- МЧС РОССИИ
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ

Кафедра прикладной математики и информационных технологий

Многокритериальная оптимизация

для обучающихся по направлению подготовки

«Системный анализ и управление»

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

ПРОВЕДЕНИЯ ЛЕКЦИИ

по учебной дисциплине

«**Методы многокритериальной оптимизации**»

Направление подготовки
27.04.03 «Системный анализ и управление»
(квалификация (степень) магистр)
Заочная форма обучения

Тема №1. Начальные понятия многокритериальной оптимизации

Занятие № 1. Формальная постановка задачи оптимизации
при многих критериях. Метод последовательных уступок.

Учебные вопросы.

1.Формальная постановка задачи оптимизации при многих критериях. Частные критерии.
2. Парето-оптимальные решения. Эффективные решения.
3. Способы сужения Парето-оптимального множества.
4. Метод последовательных уступок.
5. Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив.

1.Формальная постановка задачи оптимизации при многих критериях. Частные критерии.

Формальную постановку задачи оптимизации при многих критериях нам удобнее будет рассматривать на примере управления цепочками поставок сырья для производства продукции.

Для организации оптимального управления в рамках анализируемого звена цепи поставок менеджеру потребуется задать определенные критерии, обусловливаемые желанием оптимизировать определенные показатели. Пусть уже выделено N критериев, формализующих издержки или потери применительно к указанным выше процессам. Такие исходно заданные критерии называют ***частными критериями*** (чтобы отличать их от критерия выбора, на основе которого затем будет найдено оптимальное решение в формате задачи многокритериальной оптимизации). Обозначим указанные частные критерии следующим образом:

$$g^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1,2,\ldots,N.$$

$$g^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1,2,\ldots,N.$$

Здесь

- $\vec{x}$ – n-мерная векторная переменная, координаты которой представляют управляемые параметры для задачи многокритериальной оптимизации в рамках анализируемого звена/звеньев цепи поставок, т.е. $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- считается заданной система ограничений $\vec{x} \in X$, причем X представляет множество допустимых значений для $\vec{x}$ в формате задачи многокритериальной оптимизации;
- $g^{(k)}(\vec{x})$ - некоторая функция *n* переменных (при фиксированном значении k), формализуемая в качестве одного из частных критериев (k=1, 2, …, N);

Обратим внимание на то, что изменением знака функции $g^{(k)}(\vec{x})$ всегда можно свести задачу максимизации к задаче минимизации частного критерия (и наоборот). Поэтому далее достаточно рассматривать ситуации, когда соответствующие частные критерии формулируются именно как задачи ***минимизации*** (указанное допущение не ограничивает общности, но при этом позволит стандартизировать изложение последующего материала).

Задача **многокритериальной оптимизации** рассматривается как задача одновременной оптимизации всех частных критериев. Требуется найти точку $\vec{x} \in X$, которая в некотором смысле (будет уточняться) минимизирует все эти критерии. Другими словами, рассматривается следующая оптимизационная задача:

$$g^{(k)}(\vec{x}) \to \min, \ k=\overline{1,N},$$

при условии $\vec{x} \in X$. При этом критерии $g^{(k)}(\vec{x})$ называют **частными критериями**. Их совокупность можно рассматривать как векторный критерий $G(\vec{x})=(g^{(1)}(\vec{x}), \ldots, g^{(N)}(\vec{x}))$. Он и подлежит оптимизации (по каждой отдельной или частной компоненте).

Идеальной ситуацией при решении задач многокритериальной оптимизации является случай, когда пересечение множеств оптимальных решений для всех частных критериев не является пустым. Такое множество обозначают следующим образом: $\bigcap_{k=1}^{N} Arg \min_{\vec{x} \in X} g^{(k)}(\vec{x})$.

Если указанное множество не является пустым, то принадлежащие ему альтернативы называют ***абсолютными*** решениями. Практикующий менеджер понимает, что в реальных ситуациях рассчитывать на такое «везение» не приходится. Обычно указанное множество (множество абсолютных решений) является пустым. В практических ситуациях при оптимизации работы звена цепи поставок для конкретной системы логистики, как правило, не существует решения, минимизирующего (оптимизирующего) одновременно все частные критерии. Более того, одни частные критерии могут противоречить другим.

Следовательно, нужно искать компромиссное решение, наилучшее в некотором смысле. Соответствующий подход к его нахождению и понятие наилучшего решения формализуют на основе дополнительно вводимого ***критерия выбора*** (чтобы отличать его от исходно заданных при постановке задачи частных критериев). Чем большим количеством таких подходов к формализации указанных критериев выбора владеет менеджер, тем более эффективно он может адаптировать оптимальный выбор применительно к предпочтениям ЛПР. Как правило, такое компромиссное решение стараются найти в классе так называемых эффективных решений (их также называют эффективными по Парето решениями, переговорным множеством или просто множеством Парето).

2.Парето-оптимальные решения.
Эффективные решения.

Приведем соответствующее формальное определение. Решение $\vec{x}^* \in \mathbf{X}$ называется ***эффективным решением*** **или** ***оптимальным по Парето решением*,** если не существует другого решения $\vec{x} \in X$ среди анализируемых альтернатив, такого, что $g^{(k)}(\vec{x}) \le g^{(k)}(\vec{x}^*)$, $k=\overline{1,N}$, причем хотя бы для одного k имеет место строгое неравенство. Другими словами, оптимальное по Парето решение $\vec{x}^* \in X$ должно обладать следующим свойством. В множестве X допустимых альтернативных решений не найдется ни одного другого решения, переход к которому (от $\vec{x}^*$) позволит улучшить показатель хотя бы одного из частных критериев, чтобы при этом не ухудшились бы показатели других частных критериев. Если множество абсолютных решений не является пустым, то множество оптимальных по Парето решений совпадает с множеством абсолютных решений. Убедитесь в этом самостоятельно.

Если множество альтернативных решений является дискретным, то задачу выбора оптимального решения по многим критериям удобно представлять в табличной форме. При этом каждую альтернативу достаточно характеризовать оценками частных критериев. По строкам таблицы представляют альтернативы $\{X_i, i = 1,2,...,m\}$. В каждом столбце такой таблицы указывают оценки по конкретному частному критерию. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 1.1. Требуется выбрать наилучший вариант организации поставок товара, например, из семи доступных и возможных вариантов. Соответствующие варианты альтернатив обозначаем далее через A, B, C, D, E, F и G. Эти семь альтернатив составляют множество $\{X_i, i = 1,2,...,m\}$, причем m = 7. Пусть частные критерии в этой ситуации представлены четырьмя критериями. В качестве них критериев могут выступать, например, следующие. Критерий $g^{(1)}$- минимизация оценки годовых издержек, обусловливаемых соответствующими затратами на перевозки. Критерий $g^{(2)}$- минимизация оценки годовых издержек, обусловливаемых соответствующими затратами на хранение. Критерий $g^{(3)}$- минимизация оценки для суммарных денежных средств, замороженных в запасах; $g^{(4)}$- минимизация оценки годовых издержек, обусловливаемых соответствующими штрафными санкциями из-за срывов сроков поставки; и т.д. (ограничимся в этом примере перечисленными четырьмя частными критериями).

Показатели этих частных критериев в формате заданных альтернатив уже проанализированы и выражены в некоторых удобных для ЛПР денежных единицах (например, в тыс. у.е., см. таблицу 1.1). Уточним, какие из альтернатив являются оптимальными по Парето.

Таблица 1.1.

Значения частных критериев для примера 1.1.

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

РЕШЕНИЕ. Альтернатива B доминирует альтернативу D (т.к. переход от альтернативы D к альтернативе B позволяет улучшить показатели частных критериев $g^{(1)}$ и $g^{(3)}$, не ухудшив показатели остальных частных критериев). Другими словами, вариант B является заведомо лучшим (по заданным частным критериям), чем вариант D. Никакой менеджер никогда в такой ситуации не выберет альтернативу D в качестве наилучшей. Она не является оптимальной по Парето. Аналогично альтернатива C доминирует альтернативу E. Действительно, переход от альтернативы E к альтернативе C позволяет улучшить показатели частных критериев $g^{(1)}$, $g^{(3)}$ и $g^{(4)}$, не ухудшив показатели $g^{(2)}$. Таким образом, никакой менеджер или ЛПР никогда в такой ситуации не выберет также и альтернативу E в качестве наилучшей. Обусловлено это именно тем обстоятельством, что альтернатива E не является оптимальной по Парето.

В рассматриваемом примере альтернативные варианты решений A, B, C, F и G являются оптимальными по Парето. При переходе от любого из этих вариантов решений к какому-нибудь другому (из множества альтернатив A, B, C, F и G) нельзя улучшить показатель хотя бы одного из частных критериев, не ухудшив при этом показатель / показатели какого-нибудь из остальных частных критериев.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятие оптимального по Парето решения является основополагающим в теории многокритериальной оптимизации. Несмотря на то, что разные ЛПР могут иметь и разные предпочтения (и соответственно выбирать в качестве оптимальных решений разные альтернативы), тем не менее, в формате процедур их выбора всегда будет общим следующее. Любое ЛПР *всегда будет выбирать оптимальное решение именно из множества решений оптимальных по Парето*.

Способы сужения Парето-оптимального множества

Выделение множества Парето МЗО часто не является удовлетворительным решением. Это связано с тем, что при достаточно большом исходном множестве вариантов множество Парето оказывается недопустимо большим для того, чтобы ЛПР было бы в состоянии осуществить выбор самостоятельно. Таким образом, выделение множества Парето можно рассматривать лишь как предварительный этап оптимизации, и налицо проблема дальнейшего сокращения этого множества.

Для выбора одной оптимальной стратегии из множества эффективных решений в каждой конкретной многокритериальной задаче необходимо использовать дополнительную информацию о цели операции, т.е. ту информацию, которая при задании векторного критерия осталась неформализованной и потому неиспользованной.

Наиболее логичным и последовательным представляется путь построения бинарного отношения предпочтения, более сильного, чем отношение Парето, позволяющего сузить множество выбираемых вариантов до приемлемых с точки зрения ЛПР размеров. Разумеется, для этого потребуется некоторая дополнительная информация, которую придётся получить от ЛПР. Это может быть информация о критериях, о самих сравниваемых вариантах и т.п. Задача, стоящая перед создателями методов, заключается в том, чтобы с помощью этой информации обосновать свои действия по сужению выбора и гарантировать ЛПР от того, чтобы ни один из вариантов, представляющих для него интерес, не был потерян в процессе оптимизации.

Необходимо отметить, что необоснованность сужения множества Парето является существенным недостатком многих методов многокритериальной оптимизации. Многокритериальная оптимизация: Математические аспекты /Б.А Березовский, Ю.М. Барышников и др. - М.: Наука, 1989. - 128 с.

Таким образом, общая методика исследования задач принятия решения на основе математического моделирования для МЗО может быть реализована в рамках одного из следующих подходов.

Первый подход. Для заданной многокритериальной задачи оптимизации находится множество её Парето-оптимальных решений, а выбор конкретного оптимального варианта из множества Парето-оптимальных предоставляется ЛПР.

Второй подход. Как уже было сказано выше, производится сужение множества Парето-оптимальных исходов (в идеале – до одного элемента) с помощью некоторых формализованных процедур, что облегчает окончательный исход для ЛПР. Отметим, что такое сужение может быть произведено только при наличии дополнительной информации о критериях или свойствах оптимального решения.

Рассмотрим некоторые простейшие способы сужения Парето-оптимального множества, акцентируя при этом внимание на необходимость дополнительной информации. Считаем, что задана многокритериальная задача оптимизации.

Указание верхних границ критериев. Дополнительная информация об оптимальном исходе $X_{opt} \in D$ в этом случае имеет вид

$$F_i(X_{opt}) \leq C_i, i = \overline{1, m}. \qquad ()$$

Число C_i рассматривается здесь как верхняя граница по i – му критерию.

Отметим, что указание верхних границ по критериям не может быть "извлечено" из математической модели задачи принятия решения; набор ограничений (C_1, C_2, , C_m) представляет собой дополнительную информацию, полученную от ЛПР.

Задача. *Выбор места работы*

Предположим, что Вам предстоит выбрать место работы из девяти вариантов, представленных в табл.1. В качестве основных критериев взяты: зарплата З, длительность отпуска Д, время поездки на работу В. Из смысла задачи следует, что критерии З и Д следует максимизировать, а критерий В – минимизировать. Какой вариант является оптимальным?

Таблица 1

Варианты	Критерий		
	Зарплата, (руб.)	Длительность отпуска, (дни)	Время поездки, (мин)
1	90000	20	60
2	50000	30	20
3	70000	36	40
4	80000	40	50
5	40000	60	15
6	60000	30	10
7	90000	35	60
8	60000	24	10
9	65000	35	40

Решение. Выделим вначале Парето-оптимальные варианты. Отбрасывая доминируемые по Парето варианты {1, 2, 8, 9}, получаем Парето-оптимальное множество {3, 4, 5, 6, 7}. При отсутствии информации об относительной важности рассматриваемых критериев, а также о каких-либо дополнительных свойствах оптимального решения дальнейшее сужение Парето-оптимального множества произвести нельзя. Тогда формальный анализ заканчивается указанием Парето-оптимального множества и окончательный выбор оптимального варианта производится ЛПР из этих пяти вариантов на основе каких-то дополнительных соображений.

Рассмотрим теперь второй подход, который приводит к сужению Парето-оптимального множества на основе дополнительной информации, получаемой от ЛПР.

а) *Указание нижних границ критериев.* Наложим, например, следующие ограничения на оптимальное решение:

зарплата — не менее 60000 рублей;

длительность отпуска — не менее 30 дней;

время поездки — не более 40 минут.

Варианты, удовлетворяющие этим дополнительным ограничения: {3, 6, 9}; из них оптимальными по Парето являются варианты 3 и 6. Остаётся сделать окончательный выбор между вариантами 3 и 6.

б) Субоптимизация. Пусть в качестве выделенного (главного, важнейшего) критерия выступает критерий зарплата; ограничения длительность отпуска — не менее 30 дней, время поездки — не более 40 минут. Отбросим варианты, которые не удовлетворяют данным ограничениям; остаются варианты: {2, 3, 5, 6, 9}. Из них максимальную зарплату имеет вариант 3. Этот вариант и будет оптимальным.

в) *Лексикографическая оптимизация.* Упорядочим критерии по относительной важности. Например, следующим образом: $З \succ В \succ Д$ (т.е. важнейший критерий — *зарплата*, следующий за ним по важности *время поездки*, наименее важный критерий *длительность отпуска*). Максимальное значение по критерию З имеют варианты 1 и 7. Далее сравниваем эти варианты по второму по важности критерию В. Так как время поездки для этих вариантов одинакова, переходим к третьему критерию Д; по критерию *длительность отпуска* лучшим является вариант 7, который и является здесь оптимальным.

Задание. Проверьте, что при упорядочении $В \succ Д \succ З$ оптимальным является вариант 6, а при упорядочении $Д \succ З \succ В$ – оптимальным становится вариант 5.

Метод последовательных уступок

Суть такого подхода к решению многокритериальной задачи оптимизации можно представить следующим образом. Прежде всего, отметим, что метод последовательных уступок применяется при решении многокритериальных задач оптимизации в случае, когда заданные частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывающей важности. Пусть $g^{(1)}(\vec{x})$ – наиболее важный, … , $g^{(N)}(\vec{x})$ – наименее важный среди всех N рассматриваемых частных критериев. Считаем, что такое упорядочение частных критериев в задаче многокритериальной оптимизации уже имеет место.

Реализация указанного метода (при минимизации частных критериев) предполагает выполнение следующих этапов.

I. На первом этапе решается однокритериальная задача для первого наиболее важного частного критерия:

$$g^{(1)}(\vec{x}) \to \min$$

при условии $\vec{x} \in X$.

Пусть $g^{(1)}_{\min}$ - минимальное значение целевой функции для такой однокритериальной задачи скалярной оптимизации, которая будет решена на первом этапе. Чтобы перейти ко второму этапу, предварительно, исходя из практических соображений и специфики задачи, исходя из имеющегося опыта бизнеса и отношения ЛПР к важности частных критериев, им назначается некоторая уступка Δ_1 ($\Delta_1 > 0$).

Это – уступка, которую ЛПР считает возможным допустить в рамках процедур оптимизации по этому методу применительно к оценке по первому частному критерию $g^{(1)}(\vec{x})$ (т.е. по отношению к уже найденному значению $g^{(1)}_{\min}$). Учет такой уступки позволит перейти ко второму этапу – минимизации следующего по важности частного критерия.

В формате процедур следующего шага на допустимые оценки по частному критерию $g^{(1)}(\bar{x})$ будет наложено ограничение: можно будет рассматривать только те альтернативы, для которых такая оценка не будет превышать допустимой предельной величины $g_{\min}^{(1)} + \Delta_1$ (здесь и только здесь учитывается назначенная уступка Δ_1).

II. На втором этапе метода последовательных уступок ищется решение, которое минимизирует второй (по важности) частный критерий $g^{(2)}(\vec{x})$, причем с учетом указанного ограничении на $g^{(1)}(\vec{x})$ и с учетом исходно заданного множества X допустимых решений. Другими словами, решается следуюшая однокритериальная (скалярная) задача:

$$g^{(2)}(\vec{x}) \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g^{(1)}(\vec{x}) \le g^{(1)}_{\min} + \Delta_1, \\ \vec{x} \in X \end{cases}$$

Пусть $g_{\min}^{(2)}$ - минимальное значение целевой функции для такой однокритериальной задачи, которая будет решена на втором этапе. Чтобы перейти к третьему этапу, предварительно, исходя из специфики задачи, исходя из имеющегося опыта бизнеса и отношения ЛПР к важности частных критериев, им снова назначается некоторая уступка Δ_2 ($\Delta_2 > 0$). Это – уступка, которую можно допустить в рамках процедур оптимизации по этому методу применительно к оценке по второму частному критерию $g^{(2)}(\vec{x})$ (т.е. по отношению к уже найденному значению $g_{\min}^{(2)}$).

Учет такой уступки позволит перейти к третьему этапу – минимизации следующего по важности частного критерия. В формате процедур второго шага на допустимые оценки по частному критерию $g^{(2)}(\vec{x})$ будет дополнительно наложено ограничение, согласно которому можно будет рассматривать только те альтернативные решения, для которых такая оценка не будет превышать допустимой предельной величины с учетом сделанной уступки на этом шаге (в формате задач минимизации): $g^{(2)}_{\min} + \Delta_2$ (именно здесь и только здесь учитывается назначенная уступка Δ_2; она фактически устанавливает верхний предел для допустимых значений оценок по второму частному критерию в формате процедур оптимизации).

Подчеркнем, что на следующем этапе метода будет решаться однокритериальная задача

$$g^{(2)}(\vec{x}) \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g^{(1)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{1} + \Delta_1, \\ g^{(2)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{2} + \Delta_2 \\ \vec{x} \in X \end{cases}$$

И т.д.

III. Аналогичные процедуры реализуются на всех последующих этапах этого метода. В частности, на k-ом этапе решается соответствующая однокритериальная задача для k-го по важности частного критерия с учетом заданного множества X допустимых решений и всех ранее наложенных ограничений. К таким ограничениям на этом шаге добавляется еще одно. Это - требование, согласно которому оценка для частного критерия $g^{(k-1)}$, который исследовался на минимум на предыдущем (k-1)-ом этапе, не должна превышать максимально допустимой величины $g_{\min}^{(k-1)}$ + Δ_{k-1}.

Здесь $g_{\min}^{(k-1)}$ - минимальное значение целевой функции предыдущего (k-1)-го этапа, а Δ_{k-1} – соответствующая уступка ($\Delta_{k-1} > 0$), которую задает ЛПР в качестве допустимой по отношению к найденному значению $g_{\min}^{(k-1)}$, чтобы перейти к следующему k-му этапу реализации метода. Соответственно на k-ом этапе, решается задача минимизации:

$$g^{(k)}(\vec{x}) \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g^{(1)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{(1)} + \Delta_1, \\ g^{(2)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{(2)} + \Delta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g^{(k-1)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{(k-1)} + \Delta_{k-1}, \\ \vec{x} \in X \end{cases}$$

$$g^{(k)}(\vec{x}) \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g^{(1)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{(1)} + \Delta_1, \\ g^{(2)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{(2)} + \Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^{(k-1)}(\vec{x}) \le g_{\min}^{(k-1)} + \Delta_{k-1}, \\ \vec{x} \in X \end{cases}$$

IV. Если на последнем этапе метода окажется, что минимальное значение критериальной функции достигается при двух или более альтернативах, то в качестве оптимальной может быть выбрана любая из них, но которая будет оптимальной по Парето.

Для многокритериальной задачи с N частными критериями требуется последовательно реализовать N указанных этапов. Решение, получаемое на последнем этапе, принимается в качестве наилучшего решения исходной многокритериальной задачи оптимизации в рамках этого метода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод последовательных уступок может приводить к решениям, не принадлежащим множеству решений, оптимальных по Парето. Менеджер должен понимать, что процедуры метода необходимо завершать проверкой выбранного решения на оптимальность по Парето.

Процедуры критерия в формате дискретного множества альтернатив. Теперь обратимся к формату задач многокритериальной оптимизации по методу уступок, которые имеют дискретное множество анализируемых альтернатив. В этом случае при реализации процедур метода менеджеру удобнее использовать табличный подход. Соответственно процедуры оптимизации будут следующими.

1) Сначала в формате таблицы, где для всех анализируемых альтернативных решений представлены (вдоль строк) оценки частных критериев, выделяется столбец, который соответствует оценкам наиболее важного критерия. Пусть это будет, например, первый столбец.

2) Затем в соответствии с первым шагом алгоритма формализованного критерия выбора по методу уступок находится минимальный элемент такого выделенного (первого) столбца.

3) Далее, чтобы перейти ко второму шагу процедур оптимизации, ЛПР формализует требуемую форматом метода уступку Δ_1 и тем самым устанавливает

максимально допустимое значение оценки по первому частному критерию для анализируемых альтернативных решений.

4) На следующем шаге метода из таблицы удаляются все альтернативы, для которых оценка по первому частному критерию не удовлетворяет установленным ограничениям (это обеспечивает выполнение системы ограничений на втором шаге процедур оптимизации).
5) Далее на этом втором шаге в соответствии с требованиями алгоритма формализованного критерия выбора по методу уступок находится минимальный элемент следующего по важности (например, второго) частного критерия - элемент соответствующего столбца.

6) Чтобы перейти к следующему (третьему) шагу процедур оптимизации, ЛПР формализует требуемую форматом метода уступку Δ_2 и тем самым устанавливает максимально допустимое значение оценок по второму частному критерию для анализируемых альтернативных решений. При переходе к следующему шагу метода из таблицы удаляются все такие альтернативы, для которых оценка по второму частному критерию не удовлетворяет установленным ЛПР ограничениям (это обеспечивает выполнение системы ограничений на следующем шаге процедур оптимизации). И т.д.

7) Наконец, на последнем шаге по элементам последнего рассмотренного столбца находится оптимальное альтернативное решение по методу уступок: оно соответствует (по строке) именно наименьшему из всех элементов указанного столбца.

Для иллюстрации метода уступок вернемся к условному примеру 1.

ПРИМЕР 3.2. Анализируется ситуация, когда нужно выбрать наилучший вариант организации поставок товара, причем, из семи доступных вариантов: A, B, C, D, E, F и G. Множество частных критериев представлено четырьмя критериями. Их оценки (в тыс. у.е.) приведены в таблице 3.1. Найдем оптимальное решение по методу уступок. Считаем, что критерии уже упорядочены в порядке убывания их важности для ЛПР. Уступки будем уточнять и комментировать по ходу решения.

Таблица 3.1.

Оценки частных критериев (для процедур оптимизации первого этапа).

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

РЕШЕНИЕ. Из таблицы 3.1 видим, что в столбце с показателями первого частного критерия минимальный элемент составляет 40: $g_{\min}^{(1)} = 40$. Пусть на первом этапе назначена уступка $\Delta_1 = 3$. Тогда на втором этапе будут рассматриваться только те альтернативные решения, для которых оценка первого частного критерия не будет превосходить показателя 43 ($g_{\min}^{(1)} + \Delta_1 = 43$). Поэтому для реализации второго этапа метода сначала будут удалены альтернативы А и Е (их оценки по первому частному критерию не удовлетворяют требуемым ограничениям). Результат представлен в таблице 3.2.

Таблица 3.2.
Оценки частных критериев (процедуры оптимизации второго этапа).

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Для «урезанной» таблицы 3.2 (после удаления альтернатив А и Е) в столбце с показателями второго частного критерия (он принят вторым по важности) минимальный элемент составляет 32: $g_{\min}^{(2)} = 32$. Пусть на этом этапе назначена уступка $\Delta_2=3$. Соответственно на третьем этапе будут рассматриваться только те альтернативы, для которых:

- оценка первого частного критерия не будет превосходить 43 ($g_{\min}^{(1)}+\Delta_1= 43$);
- оценка второго частного критерия не будет превосходить 35 ($g_{\min}^{(2)}+\Delta_2= 35$).

Поэтому для реализации третьего этапа сначала будет удалена альтернатива G (ее показатель по второму частному критерию не удовлетворяет требуемым ограничениям). Результат представлен в таблице 3.3.

Таблица 3.3.

Оценки частных критериев (процедуры оптимизации третьего этапа).

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
F	43	32	147	27

Для новой «урезанной» таблицы 3.3 в столбце с показателями третьего частного критерия минимальный элемент составляет 126: $g_{\min}^{(3)} = 126$. Пусть на этом шаге назначена уступка $\Delta_3 = 14$ (чтобы перейти к процедурам оптимизации на четвертом этапе). Соответственно на последнем этапе будут рассматриваться только те альтернативные решения, для которых:

- оценка первого частного критерия не будет превосходить 43 ($g_{\min}^{(1)} + \Delta_1 = 43$);

- оценка второго частного критерия не будет превосходить 35 ($g_{\min}^{(2)} + \Delta_2 = 35$);
- оценка третьего частного критерия не будет превосходить 140 ($g_{\min}^{(3)} + \Delta_3 = 140$).

На четвертом этапа будут удалены альтернативы B, D и F (их показатели по третьему частному критерию не удовлетворяют ограничениям). Останется одна альтернатива C. Она и будет принята в качестве наилучшей альтернативы по методу уступок.