|\}$; λ будем называть рангом дробления.
2. На каждом частичном участке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_k и вычислим в ней значение функции $f(\xi_k)$.
3. Составим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.
4. Составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Эта сумма называется интегральной суммой или суммой Римана.

5. Измельчая дробление (за счет увеличения числа точек дробления n) и устремляя при этом ранг дробления к нулю ($\lambda \to 0$) (т.е. увеличивая число точек дробления, мы следим за тем, чтобы уменьшалась и стремилась к нулю длина каждого из частичных участков Δx_k), будем находить предел последовательности интегральных сумм

$$J = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sigma_n \,.$$

Если этот предел существует, не зависит от способа дробления и выбора точек ξ_k, то он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается так:

$$J = \int_a^b f(x)dx .$$

Итак, мы привели ни что иное, как развернутое определение определенного интеграла от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$. Принимая во внимание сказанное выше, можем дать определение определенного интеграла более компактно так:

$$J = \int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right)\cdot \Delta x_k \quad (a<b),$$

где a — нижний предел интегрирования, b — верхний предел. В этом случае, когда для функции $f(x)$ существует определенной интеграл $\int_a^b f(x)dx$, функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a,b]$. Заметим, что в приведенном определении предполагается $a<b$. Понятие определенного интеграла можно обобщить и на случай, когда $b<a$ или $b=a$. Действительно, будем иметь в силу определения, что если $b<a$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, а если $a=b$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$.

2. Теорема существования определенного интеграла.

Возникает вопрос: всякая ли функция $f(x)$ интегрируема на данном промежутке $[a,b]$. Предварительно дадим определение кусочно-непрерывной функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***кусочно-непрерывной*** *на данном промежутке $[a,b]$, если на этом промежутке она ограничена и имеет конечное число точек разрыва.*

Геометрически кусочно-непрерывную функцию можно изобразить линией, состоящей из конечного числа непрерывных участков. Очевидно, что функция, непрерывная на промежутке $[a,b]$, является частным случаем кусочно-непрерывной функции.

Приведем теперь без доказательства теорему существования определенного интеграла.

Теорема (достаточное условие интегрируемости). *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на промежутке $[a,b]$, то на этом промежутке она интегрируема, т.е. существует $\int_a^b f(x)dx$.*

(Без доказательства.)

Заметим, что класс функций, указанных в теореме, практически исчерпывает все функции, встречающиеся в приложениях. В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваются только такие функции.

4. Свойства определенного интеграла.

Свойство 1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ (по определению).

Свойство 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (по определению), т.е. при перемене местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный.

Свойство 3 (линейность интеграла).

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx .$$

Для доказательства достаточно составить интегральную сумму для функции $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ и воспользоваться свойствами пределов функции. Действительно,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[c_1 f_1(\xi_k) + c_2 f_2(\xi_k) \right] \cdot \Delta x_k = c_1 \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k) \cdot \Delta x_k +$$

$$+ c_2 \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\xi_k) \cdot \Delta x_k = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx .$$

Отметим, что из доказанного следуют такие очевидные факты

а) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$,

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

б) $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$,

т.е. интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций по данному промежутку $[a, b]$.

Свойство 4. Каковы бы ни были числа a, b и c, имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

лишь бы только функция $f(x)$ была интегрируема на каждом из промежутков $[a,b]$, $[a,c]$ и $[c,b]$ (рис. 2.1.2).

Для доказательства этого свойства достаточно составить интегральные суммы для каждого из трех интегралов, включив точку c в число точек дробления, а затем рассмотреть пределы получившихся интегральных сумм при условии, что $n \to \infty$, $\lambda \to 0$.

Свойство 5 (оценка определенного интеграла).

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то имеет место такая оценка определенного интеграла:*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

a

Свойство 6 (теорема о среднем).

Теорема. *Если* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $[a,b]$*, то между точками* a *и* b *найдется хотя бы одна точка* ξ *такая, что будет иметь место равенство*

Свойство 7.

а) Если $a < b$, и $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

б) Если $a < b$, и $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Свойство 8.

Если $a < b$, и $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \leq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$.

Свойство 9.

Если $a < b$, и $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Свойство 10. Изменение значения $f(x)$ в одном или любом конечном числе точек из промежутка интегрирования не виляет на интегрируемость функции и не меняет значения определенного интеграла.

Вычисление определенного интеграла

1. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом (теорема Барроу).

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t)dt$ имеет производную, равную значению подынтегральной функции при верхнем пределе, т.е.*

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

2. Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то определенный интеграл от этой функции по промежутку $[a,b]$ равен разности значений какой-либо первообразной этой функции на верхнем и на нижнем пределах интегрирования, т.е.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ *(формула Ньютона-Лейбница).*

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, и в определенном интеграле произвести замену переменной интегрирования при помощи подстановки $x=\varphi(t)$, причем функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на промежутке $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и, кроме того, функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\psi(t)$, то*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$, тогда

$$\left(F[\varphi(t)]\right)'_t=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t).$$

Следовательно

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a),$$

а так как

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

то ясно, что

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Замечание 1. Для вычисления определенных интегралов замена переменной может определяться соотношением $t=\varphi(x)$ или $\varphi(t)=\psi(t)$, или $\Phi(x,t)=0$ при выполнении необходимых ограничений на функции, задающие замену переменных.

Замечание 2. При вычислении определенных интегралов с помощью подстановки нет необходимости возвращаться к первоначальному аргументу (это с очевидностью следует из доказательства теоремы).

4. Интегрирование по частям.

Теорема. *Если в промежутке $[a,b]$ функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные, то*

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$d\left(u(x)\cdot v(x)\right) = u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x).$$

Проинтегрируем его на промежутке $[a,b]$, получим

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Заметим, что в этом выражении интегрирование ведется по переменной x.

Пример 3. Вычислить $J = \int_1^3 x\ln x\,dx$.

Решение. Вычислим данный интеграл по частям, положив $u(x) = \ln x$, $dv(x) = x\,dx$. Тогда $du(x) = \frac{dx}{x}$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Следовательно

$$J = \int_1^3 x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2}\Bigg|_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx = \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2.$$

Ответ: $J = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 - 1$ и $y = x + 1$ (рис. 2.3.4)

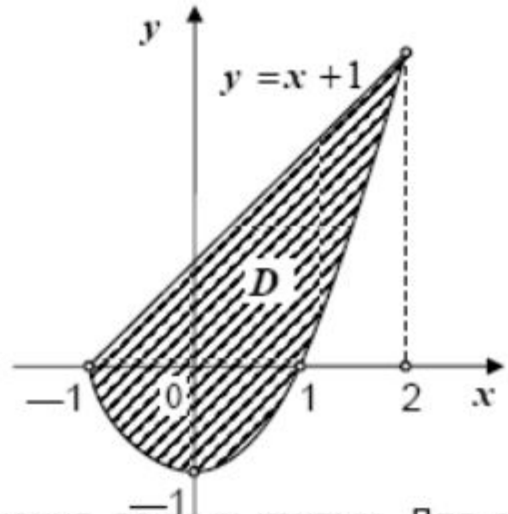

Рис. 2.3.4

Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 1 \\ y &= x + 1 \end{aligned}\right\}.$$

Решив ее, найдем координаты точек $A(-1,0)$ и $B(2,3)$. Тогда очевидно, что площадь фигуры

$$S = \int_{-1}^{2}\left[(x+1) - \left(x^2 - 1\right)\right]dx = \int_{-1}^{2}\left[x - x^2 + 2\right]dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{29}{3}.$$

Ответ: $S = \dfrac{29}{3}$ кв. ед.

5. Приложение определенного интеграла к экономическим задачам.

Рассмотрим следующую типовую задачу.

Предприятие выпускает однородную продукцию. Интенсивность ее выпуска в различные моменты времени t может быть различной в силу неравномерности поставок сырья и других причин. Интенсивность выпуска продукции обозначим $\varphi(t)$ — это количество выпущенной продукции за единицу времени, начиная с момента t (в предположении, что с этого момента интенсивность постоянна).

Стоимость выпускаемой продукции также не постоянна, а меняется по закону $f(t)$, в силу различной стоимости сырья, стоимости труда, величины налогов и т.д. Требуется найти стоимость выпущенной продукции за промежуток времени $[T_1,T_2]$. Будем предполагать функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывными.

Пусть Q — искомая стоимость. Подсчитаем стоимость ΔQ продукции, выпущенной за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$. Если бы интенсивность $\varphi(t)$ и стоимость $f(t)$ за этот малый промежуток времени не менялись, то $\Delta Q = \varphi(t)f(t)\Delta t$. Если же они меняются, то это произведение является лишь главной частью ΔQ, пропорциональной Δt, что можно записать в виде

$$\Delta Q = \varphi(t)f(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Здесь $o(\Delta t)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем Δt: $\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Действительно, за бесконечно малое время Δt функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ изменятся на бесконечно малые величины Δf и $\Delta\varphi$ соответственно, что в произведении с Δt даст бесконечно малую высшего порядка, чем Δt. Это бесконечно малая отнесена в $o(\Delta t)$.

Итак, слагаемое $\varphi(t)f(t)\Delta t$ есть главная часть ΔQ, пропорциональная Δt, т.е. по определению — дифференциал функции $Q(t)$ — стоимость выпущенной продукции к моменту t, начиная с какого-либо фиксированного момента:

$$dQ = \varphi(t)f(t)\Delta t.$$

Тогда, интегрируя дифференциал в пределах T_1 и T_2, находим

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dQ(t) = \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t)f(t)dt.$$

Несобственные интегралы по неограниченному промежутку

1. Определение несобственного интеграла по неограниченному промежутку.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,A]\subset[a,+\infty)$.

Определение 1. Несобственным интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *от функции* $f(x)$ *по бесконечному промежутку* $[a,+\infty[$ *(несобственным интегралом 1-го рода) называют предел*

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx\ .$$

Если этот предел конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся****, в противном случае —* ***расходящимся****.*

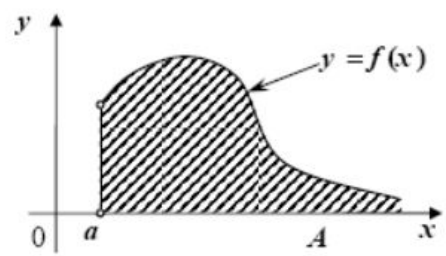

Рис. 3.1.1

Если $f(x)>0$ (рис. 3.1.1), то очевидно, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ дает нам площадь бесконечной криволинейной трапеции.

Принимая во внимание формулу Ньютона-Лейбница и определение несобственного интеграла 1-го рода, вычислим

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(a)$ на любом промежутке $[a,A]\subset[a,+\infty)$. Обобщив формулу Ньютона-Лейбница, можно окончательно написать

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_0^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

Аналогично определяется и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и его сходимость, т.е.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty).$$

В том случае, когда бесконечны и верхний и нижний пределы интегрирования, по определению имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c — любое действительное число. При этом несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла, стоящие справа.

2. Главное значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Определение. Главным значением несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *называется предел*

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\left[F(R)-F(-R)\right],$$

который обозначается так:

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R} f(x)dx$$

(от франц. *valeur principal* — главное значение).

Заметим что в определении главного значения несобственного интеграла имеется в виду симметричное возрастание модуля переменной x в положительном и отрицательном направлении, в то время как по определению несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ мы прежде всего должны заменить суммой $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ и отдельно исследовать сходимость каждого слагаемого, не накладывая никакой связи на вычисление возникающих при этом несобственных интегралов.

Может оказаться, что несобственный интеграл расходится, а его главное значение сходится.

Очевидно, что для несобственных интегралов справедливы все основные свойства неопределенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathbf{arctg}\,x \Big|_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to\infty} \mathbf{arctg}\,x - \mathbf{arctg}\,1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Вычислить $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \mathbf{ln}|x| \Big|_{2}^{+\infty} = \mathbf{ln}(+\infty) - \mathbf{ln}\,2 = +\infty,$$

т.е. данный интеграл расходится.

Пример 4. Найти, при каком значении r несобственный интеграл $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^r}$ $(a>0)$ сходится.

Решение. Рассмотрим отдельно случаи, когда $r=1$, $r>1$ и $r<1$.

1. Если $r=1$, тогда будет

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^r}=\ln|x|\Big|_a^{+\infty}=+\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

2. Если $r>1$, положим $r=1+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Будем иметь:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^r}=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}=\int_a^{+\infty}x^{-1-\varepsilon}dx=\frac{x^{-1-\varepsilon+1}}{-\varepsilon}\Bigg|_a^{+\infty}=\frac{1}{-\varepsilon x^{\varepsilon}}\Bigg|_a^{+\infty}=-\frac{1}{\varepsilon}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon a^{\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon a^{\varepsilon}},$$

т.е. в данном случае интеграл сходится.

3. Если $r<1$, положим $r=1-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, тогда

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^r}=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{1-\varepsilon}}=\int_a^{+\infty}x^{-1+\varepsilon}dx=\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}\Bigg|_a^{+\infty}=\frac{1}{\varepsilon}\lim_{x\to+\infty}x^{\varepsilon}-\frac{a^{\varepsilon}}{\varepsilon}=+\infty,$$

т.е. интеграл расходится

Итак, $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^r}$, где $a>0$, сходится, если $r>1$ и расходится, если $r\le 1$.

В дальнейшем этот факт можно использовать как очевидный при исследовании сходящихся несобственных интегралов.