Контрольная работа №1

по ЛА и АГ

(0 вариант)

№1. Действия над матрицами

- $\underset{m\times k}{C} = \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B}$

где $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj}$

$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}$

где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$\underset{m\times n}{C} = \alpha \cdot \underset{m\times n}{A}$

где $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Вычислить $A^2 - 5A + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 26 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = -3 \cdot (-3) + (1) \cdot (1) = 10$$
$$c_{12} = -3 \cdot (1) + (1) \cdot (5) = 2$$
$$c_{21} = 1 \cdot (-3) + (5) \cdot (1) = 2$$
$$c_{22} = 1 \cdot (1) + (5) \cdot (5) = 26$$

$$-5A = -5 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -25 \end{pmatrix} \quad 3E = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + (-5A) + 3E = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 - 5A + 3E = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

№2. Операции над матрицами.

Вычислить: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$c_{11} = 0 \cdot (3) + (-1) \cdot 0 + (-4) \cdot (-4) = 16$$

$$c_{21} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 6$$

$$c_{31} = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) = -16$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ -16 \end{pmatrix}}$$

№3. Вычислить определитель матрицы:

- $$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}\text{, где}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

M_{ij} – *минор элемента* a_{ij} - определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из элементов матрицы A вычеркиванием i –ой строки и j –го столбца.

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Выберем для разложения определителя, например, второй столбец. Тогда определитель будет считаться по формуле:

$$detA = |A| = \sum_{i=1}^{3} a_{i2} \cdot A_{i2}$$
$$= 0 \cdot A_{12} + (-4) \cdot A_{22} + (-3) \cdot A_{32}$$
$$= \mathbf{-21}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

№4. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A^* \ (detA \neq 0)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$ - присоединенная матрица, где

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

M_{ij} –*минор элемента* a_{ij}- определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из элементов матрицы A вычеркиванием i –ой строки и j –го столбца.

Выберем для разложения определителя, например, второй столбец. Тогда определитель будет считаться по формуле:

$$detA = |A| = \sum_{i=1}^{3} a_{i2} \cdot A_{i2}$$

$$= 0 \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} = \mathbf{-1}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

Составим присоединенную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Тогда обратная матрица будет равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A^* = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -7 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

№5. Решить матричное уравнение:

$$X\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Данное матричное уравнение имеет вид

$$X \cdot A = B$$

Тогда искомая матрица вычисляется по формуле:

$$X = B \cdot A^{-1}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A^* = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 13 \\ -5 & -3 & -16 \\ -7 & -4 & -19 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 13 \\ -5 & -3 & -16 \\ -7 & -4 & -19 \end{pmatrix}$$

№6. Вычислить ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -10 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -8 & 3 & 6 \\ -8 & -4 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями приведем матрицу к ступенчатому виду

- $$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -10 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -8 & 3 & 6 \\ -8 & -4 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & -4 & -10 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -9 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -9 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right) \cdot$$

- $$\begin{array}{c}\\ \\ (-5)\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{RgA = 4}$$

№7. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

При помощи элементарных преобразований определителя, обнулим 1-ый столбец кроме 1-го элемента:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 19 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 16 = 32$$

Вычислим последний определитель с помощью разложения по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 19 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = 16$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 19 \\ 7 & -7 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

№8. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 50 \\ -4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 19 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 = -18 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 13 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и элементарными преобразованиями, работая только со строками, приведем ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 6 & -2 & -6 & 50 \\ -4 & -3 & -4 & -3 & 19 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & -18 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 13 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4. \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 3 & -31 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \end{array},$$

$rg(A) = rg(A|B) = 4 = n,$ где n – количество переменных $\Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение

На основе полученной матрицы запишем упрощенную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -31 \\ x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_3 + 3x_4 = -16 \\ x_4 = -4 \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

№9. Найти ФСР однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -4x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Элементарными преобразованиями, работая только со строками, приведем матрицу коэффициентов системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 9 \\ -2 & -2 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & c & x_4. \end{matrix} \end{array}$$

$Rg(A) = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ – базисный минор}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_4$ – базисные переменные,

x_3 – свободная переменная.

$Rg(A) = 3 < n = 4$, где n – количество переменных $\Rightarrow$ система имеет бесконечное множество решений

Запишем упрощенную систему ($x_3 = c$):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4c + 9x_4 = 0 \\ x_2 - 3c - 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5c \\ 3c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – ФСР системы.}$$

№10. Найти общее решение следующей системы:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -15 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и элементарными преобразованиями, работая только со строками, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -6 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & 6 & -2 & -9 \\ 3 & -9 & 2 & -2 & -15 \end{array}\right) => \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{-1} & 3 & -6 & \color{red}{2} & 9 \\ \color{red}{0} & 0 & -4 & \color{red}{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & c_1 & c_2 & x_4. \end{array} \end{array}$$

$Rg(A) = Rg(A|B) = 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ – базисный минор

x_1, x_4 – базисные переменные,

x_2, x_3 – свободные переменные

$rg(A) = rg(A|B) = 2 < n = 4,$ где n – количество переменных $\Rightarrow$ система совместна и имеет бесконечное множество решений

Запишем упрощенную систему ($x_2 = c_1,\ x_3 = c_2$):

$$\begin{cases} -x_1 + 3c_1 - 6c_2 + 2x_4 = 9 \\ -4c_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 3c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ 3 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Замечание: после приведения системы к ступенчатому виду, можно не возвращаться к системе, а сразу матрицу при базисных неизвестных привести к единичной и, затем выписать общее решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -6 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & 6 & -2 & -9 \\ 3 & -9 & 2 & -2 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -6 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim Rg(A) = Rg(A|\mathrm{B}) = 2 < n = 4$$

x_1, x_4 – базисные переменные x_2, x_3 – свободные переменные

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Выпишем систему: $\begin{cases} x_1 = 3x_2 + 2x_3 - 3 \\ x_4 = 4x_3 + 3 \end{cases}$

Записав общее решение, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 3c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ 3 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$