РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

- **2.1 Системи лінійних рівнянь**
- **2.2 Матричний метод**
- **2.3 Правило Крамера**
- **2.4 Метод Гаусса**

2.1 Системи лінійних рівнянь

Лінійною системою m рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots x_n$ називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

де числа $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{mn}$ – ***коефіцієнти системи***. Система рівнянь, що має принаймні один розв'язок, називається ***сумісною***. Якщо система не має розв'язків, то вона називається ***несумісною***.

Сумісна система, що має єдиний розв'язок, називається ***визначеною***, система, що має більш ніж один розв'язок – ***невизначеною***.

Найвищий порядок ненульового мінору називається ***рангом матриці*** і позначається rang A.

Матриці $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$

називаються ***основною і розширеною матрицями системи***, відповідно.

Теорема (Кронекера-Капеллі): Для того щоб лінійна система була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці цієї системи дорівнював рангу її основної матриці.

2.2 Матричний метод

Система рівнянь (2.1) еквівалентна системі $Ax=b$, записаній в ***матричній формі***.

Якщо $|A| \neq 0$, то матриця A називається ***невиродженою*** і для неї існує ***обернена матриця*** A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці.

Тоді

$$\boxed{x = A^{-1}b.}$$

Приклад: Розв'язати систему рівнянь матричним методом.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 1 + 0 - 0 - 4 - (-2) = -11 \neq 0,$$

отже, A – невироджена і існує

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - 1) = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2 + 1) = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 0) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4 - 0) = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4 - 0) = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2+2) = 4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4+1) = -5,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (8-2) = 6,$$

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-5) \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + 6 \cdot (-3) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 \\ 11 \\ -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-11}\right) \cdot (-11) \\ \left(\frac{1}{-11}\right) \cdot 11 \\ \left(\frac{1}{-11}\right) \cdot (-22) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.3 Правило Крамера

Матрична рівність $x = A^{-1}b$ можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

звідки, з урахуванням теореми Лапласа випливає, що

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},} \qquad i=1..n,$$

де $\Delta = |A|$, а Δ_i – визначник, одержаний з Δ заміною i-го стовпчика стовпцем вільних членів

Правило Крамера: якщо визначник системи рівнянь відмінний від 0, то вона має єдиний розв’язок який визначається за формулами Крамера. Існування цього розв’язку випливає з теореми Кронекера-Капеллі, оскільки зі співвідношення $|A| \neq 0$ випливає, що ранг основної матриці А дорівнює n, а ранг розширеної матриці, що містить n рядків, більше числа n бути не може і тому дорівнює рангу основної матриці.

Приклад: Розв'язать систему рівнянь $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3, \end{cases}$ за формулами Крамера.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

Отже, система має єдиний розв'язок, визначений за формулами Крамера

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -22,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2.$$

Дослідження системи

- Якщо det$\neq$ 0, то система має єдиний розв’язок.
- Якщо det = 0 і принаймні дин з визначників det$_i$ не дорівнює 0, то система несумісна.
- Якщо det = det$_i$ = 0, то система має нескінчену множину розвязків або не має розв’язків.

2.4 Метод Гаусса

Елементарними перетвореннями матриці називаются наступні операції:

а) перестановка двох рядків матриці;

б) множення рядка на число $\alpha \neq 0$;

в) додавання до одного рядка матриці іншого її рядка, помноженої на число $\alpha \neq 0$;

г) транспонування матриці.

<u>Елементарні перетворення матриці не змінюють її рангу.</u> Тому при обчисленні рангу матриці, вона за допомогою елементарних перетворень зводиться до матриці B, ранг якої легко знаходиться. Якщо A=rang B, то $A \sim B$.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Її розширену матрицю елементарними перетвореннями над рядкаси можна звести

або до трикутного виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & c_{nn} & d_n \end{array}\right] \quad \textbf{(2.2)}$$

або до трапецієподібного виду

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2m} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & c_{mm} & \ldots & c_{mn} & d_m \end{array}\right] \quad \textbf{(2.3)}$$

Матриця (2.2) відповідає перетвореній системі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases}$$

В цьому випадку, починаючи з останнтього рівняння, знаходимо послідовно значения невідомих x_n, $x_{n\text{-}1}$,…x_1 єдиним чином, якщо c_{nn}≠0, … c_{22}≠0, a_{11}≠0. Якщо у деякому i-му рядку всі c_{ij}=0, а d_i≠0, то це свідчить про те, що что система несумісна, оскільки в даному випадку rang([A|b])≠rang(A).

Приклад: Розв'язать систему рівнянь $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3, \end{cases}$ методом Гаусса.

Розширена матриця системи має вид: $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right].$

Переставим другий рядок на місце першого, перший на місце третього, а третій на місце другого, одержим:

Від першого рядка помноженого на 4 віднімемо 3-й:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right].$$

Від другого рядка помноженого на 6 віднімемо 3-й:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right].$$

Матриця зведена до трикутного виду, їй відповідає перетворена система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad x_2 - x_3 = -3, \\ \qquad -11x_3 = -22. \end{cases}$$

Знаходим розв'язок цієї системи, починаючи з останнього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 + 1 = -2\cdot(-1) - 2 + 1 = 1, \\ x_2 = x_3 - 3 = 2 - 3 = -1, \\ x_3 = \dfrac{-22}{-11} = 2. \end{cases}$$

Для трапецієвидної матриці (2.3) перетворена система має вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \ldots \\ \qquad c_{mm}x_m + \ldots + c_{mn}x_n = d_m. \end{cases}$$

Звідки знаходим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2m}x_m = d_2 - c_{2m+1}x_{2m+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \qquad \ldots \\ \qquad c_{mm}x_m = d_m - c_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - c_{mn}x_n. \end{cases}$$

Надаючи змінним $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ довільні значення, знаходим із системи x_m, $x_{m-1}, \ldots x_1$. Таким чином, ***метод Гаусса надає можливість не тільки розв'язать систему, але і дати відповідь на запитання про її сумісність.***

Приклад: За допомогою метода Гаусса розвязать систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Основна матриця системи має вид:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Поміняємо перший і третій рядки місцями:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Від першого рядка помноженого на 3 віднімемо послідовно другій, а потім третій рядок. Потім від другого рядка віднімемо третій, одержимо:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Оскільки, $\operatorname{rang}(A)=3<4=n$, то система имеет ∞ нескінченну множин розв'язків.

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

- базисний мінор, x_1, x_2, x_3 – базисні змінні, x_4 –вільна змінна.

Матриця зведена до трапецієвидної форми, їй відповідає перетворена система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ \quad x_2 - 7x_3 - 14x_4 = 0, \\ \qquad\quad 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Знаходим розвязок цієї системи, починаючи з останнього рівняння.

Нехай $x_4 = 2t$, $t \in \mathbf{R}$,

тоді:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 35t - 2t - 5 \cdot 2t = 23t, \\ x_2 = 7x_3 + 14x_4 = 7t + 14 \cdot 2t = 35t, \\ x_3 = \dfrac{2x_4}{4} = \dfrac{2 \cdot 2t}{4} = t. \end{cases}$$