ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, ЗАКОН ЕЁ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

- Данная методическая работа создана для студентов 25а, 25б групп, обучающихся по специальности 51.02.02 Социально-культурная деятельность (по видам), 26 группы, обучающихся по специальности 51.02.03 Библиотековедение.
- В методической работе «Элементы теории вероятностей: дискретная случайная величина, закон её распределения» введены основные понятия и определения ; приведены примеры решения задач, предложены задачи для самопроверки.
- Методическая работа находится в свободном доступе на сайте социальной сети преподавателя и на сайте «Ивановского колледжа культуры».
- Методическая работа может быть использована как для аудиторных занятий, так и для внеаудиторной самостоятельной работы.

ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

- ***Случайной величиной*** называют переменную величину, которая в зависимости от исходов испытания принимает значения, зависящие от случая.
- Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется ***дискретной случайной величиной***.
- Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется ***непрерывной случайной величиной***.
- Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \ldots$, а их значения – строчными буквами с индексами, например $x_1, x_2, \ldots$.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

- ***Законом распределения дискретной случайной величины*** называется соответствие между значениями $x_{1,}\, x_2, x_3, \dots$ этой величины и вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots$.
- Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически (то есть с помощью формул).
- Если дискретная случайная величина X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, то её закон распределения определяется формулами $P(X = x_k) = p_k\ (k = 1,2, \dots, n), \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. **Читается:** вероятность события , состоящего в том, что случайная величина X приняла значение x_k, а $\mathrm{p_k}$ - вероятности с которыми X принимает эти значения.
-
- Закон можно записать и таблицей:

				…	
				…	

- В этой таблице сумма вероятностей также равна единице $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$.
- События $(X = x_k, k = 1,2, \dots, n)$ образуют полную группу событий, поэтому выполняется равенство $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

ПРИМЕР 1

- ***Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?***

а)

б)

Решение.

а) $0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1.$

Ответ: таблица задает закон распределения дискретной случайной величины.

б) $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1{,}1.$

Ответ: так как $1{,}1 \neq 1$, то таблица не задает закон распределения дискретной случайной величины.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной декартовой системе координат строят точки (x_k, p_k) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется ***многоугольником распределения*** случайной величины X.

ПРИМЕР 2

- ***Дискретная случайная величина X имеет закон распределения***

				p_4	

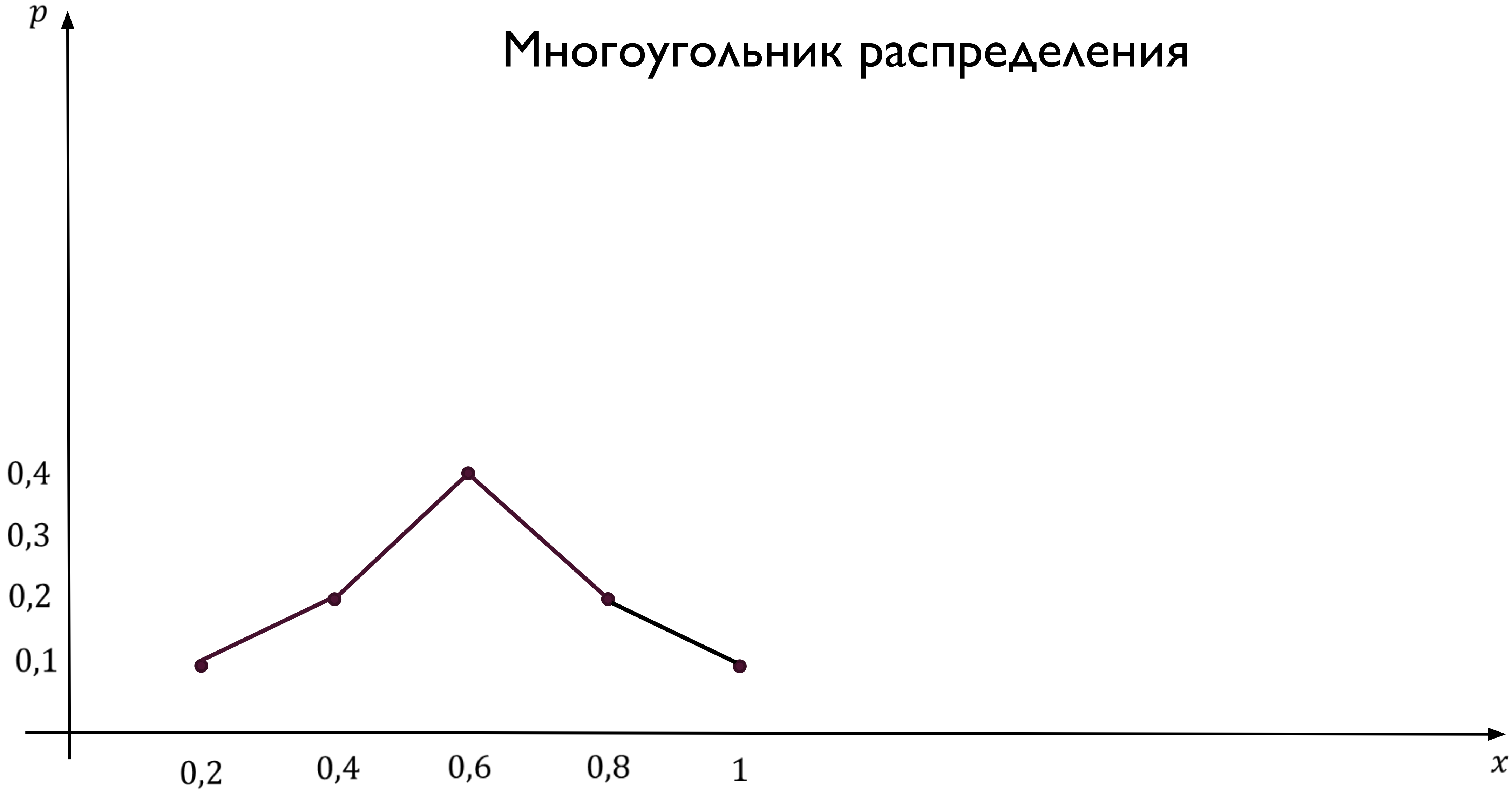
Чему равна вероятность $\boldsymbol{P(X = 0,8) = p_4}$? Построить многоугольник распределения.

- ***Решение.*** Так как должно выполняться равенство $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$,

  то $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

Многоугольник распределения



ПРИМЕР 3

- ***Дискретная случайная величина X имеет закон распределения***

Найти вероятности $P(X=3)=p_1$ и $P(X=5)=p_3$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

- ***Решение.*** Так как $p_2+p_4+p_5=0{,}15+0{,}25+0{,}35=0{,}75$, то $p_1+p_3=1-0{,}75=0{,}25$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} p_1+p_3=0{,}25, \\ p_3=4p_1; \end{cases} \begin{cases} p_1+4p_1=0{,}25, \\ p_3=4p_1; \end{cases} \begin{cases} 5p_1=0{,}25, \\ p_3=4p_1; \end{cases} \begin{cases} p_1=0{,}05, \\ p_3=4\cdot 0{,}05; \end{cases} \begin{cases} p_1=0{,}05, \\ p_4=0{,}20. \end{cases}$

Ответ: $p_1=0{,}05;\ p_2=0{,}20.$

ПРИМЕР 4

- ***Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X- выпадения гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины X.***

- ***Решение.*** В данном опыте 4 равновозможных элементарных исхода: (Г;Г), (Г;Ц), (Ц;Г), (Ц;Ц). Запись (Г;Ц) означает, что на первой монете выпал герб, на второй – цифра; аналогичный смысл имеют остальные записи. Герб может выпасть 1 раз, 2раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $\boldsymbol{x_1 = 0}$; $\boldsymbol{x_2 = 1}$; $\boldsymbol{x_3 = 2}$. Найдем вероятности этих значений: $\boldsymbol{P(x=0) = \frac{1}{4} = 0,25}$; $\boldsymbol{P(X=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5}$; $\boldsymbol{P(X=2) = \frac{1}{4} = 0,25}$; причем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

- Закон распределения данной случайной величины можно задать таблицей:

ПРИМЕР 5

- ***Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – суммы выпавших очков на двух игральных кубиках.***
- ***Решение.*** Равновозможные исходы в этом испытании:

Всего 36 равновозможных исходов.

Случайная величина X может принимать целые значения от 2 до 12.

Значения случайной величины	Количество раз, которое случайная величина может принимать это значение

Вычислим вероятности этих значений:

$$P(X=2)=p_1=\frac{1}{36};\ \ P(X=3)=p_2=\frac{2}{36}=\frac{1}{18};\ \ P(X=4)=p_3=\frac{3}{36}=\frac{1}{12};\ \ P(X=5)=p_4=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

$$P(X=6)=p_5=\frac{5}{36};\ P(X=7)=p_6=\frac{6}{36}=\frac{1}{6};\ \ P(X=8)=p_7=\frac{5}{36};\ \ P(X=9)=p_8=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

$$P(X=10)=p_9=\frac{3}{36}=\frac{1}{12};\ \ P(X=11)=p_{10}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18};\ \ P(X=12)=p_{11}=\frac{1}{36}.$$

Следовательно, закон распределения данной случайной величины X можно задать таблицей:

		3									

Отметим, что $\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=1.$

ПРИМЕР 6

- ***В коробке 7 карандашей из которых 4 красные. Из этой коробки извлекают наудачу 3 карандаша. Найти закон распределения случайной величины X равной числу красных карандашей в выборке.***
- ***Решение.*** Рассмотрим некоторое множество элементов объёма N. Это могут быть изделия , каждое из которых является   годным или бракованным, или семена, каждое из которых может быть всхожим или нет. Подобного рода ситуации описываются урновой схемой: в урне имеется N шаров, из них M голубых, $(N-M)$ красных.
-

Из урны, содержащей N шаров, в которой находится М голубых шаров, извлекается n шаров. Требуется определить вероятность того, что в выборке объёма n будет обнаружено m голубых шаров. Обозначим через A событие « в выборке объёма n имеется m голубых шаров», тогда

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = P_{M,N}(m,n).$$

В выборке из трех карандашей может не оказаться ни одного красного карандаша, может появиться один, два, три карандаша. Следовательно, случайная величина X может принимать только четыре значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$.

Найдем вероятности этих значений. $N = 7, M = 4, n = 3, m = 0$:

$$x_1 = 0, P(X = 0) = p_1 = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1 \cdot \frac{3!}{3! \cdot 0!}}{\frac{7!}{3! \cdot (7-3)!}} = \frac{1}{35};$$

$$x_2 = 1, P(X = 1) = p_2 = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{\frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{35} = \frac{4 \cdot 3}{35} = \frac{12}{35};$$

$$x_3 = 2, P(X = 2) = p_3 = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!}}{35} = \frac{6 \cdot 3}{35} = \frac{18}{35};$$

$$x_4 = 3, P(X = 3) = p_4 = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{\frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 1}{35} = \frac{4}{35}.$$

Следовательно, данная случайная величина X имеет закон распределения:

$$\frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Задает ли закон распределения дискретной случайной величины каждая из следующих таблиц:

а)

б)

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

Чему равна вероятность $\mathrm{P}(X = 0{,}6) = p_4$? Постройте многоугольник распределения.

3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

Найти вероятность $P(X = 1) = p_1$ и $P(X = 5) = p_5$, если известно, что p_5 в два раза больше p_1.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

4. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число цифр на обеих верхних сторонах монет. Запишите закон распределения случайной величины X-число выпадения цифры на обеих монетах.

5. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекают 3 шара. Найдите

- закон распределения дискретной случайной величины X – число голубых шаров в выборке.

6. Подбрасываются три игральных кубика, подсчитывается число очков на верхних гранях кубиков. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной сумме очков, выпавших на трёх кубиках.