



The background is a light gray with various abstract geometric elements scattered across it. These include: a black wavy line at the top left; a cyan wavy line at the bottom left; a black circle partially overlapping a red circle on the left; a black diamond outline on the left; a cyan diamond outline in the center; a red diamond outline on the right; a black circle partially overlapping a cyan circle at the bottom; a black 'X' shape with a cyan outline at the top center; a red 'X' shape with a black outline at the bottom center; a black 'X' shape with a red outline at the top right; a red 'X' shape with a black outline at the bottom right; two horizontal rows of black dots in the upper right; two horizontal rows of cyan dots in the lower center; and two horizontal rows of red dots in the lower right.

Производная функции.

- 
- 
- 1 Понятие производной
 - 2 Геометрический смысл производной
 - 3 Понятие дифференциала
 - 4 Геометрический смысл и свойства дифференциала

Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \rightarrow 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначения: $f'(x_0)$ или $f'(x)$ или f'_x .

Таким образом,

Вычисление производной называется *дифференцированием* функции.

Таблица производных

1. $(c)' = 0, c = const$
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (где $\alpha \in \mathbb{R}$); в частности, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0$, в частности, $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
15. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
16. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

Основные правила дифференцирования

Пусть c – константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x . Тогда функции $u(x) \pm v(x)$, $c \cdot u(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ и $\frac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{cv'}{v^2}$.

Пусть теперь функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0 , функция $y = f(u)$ – в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также имеет производную в точке x_0 , причем

$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 . Тогда существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, уравнение имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

При этом $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона этой касательной к оси Ox (рис.80).

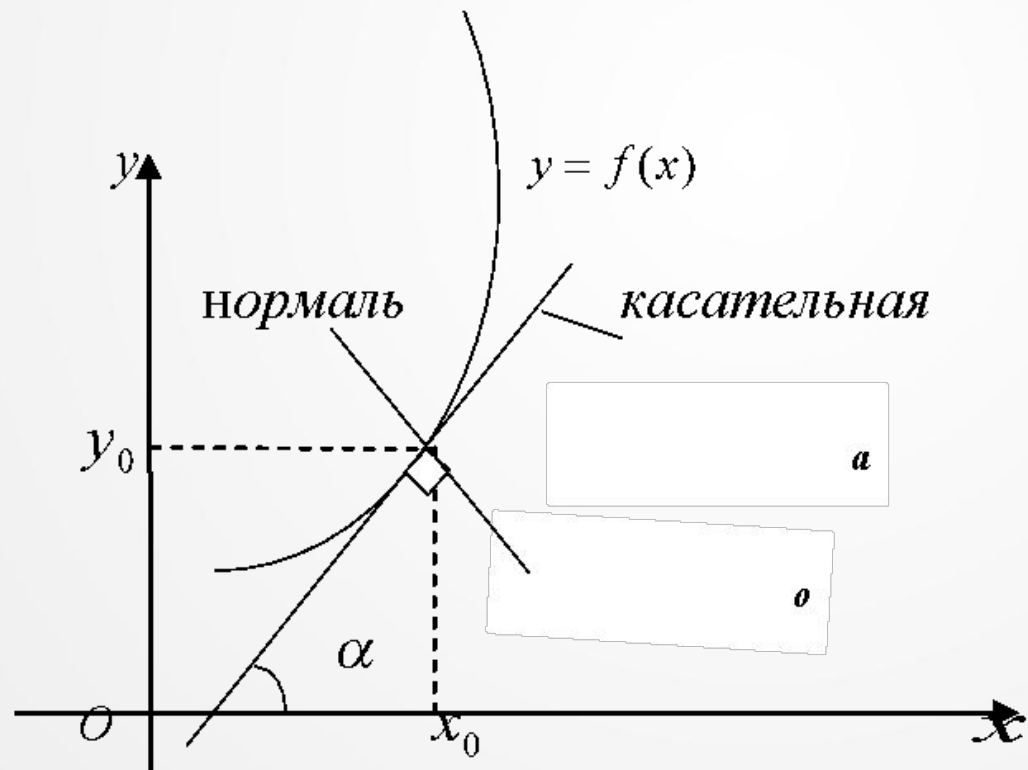


Рис. 80

- Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой имеет уравнение

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = 0$ (т.е. касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна имеет уравнение $x = x_0$.

Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0 . Тогда *углом между этими кривыми* называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0 .

Этот угол φ можно найти из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}$$

Логарифмическая производная

При нахождении производных от показательной-степенной функции $u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

➤ *Логарифмической производной* от функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательной-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$$

Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$, обладающая производной в точке x , задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0. \quad (1.1)$$

Тогда производную $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференцировав уравнение (1.1) (при этом y считается функцией от x) и разрешая затем полученное уравнение относительно y' .

Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется также производной первого порядка. В свою очередь производная от функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка* от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяются производная третьего порядка (или третья производная), обозначаемая $f'''(x)$ и т.д.

Производная n -го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

Производная функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрическими функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0 , причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Вторая производная $y''(x)$ находится по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

Пример 1.1. Пользуясь определением, найти производную функции $y = f(x)$:

Пример 1.1 (1) $y = 3x^2$;

Решение. Придадим аргументу x приращение Δx . Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = 3\Delta x(2x + \Delta x)$$

Отсюда находим предел соотношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Таким образом, $y' = (3x^2)' = 6x$.

Пример 1.1 (2) $y = \sin x$.

Решение. Найдем приращение Δy функции, соответствующее приращению Δx аргумента, используя формулу разности синусов:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью $\cos x$. Таким образом, $y' = (\sin x)' = \cos x$.

Пример 1.2. Пользуясь основными правилами дифференцирования найти $f'(x)$, если:

Пример 1.2 (1) $f(x) = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - 5^{x+1}$;

Решение. Преобразуем функцию к виду

$$f'(x) = 9 \cdot x^{-2/3} - 5 \cdot 5^x.$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= (9 \cdot x^{2/3} - 5 \cdot 5^x)' = (9 \cdot x^{-2/3})' - (5 \cdot 5^x)' = \\ &= 9 \cdot (x^{-2/3})' - 5 \cdot (5^x)' = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} - 5 \cdot 5^x \ln 5 = -6x^{-5/3} - 5^{x+1} \ln 5 \end{aligned}$$

Пример 1.2 (2) $f(x) = (x^4 - x) \cdot (3\operatorname{tg}x - 1)$.

Решение. Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^4 - x)(3\operatorname{tg}x - 1)]' = (x^4 - x)'(3\operatorname{tg}x - 1) + (x^4 - x)(3\operatorname{tg}x - 1)' = \\ &= (4x^3 - 1)(3\operatorname{tg}x - 1) + (x^4 - x) \cdot \frac{3}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Пример 1.3. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции

Пример 1.3 (1) $y = \sin^2 x$.

Решение. Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u = \sin x$ и $f(u) = u^2$. Так как $u' = \cos x$, а $f'(u) = 2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u \cdot u' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Пример 1.3 (2) $y = \ln(\operatorname{arctg}3x)$

Решение. Функция $\ln(\operatorname{arctg}3x)$ — композиция функций $u = \operatorname{arctg}3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\operatorname{arctg}3x} \cdot (\operatorname{arctg}3x)'.$$

Функция $\operatorname{arctg}3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = \operatorname{arctg}v$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(\operatorname{arctg}3x)' = (\operatorname{arctg}v)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}3x} \cdot (\operatorname{arctg}3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}3x}.$$

Пример. 1.4. Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

Пример. 1.4 (1) $y = x^{\sin x}$

Решение: Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\sin x}$. Тогда $\ln y = \ln x^{\sin x}$, т.е. $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой – производную произведения:

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)', \quad \text{т.е.} \quad \frac{y'}{y} = (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)' \quad \text{или}$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда $y' = y(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$ или, учитывая, что $y = x^{\sin x}$,

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

Пример. 1.4 (2) $y = \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Решение. Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, зато применение логарифмической производной позволяет найти ответ без труда:

$$\ln y = \ln \frac{(x-1)^3 (x+2)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Отсюда, используя формулы для логарифма произведения, частного и степени, получим:

$$\ln y = \ln(x-1)^3 + \ln(x+2)^{\frac{1}{2}} - \ln(x+1)^{\frac{2}{3}},$$

т.е.

$$\ln y = 3 \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) - \frac{2}{3} \ln(x+1)$$

Осталось продифференцировать обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = \left[3 \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) - \frac{2}{3} \ln(x+1) \right]'$$

Или

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}$$

Откуда

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)} \right)$$

Т.е.

$$y' = \frac{(x-1)^3 \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)} \right)$$

Пример 1.5. Найти производную неявно заданной функции y :

$$x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y — есть функция от x (поэтому, например, $(y^3)'_x = 3y^2 \cdot y'$), получим:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x - 2y)(1 - 2y')$$

или

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x - 2y) - 2y' \cdot \cos(x - 2y).$$

Отсюда находим y' :

$$3y^2 y' + 2y' \cdot \cos(x - 2y) = \cos(x - 2y) - 3x^2$$

Или

$$y'(3y^2 + 2 \cos(x - 2y)) = \cos(x - 2y) - 3x^2,$$

Т.е.

$$y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2 \cos(x - 2y)}.$$

Пример 1.6. Найти производную $y'(x)$ от следующей функции, заданной

параметрически:
$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

Решение. Производная функции $y(x)$ находится по формуле $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$,

откуда в нашем случае

$$y'(x) = \frac{(3 \sin t)'_t}{(2 \cos t)'_t} = -\frac{3 \cos t}{2 \sin t} = -1,5 \operatorname{ctgt}.$$

Пример. 1.7 (1) Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y^2 = 4x$ в точке $M(1;2)$.

Решение. Найдем $y'(x)$ как производную неявной функции:

$$(y^2)' = (4x)', \text{ т. е. } 2yy' = 4, \text{ откуда } y' = \frac{2}{y}. \text{ Значит, } y'(x_0) = y'(1) = 1.$$

Отсюда получаем уравнение касательной в точке М:

$$y - 2 = x - 1, \text{ т.е. } y = x + 1.$$

Теперь найдем уравнение нормали:

$$y - 2 = -(x - 1), \text{ т.е. } y = -x + 3$$

Пример. 1.7 (2) Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \frac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

Решение. Угловым коэффициентом данной прямой равен $-\frac{1}{4}$, поэтому

производная к кривой в искомой точке x_0 также равна $-\frac{1}{4}$:

$$y'(x_0) = -\frac{1}{4}, \text{ т.е. } -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}, \text{ откуда } x^2 = 4, \text{ или } x = \pm 2.$$

Пример. 1.7 (3) Найти угол, под которым пересекаются кривые: $y = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y^2 = 12$.

Решение. Сначала найдем точку пересечения кривых, для чего подставим

$$y = \frac{8}{x} \text{ во второе уравнение: } x^2 - \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 12, \text{ или}$$

$t - \frac{64}{t} = 12$, где $t = x^2$. Решая последнее уравнение, найдем $t = 16$, откуда $x = \pm 4, y = \pm 2$. Таким образом, имеем 2 точки пересечения $M_1(4;2)$ и $M_2(-4;-2)$.

Найдем угол φ_1 пересечения кривых в точке M_1 , предварительно вычислив $y'_1(4)$ и $y'_2(4)$ из уравнений $y = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y_2^2 = 12$:

$$y_1' = -\frac{8}{x^2} \Rightarrow y_1'(4) = -\frac{8}{16} = -0,5;$$
$$(x^2 - y_2^2)' = 12' \Rightarrow 2x - 2y_2 \cdot y_2' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_2' = \frac{x}{y_2} \Rightarrow y_2'(4) = \frac{4}{2} = 2.$$

Теперь окончательно найдем

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_2'(4) - y_1'(4)}{1 + y_1'(4)y_2'(4)} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1}.$$

Поскольку знаменатель дроби обратился в ноль, то это означает, что

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично находим угол $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ во второй точке пересечения данных кривых.

Пример 1.8 (1) Найти $f'''(x)$, где $f(x) = \sin 3x$

Решение. Находим первую производную:

$$f'(x) = (\sin 3x)' = 3 \cos 3x.$$

Отсюда получим вторую производную –

$$f''(x) = (3 \cos 3x)' = -9 \sin 3x,$$

А затем и искомую третью:

$$f'''(x) = (-9 \sin 3x)' = -27 \cos 3x$$

Пример 1.8 (2) Найти y''_{xx} для функции $y = y(x)$, заданной параметрически $x = t^2$, $y = t^3$

Решение. Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3},$$

откуда

$$y''_{xx} = \frac{(t^2)' \cdot (t^3)'' - (t^3)' \cdot (t^2)''}{[(t^2)']^3} = \frac{2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2}{(2t)^3} = \frac{6t^2}{8t^3} = \frac{3}{4t}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Понятие дифференциала

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда если существует такое число A , что приращение Δy этой функции в точке x_0 , соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (2.1)$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция называется *дифференцируемой* в точке x_0 .

При этом главная, линейная относительно Δx , часть этого приращения, т. е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив $y = x$ в формуле (2.1)), что $dx = \Delta x$.
Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$.
Поэтому $df(x_0) = f'(x_0) dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a; b)$, то $dy = f'(x) dx, x \in (a, b)$.

Отсюда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т. е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

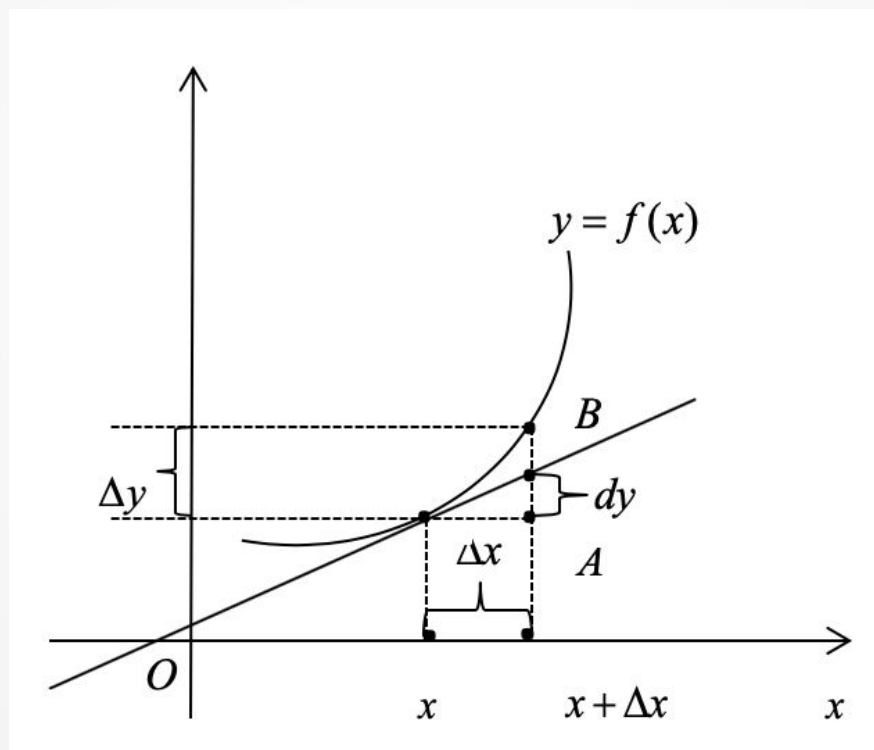
Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т. е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{df(x_0)} \Delta x$$

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ по известному значению этой функции и ее производной в точке x_0 .

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически приращение Δy функции $f(x)$ в точке x – есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке – приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$).



Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции, дифференцируемые в точке x .
Тогда:

1. $dC = 0$, где C – константа.

2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α – константа.

3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

4. $d(u \cdot v) = u dv + v du$.

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$.

6. Инвариантность формы дифференциала. Если $y = f(u(x))$ – сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)dv, \text{ или } dy = y'_u \cdot du,$$

т.е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u .

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал $dy = f'(x)dx$ функции $f(x)$, называемый также *дифференциалом первого порядка* (или *первым дифференциалом*).

Дифференциалом второго порядка (или *вторым дифференциалом*) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$.

Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)dx$, где dx — не зависящая от x константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или, более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3 y = d(d^2 y)$, $d^4 y = d(d^3 y)$. В общем случае, дифференциалом n -го порядка от функции $f(x)$ в точке x называется дифференциал от дифференциала $(n - 1)$ -го порядка функции $f(x)$ в этой точке: $d^n y = d(d^{n-1} y)$, т. е. $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$, или, более кратко, $d^n y = f^n(x)dx^n$. Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ в частности } f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Заметим, что для дифференциалов высших порядков свойство инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.

Пример. 1.9. Найти дифференциал функции $y = e^{x^3}$

Решение. Так как $dy = y' dx$, то в данном случае $dy = (e^{x^3})' dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$.

Так как $dy = y' dx$, то в данном случае $dy = (e^{x^3})' dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$.

Пример. 1.10. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0,1$.

Решение. Сначала найдем приращение Δy в общем виде:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = [(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1] - (x^2 - 3x + 1) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = \\ &= 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что его линейная часть в произвольной точке x_0 равна $(2x_0 - 3)\Delta x$. Тогда по определению данной функции будет равен $dy = (2x - 3)\Delta x$, или, в привычной записи, $dy = (2x - 3)dx$.

Второе слагаемое в полученной записи для Δy , т.е. $(\Delta x)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти dy и сразу (без вычисления Δy) по формуле $dy = y' dx$, откуда $dy = (x^2 - 3x + 1)' dx = (2x - 3)dx$.

Теперь найдем Δy и dy в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0,1$:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 0,1 + 0,01 = 0,11, \quad dy = 0,1.$$

Пример. 1.11 (1). Вычислить приближенно: $\ln 1,02$

Решение. Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Тогда, подставляя $f(x) = \ln x$, получим

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$, найдем

$$\ln 1,02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0,02 = 0,02.$$

Таким образом, $\ln 1,02 \approx 0,02$.

Пример. 1.11 (2) Вычислить приближенно: $\sqrt{24}$.

Решение: Учитывая, что $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$, $\Delta x = -1$, получим

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-1) = 4,9$$

Окончательно $\sqrt{24} \approx 4,9$

Пример. 1.12. Найти dy , $d^2 y$ и $d^3 y$ для функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Поскольку

$$dy = y' dx = (\sqrt[3]{x})' dx = \frac{1}{3} x^{-2/3} dx = \frac{dx}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}},$$

То

$$d^2 y = d(dy) = d\left(\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' (dx)^2 = \frac{1}{3} (x^{-2/3})' dx = -\frac{2}{9} x^{-5/3} dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x^3\sqrt{x^2}}$$

Отсюда

$$d^3 y = d(d^2 y) = d\left(-\frac{2}{9} \frac{dx^2}{x^{5/3}}\right) = -\frac{2}{9} (x^{-5/3})' dx^3 = \frac{10}{27} x^{-8/3} dx^3 = \frac{10dx^3}{27^2\sqrt[3]{x^2}}$$

То же самое можно было найти иначе, предварительно отыскав производные y' , y'' и y''' , а затем воспользоваться формулами:

$$d^2 y = y'' dx^2, d^3 y = y''' dx^3.$$

Спасибо за внимание

