



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, ЗАКОН ЕЁ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

- Данная методическая работа создана для студентов 25а, 25б групп, обучающихся по специальности 51.02.02 Социально-культурная деятельность (по видам), 26 группы, обучающихся по специальности 51.02.03 Библиотекосведение.
- В методической работе «Элементы теории вероятностей: дискретная случайная величина, закон её распределения» введены основные понятия и определения ; приведены примеры решения задач, предложены задачи для самопроверки.
- Методическая работа находится в свободном доступе на сайте социальной сети преподавателя и на сайте «Ивановского колледжа культуры».
- Методическая работа может быть использована как для аудиторных занятий, так и для внеаудиторной самостоятельной работы.

ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

- *Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исходов испытания принимает значения, зависящие от случая.
- Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется **дискретной случайной величиной**.
- Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется **непрерывной случайной величиной**.
- Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z, \dots , а их значения – строчными буквами с индексами, например x_1, x_2, \dots .

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

- **Законом распределения дискретной случайной величины** называется соответствие между значениями x_1, x_2, x_3, \dots этой величины и вероятностями p_1, p_2, p_3, \dots .
- Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически (то есть с помощью формул).
- Если дискретная случайная величина X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, то её закон распределения определяется формулами $P(X = x_k) = p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. **Читается:** вероятность события, состоящего в том, что случайная величина X приняла значение x_k , а p_k - вероятности с которыми X принимает эти значения.

■

- Закон можно записать и таблицей:

				...	
				...	

- В этой таблице сумма вероятностей также равна единице $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.
- События $(X = x_k, k = 1, 2, \dots, n)$ образуют полную группу событий, поэтому выполняется равенство $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

ПРИМЕР I

- *Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?*

а)

Решение.

а) $0,1 + 0,4 + 0,3 + 0,2 = 1.$

Ответ: таблица задает закон распределения дискретной случайной величины.

б)

б) $0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,5 = 1,1.$

Ответ: так как $1,1 \neq 1$, то таблица не задает закон распределения дискретной случайной величины.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной декартовой системе координат строят точки (x_k, p_k) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется **многоугольником распределения** случайной величины X .

ПРИМЕР 2

- *Дискретная случайная величина X имеет закон распределения*

				p_4	

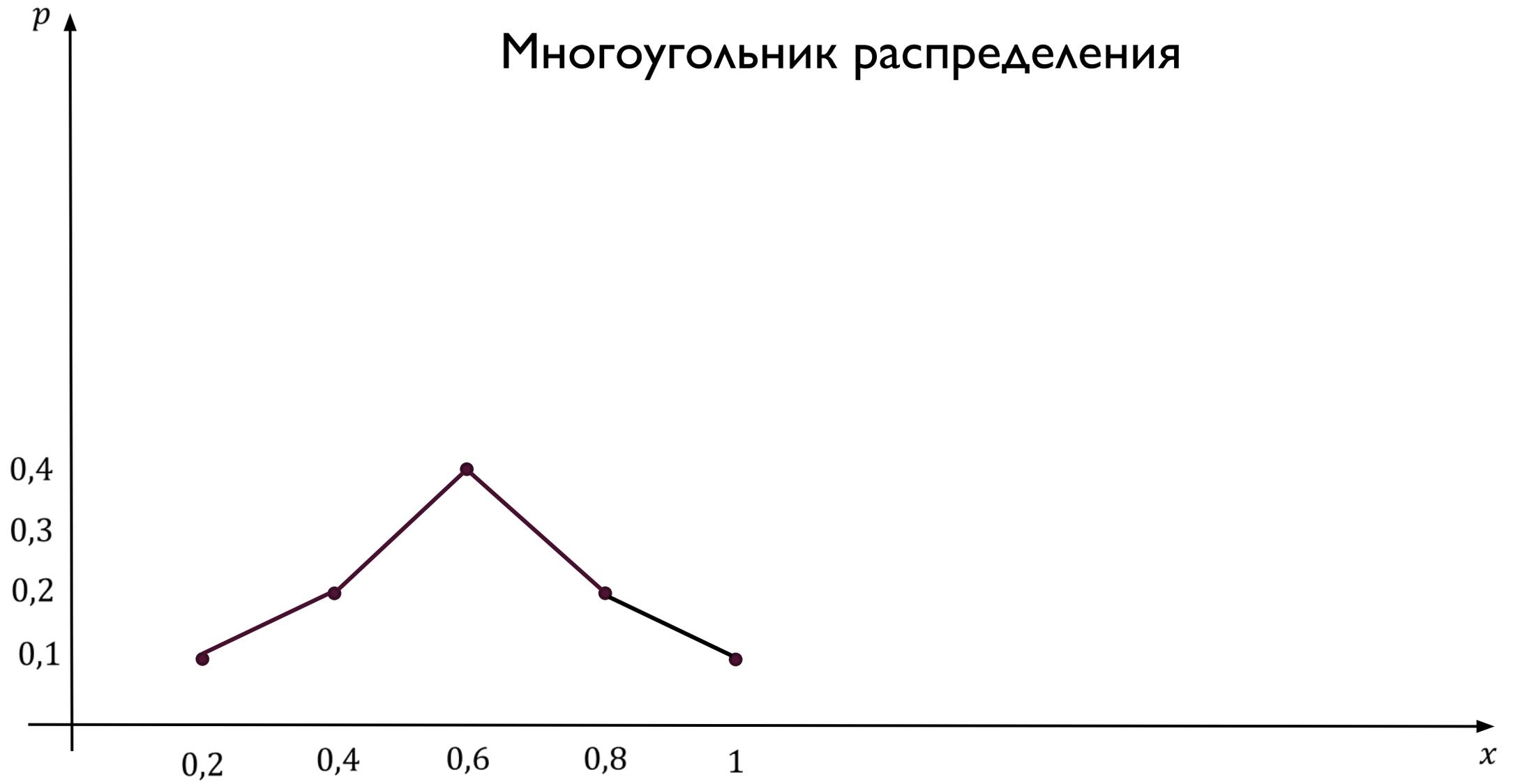
Чему равна вероятность $P(X = 0,8) = p_4$? Построить многоугольник распределения.

Решение. Так как должно выполняться равенство $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$,

$$\text{то } p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,1) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

Многоугольник распределения



ПРИМЕР 3

- *Дискретная случайная величина X имеет закон распределения*

Найти вероятности $P(X = 3) = p_1$ и $P(X = 5) = p_3$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1 .

■ **Решение.** Так как $p_2 + p_4 + p_5 = 0,15 + 0,25 + 0,35 = 0,75$, то $p_1 + p_3 = 1 - 0,75 = 0,25$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} p_1 + p_3 = 0,25, \\ p_3 = 4p_1; \end{cases} \begin{cases} p_1 + 4p_1 = 0,25, \\ p_3 = 4p_1; \end{cases} \begin{cases} 5p_1 = 0,25, \\ p_3 = 4p_1; \end{cases} \begin{cases} p_1 = 0,05, \\ p_3 = 4 \cdot 0,05; \end{cases} \begin{cases} p_1 = 0,05, \\ p_4 = 0,20. \end{cases}$

Ответ: $p_1 = 0,05$; $p_2 = 0,20$.

ПРИМЕР 4

- *Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X - выпадения гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины X .*
- *Решение.* В данном опыте 4 равновозможных элементарных исхода: (Г;Г), (Г;Ц), (Ц;Г), (Ц;Ц). Запись (Г;Ц) означает, что на первой монете выпал герб, на второй – цифра; аналогичный смысл имеют остальные записи. Герб может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X
- может принимать только три значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Найдем вероятности этих значений:
 $P(x = 0) = \frac{1}{4} = 0,25$; $P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$; $P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0,25$; причем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
- Закон распределения данной случайной величины можно задать таблицей:

ПРИМЕР 5

- *Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – суммы выпавших очков на двух игральных кубиках.*
- *Решение.* Равновозможные исходы в этом испытании:

Всего 36 равновозможных исходов.

Случайная величина X может принимать целые значения от 2 до 12.

Значения случайной величины	Количество раз, которое случайная величина может принимать это значение

Вычислим вероятности этих значений:

$$P(X = 2) = p_1 = \frac{1}{36}; \quad P(X = 3) = p_2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}; \quad P(X = 4) = p_3 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}; \quad P(X = 5) = p_4 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9};$$
$$P(X = 6) = p_5 = \frac{5}{36}; \quad P(X = 7) = p_6 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; \quad P(X = 8) = p_7 = \frac{5}{36}; \quad P(X = 9) = p_8 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9};$$
$$P(X = 10) = p_9 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}; \quad P(X = 11) = p_{10} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}; \quad P(X = 12) = p_{11} = \frac{1}{36}.$$

Следовательно, закон распределения данной случайной величины X можно задать таблицей:

		3									

Отметим, что $\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = 1$.

ПРИМЕР 6

- *В коробке 7 карандашей из которых 4 красные. Из этой коробки извлекают наудачу 3 карандаша. Найти закон распределения случайной величины X равной числу красных карандашей в выборке.*
- *Решение.* Рассмотрим некоторое множество элементов объёма N . Это могут быть изделия, каждое из которых является годным или бракованным, или семена, каждое из которых может быть всхожим или нет. Подобного рода ситуации описываются урновой схемой: в урне имеется N шаров, из них M голубых, $(N - M)$ красных.

Из урны, содержащей N шаров, в которой находится M голубых шаров, извлекается n шаров. Требуется определить вероятность того, что в выборке объёма n будет обнаружено m голубых шаров. Обозначим через A событие «в выборке объёма n имеется m голубых шаров», тогда

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = P_{M,N}(m, n).$$

В выборке из трех карандашей может не оказаться ни одного красного карандаша, может появиться один, два, три карандаша. Следовательно, случайная величина X может принимать только четыре значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$.

Найдем вероятности этих значений. $N = 7, M = 4, n = 3, m = 0$:

$$x_1 = 0, P(X = 0) = p_1 = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1 \cdot \frac{3!}{3! \cdot 0!}}{\frac{7!}{3! \cdot (7-3)!}} = \frac{1}{35};$$

$$x_2 = 1, P(X = 1) = p_2 = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{\frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{35} = \frac{4 \cdot 3}{35} = \frac{12}{35};$$

$$x_3 = 2, P(X = 2) = p_3 = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!}}{35} = \frac{6 \cdot 3}{35} = \frac{18}{35};$$

$$x_4 = 3, P(X = 3) = p_4 = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{\frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 1}{35} = \frac{4}{35}.$$

Следовательно, данная случайная величина X имеет закон распределения:

$$\frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Задаёт ли закон распределения дискретной случайной величины каждая из следующих таблиц:

а)

б)

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

Чему равна вероятность $P(X = 0,6) = p_4$? Постройте многоугольник распределения.

3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

Найти вероятность $P(X = 1) = p_1$ и $P(X = 5) = p_5$, если известно, что p_5 в два раза больше p_1 .

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

4. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число цифр на обеих верхних сторонах монет. Запишите закон распределения случайной величины X - число выпадения цифры на обеих монетах.
5. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекают 3 шара. Найдите
 - закон распределения дискретной случайной величины X – число голубых шаров в выборке.
6. Подбрасываются три игральных кубика, подсчитывается число очков на верхних гранях кубиков. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной сумме очков, выпавших на трёх кубиках.