Производная функции.

1. Понятие производной
2. Геометрический смысл производной
3. Понятие дифференциала
4. Геометрический смысл и свойства дифференциала

Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: или или или .

Таким образом,

Вычисление производной называется *дифференцированием* функции.

Таблица производных

1. $(c)' = 0, c = const$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$(где $\alpha \in \Re$); в частости, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a, a > 0$,в частности, $(e^{x})' = e^{x}$;
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$;в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
13. $(shx)' = chx$;
14. $(chx)' = shx$;
15. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$;
16. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$;

Основные правила дифференцирования

Пусть c – константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда функции $u(x) \pm v(x)$, $c \cdot u(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v \quad uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right) = \quad \dfrac{cv'}{v^2}$.

Пусть теперь функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, функция $y = f(u)$ – в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, уравнение имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

При этом $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона этой касательной к оси Ox (рис.80).

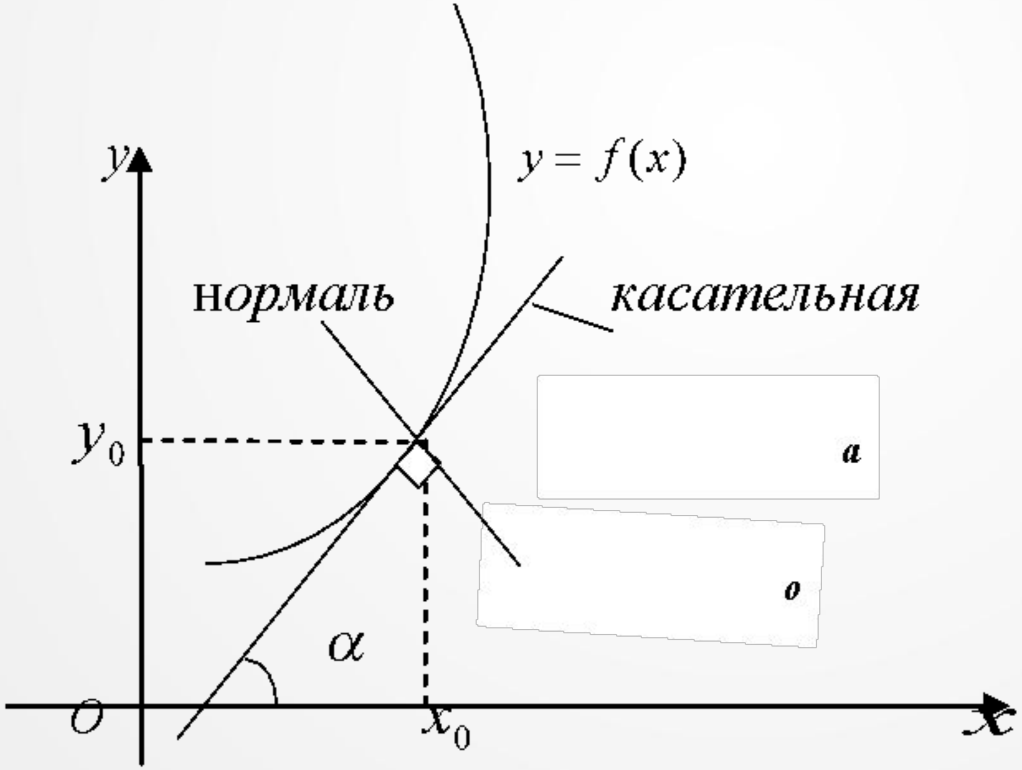


Рис. 80

- Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой имеет уравнение

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Если $f(x_0) = 0$ (т.е. касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна имеет уравнение $x = x_0$.

Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда *углом между этими кривыми* называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0.

Этот угол φ можно найти из формулы

$$tg\varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}$$

Логарифмическая производная

При нахождении производных от показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

- *Логарифмической производной* от функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$$

Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

Тогда производную $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференцировав уравнение (1.1) (при этом y считается функцией от x) и разрешая затем полученное уравнение относительно y'.

Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется также производной первого порядка. В свою очередь производная от функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка* от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяются производная третьего порядка (или третья производная), обозначаемая $f'''(x)$ и т.д.

Производная ***n***-го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

Производная функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрическими функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t\,(t_0)}{x'_t\,(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Вторая производная $y''(x)$ находится по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x_t' - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

Пример 1.1.Пользуясь определением, найти производную функции $y = f(x)$:

Пример 1.1 (1) $y = 3x^2$;

Решение. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 - 3x^2 = 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = 3\Delta x(2x + \Delta x$$

Отсюда находим предел соотношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке x при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Таким образом, $y' = (3x^2)' = 6x$.

Пример 1.1 (2) $y = \sin x$.

Решение. Найдем приращение Δy функции, соответствующее приращению Δx аргумента, используя формулу разности синусов:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью $\cos x$. Таким образом, $y' = (\sin x)' = \cos x$.

Пример 1.2. Пользуясь основными правилами дифференцировани найти $f'(x)$, **если:**

Пример 1.2 (1) $f(x)=\dfrac{9}{\sqrt[3]{x^2}}-5^{x+1}$;

Решение. Преобразуем функцию к виду

$$f'(x)=9\cdot x^{-2/3}-5\cdot 5^{x}.$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$f'(x)=(9\cdot x^{2/3}-5\cdot 5^{x})'=(9\cdot x^{-2/3})'-(5\cdot 5^{x})'=$$

$$=9\cdot\left(x^{-2/3}\right)'-5\cdot(5^{x})'=9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1}-5\cdot 5^{x}\ln 5=-6x^{-5/3}-5^{x+1}\ln 5$$

Пример 1.2 (2) $f(x)=(x^4-x)\cdot(3tgx-1)$.

Решение. Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$f'(x)=[(x^4-x)(3tgx-1)]'=(x^4-x)'(3tgx-1)+(x^4-x)(3tgx-1)'=$$

$$=(4x^3-1)(3tgx-1)+(x^4-x)\cdot\frac{3}{\cos^2 x}$$

Пример 1.3. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции

Пример 1.3 (1) $y=\sin^2 x$.

Решение. Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u=\sin x$ и $f(u)=u^2$. Так как $u'=\cos x$, а $f'(u)=2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x)=(u^2)'_x=2u\cdot u'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x.$$

Пример 1.3 (2) $y = \ln(arctg3x)$

Решение. Функция $\ln(arctg3)$ — композиция функций $u = arctg3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{arctg3x} \cdot (arctg3x)'.$$

Функция $arctg3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = arctgv$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(arctg3x)' = (arctgv)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{arctg3x} \cdot (arctg3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)arctg3x}.$$

Пример. **1.4.** Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

Пример. **1.4** (1) $y = x^{\sin x}$

Решение: Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\sin x}$. Тогда $\ln y = \ln x^{\sin x}$, т.е. $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой – производную произведения: $(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$, т.е. $\dfrac{y'}{y} = (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)'$ или

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда $y' = y(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$ или, учитывая, что $y = x^{\sin x}$,

$$y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

Пример. **1.4** (2) $y = \dfrac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Решение. Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, зато применение логарифмической производной позволяет найти ответ без труда:

$$\ln y = \ln \frac{(x-1)^3 (x+2)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Отсюда, используя формулы для логарифма произведения, частного и степени, получим:

$$\ln y = \ln(x-1)^3 + \ln(x+2)^{\frac{1}{2}} - \ln(x+1)^{\frac{2}{3}},$$

т.е.

$$\ln y = 3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

Осталось продифференцировать обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = [3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)]'$$

Или

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)},$$

Откуда

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right),$$

Т.е.

$$y' = \frac{(x-1)^3 \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right).$$

Пример 1.5. Найти производную неявно заданной функции y:

$$x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y — есть функция от $\boldsymbol{x}$ (поэтому, например, $(y^3)'_x = 3y^2 \cdot y'$), получим:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x - 2y)(1 - 2y')$$

или

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x - 2y) - 2y' \cdot \cos(x - 2y).$$

Отсюда находим $\boldsymbol{y'}$:

$$3y^2 y' + 2y' \cdot \cos(x - 2y) = \cos(x - 2y) - 3x^2$$

Или

$$y'(3y^2 + 2\cos(x - 2y)) = \cos(x - 2y) - 3x^2,$$

Т.е.

$$y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}.$$

Пример 1.6. Найти производную $y'(x)$ от следующей функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

Решение. Производная функции $y(x)$ находится по формуле $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, откуда в нашем случае

$$y'(x) = \frac{(3\sin t)'_t}{(2\cos t)'_t} = -\frac{3\cos t}{2\sin t} = -1{,}5ctgt\,.$$

Пример. 1.7 (1) Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y^2 = 4x$ в точке $M(1;2)$.

Решение. Найдем $y'(x)$ как производную неявной функции: $(y^2)' = (4x)'$, т. е. $2yy' = 4$, откуда $y' = \dfrac{2}{y}$. Значит, $y'(x_0) = y'(1) = 1$.

Отсюда получаем уравнение касательной в точке М:

$y - 2 = x - 1$, т.е. $y = x + 1$.

Теперь найдем уравнение нормали:

$y - 2 = -(x - 1)$, т.е. $y = -x + 3$

Пример. 1.7 (2) Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен $-\dfrac{1}{4}$, поэтому производная к кривой в искомой точке x_0 также равна $-\dfrac{1}{4}$:

$y'(x_0) = -\dfrac{1}{4}$, т.е. $-\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{4}$, откуда

$x^2 = 4$, *или* $x = \pm 2$.

Пример. 1.7 (3) Найти угол, под которым пересекаются кривые: $y = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y^2 = 12$.

Решение. Сначала найдем точку пересечения кривых, для чего подставим $y = \frac{8}{x}$ во второе уравнение: $x^2 - \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 12$, или

$t - \frac{64}{t} = 12$, где $t = x^2$. Решая последнее уравнение, найдем $t = 16$, откуда $x = \pm 4, y = \pm 2$. Таким образом, имеем 2 точки пересечения $M_1(4;2)$ и $M_2(-4;-2)$.

Найдем угол φ_1 пересечения кривых в точке M_1, предварительно вычислив $y_1'(4)$ и $y_2'(4)$ из уравнений $y = \frac{8}{x}$ и $x^2 - {y_2}^2 = 12$:

$$y_1' = -\frac{8}{x^2} \Rightarrow y_1'(4) = -\frac{8}{16} = -0{,}5\,;$$

$$\left(x^2 - y_2{}^2\right) = 12' \Rightarrow 2x - 2y_2 \cdot y_2' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2' = \frac{x}{y_2} \Rightarrow y_2'(4) = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Теперь окончательно найдем

$$tg\phi_1 = tg\varphi_1 = \frac{y_2'(4) - y_1'(4)}{1 + y_1'(4)y_2'(4)} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1}\,.$$

Поскольку знаменатель дроби обратился в ноль, то это означает, что $\boldsymbol{\varphi_1 = \frac{\pi}{2}}$.

Аналогично находим угол $\boldsymbol{\varphi_2 = \frac{\pi}{2}}$ во второй точке пересечения данных кривых.

Пример 1.8 (1) Найти $f'''(x)$, где $f(x) = \sin 3x$

Решение. Находим первую производную:

$$f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x .$$

Отсюда получим вторую производную –

$$f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x ,$$

А затем и искомую третью:

$$f'''(x) = (-9\sin 3x)' = -27\cos 3x$$

Пример 1.8 (2) Найти y''_{xx} для функции $\boldsymbol{y = y(x)}$, заданной параметрически $\boldsymbol{x = t^2}$, $\boldsymbol{y = t^3}$

Решение. Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3},$$

откуда

$$y''_{xx} = \frac{(t^2)' \cdot (t^3)'' - (t^3)' \cdot (t^2)''}{[(t^2)']^3} = \frac{2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2}{(2t)^3} = \frac{6t^2}{8t^3} = \frac{3}{4t}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Понятие дифференциала

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad \textbf{(2.1)}$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0,$ то функция называется *дифференцируемой* в точке x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т. е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив $y = x$ в формуле (2.1)), что $dx = \Delta x$. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a;b)$, то $dy = f'(x)dx,\ x \in (a,b)$.

Отсюда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т. е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

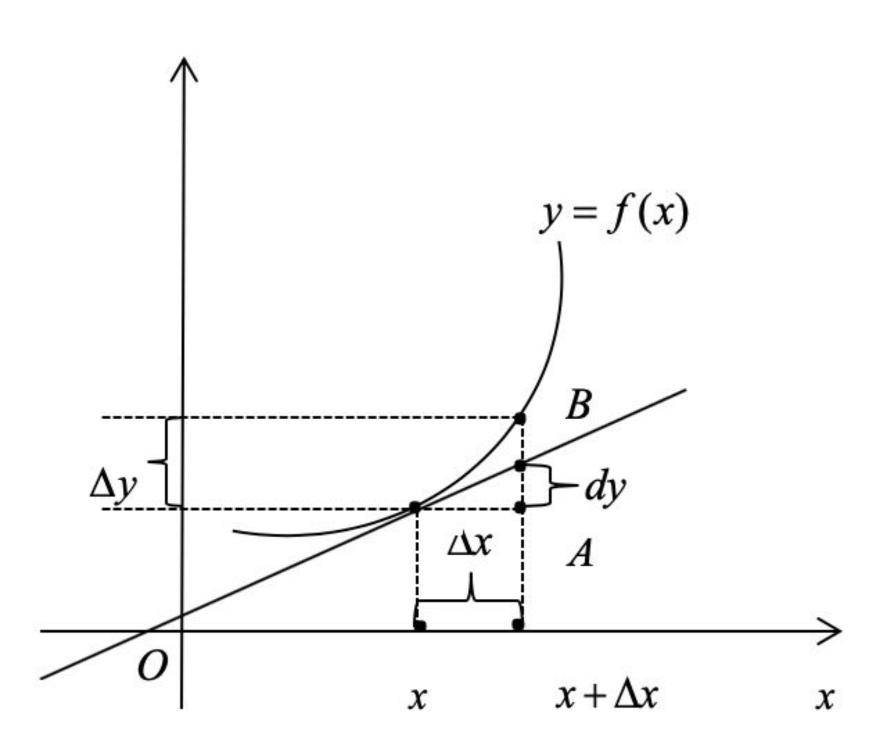
Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т. е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}$$

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ по известному значению этой функции и ее производной в точке x_0.

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически приращение Δy функции $f(x)$ в точке x – есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке – приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$).



Пусть ***u(x)*** и ***v(x)***– некоторые функции, дифференцируемые в точке $\boldsymbol{x}$. Тогда:

1. $dC = 0$, где C – константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α – константа.
3. $d(u \pm v) - du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.
6. Инвариантность формы дифференциала. Если $\boldsymbol{y = f(u(x))}$ – сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)dv, \text{ или } dy = y'_u \cdot du,$$

т.е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается $\boldsymbol{y}$ как функция независимой переменной $\boldsymbol{x}$ или зависимой переменной $\boldsymbol{u}$.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал $dy = f'(x)dx$ функции $f(x)$, называемый также *дифференциалом первого порядка* (или первым дифференциалом).

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a,b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)dx$, где dx — не зависящая от x константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или, более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d(d^2y)$, $d^4y = d(d^3y)$, В общем случае, дифференциалом *n*-го порядка от функции *f(x)* в точке *x* называется дифференциал от дифференциала (*n* — 1)-го порядка функции $f(x)$ в этой точке: $d^n y = d(d^{n-1} y)$, т. е. $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$, или, более кратко, $d^n y = f^n(x)dx^n$. Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{, в частности} \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Заметим, что lkz дифференциалов высших порядков свойство инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.

Пример. 1.9. Найти дифференциал функции $y = e^{x^3}$

Решение. Так как $dy = y'dx$, то в данном случае $dy = (e^{x^3})'dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$.

Так как $dy = y'dx$, то в данном случае $dy = (e^{x^3})'dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$.

Пример. 1.10. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Сначала найдем приращение Δy в общем виде:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = [(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1] - (x^2 - 3x + 1$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 =$$

$$= 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2$$

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что его линейная часть в произвольной точке x_0 равна $\left(2x_0 - 3\right)\Delta x$. Тогда по определению данной функции будет равен $dy = (2x - 3)\Delta x$, или, в привычной записи, $dy = (2x - 3)dx$.

Второе слагаемое в полученной записи для Δy, т.е. $\left(\Delta x\right)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти dy и сразу (без вычисления Δy) по формуле $dy = y'dx$, откуда $dy = (x^2 - 3x + 1)'dx = (2x - 3)dx$.

Теперь найдем Δy и dy в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11, \quad dy = 0{,}1.$$

Пример. 1.11 (1). Вычислить приближенно: $\boldsymbol{ln1,02}$

Решение. Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\,.$$

Тогда, подставляя $f(x) = \ln x$, получим

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x\,.$$

Полагая здесь $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, найдем

$$\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0{,}02 = 0{,}02\,.$$

Таким образом, $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$.

Пример. 1.11 (2) Вычислить приближенно: $\sqrt{24}$.

Решение: Учитывая, что $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25, \Delta x = -1$, получим

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-1) = 4{,}9$$

Окончательно $\sqrt{24 \approx 4{,}9}$

Пример. 1.12. Найти dy, $d^2 y$ и $d^3 y$ для функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Поскольку

$$dy = y'dx = (\sqrt[3]{x})'dx = \frac{1}{3} x^{-2/3} dx = \frac{dx}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}},$$

То

$$d^2y = d(dy) = d\left(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)'(dx)^2 = \frac{1}{3}(x^{-2/3})'dx = -\frac{2}{9}x^{-5/3}dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

.

Отсюда

$$d^3y = d(d^2y) = d\left(-\frac{2}{9}\frac{dx^2}{x^{5/3}}\right) = -\frac{2}{9}(x^{-5/3})'dx^3 = \frac{10}{27}x^{-8/3}dx^3 = \frac{10dx^3}{27^2\sqrt[3]{x^2}}.$$

То же самое можно было найти иначе, предварительно отыскав производные y', y'' и y''', а затем воспользоваться формулами:

$$d^2y = y''dx^2, d^3y = y'''dx^3.$$

Спасибо за внимание