

Кривые второго порядка

- *Кривой второго порядка* называется линия, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль. При $A = B = C = 0$ уравнение задаёт прямую, которая называется *линией первого порядка*.

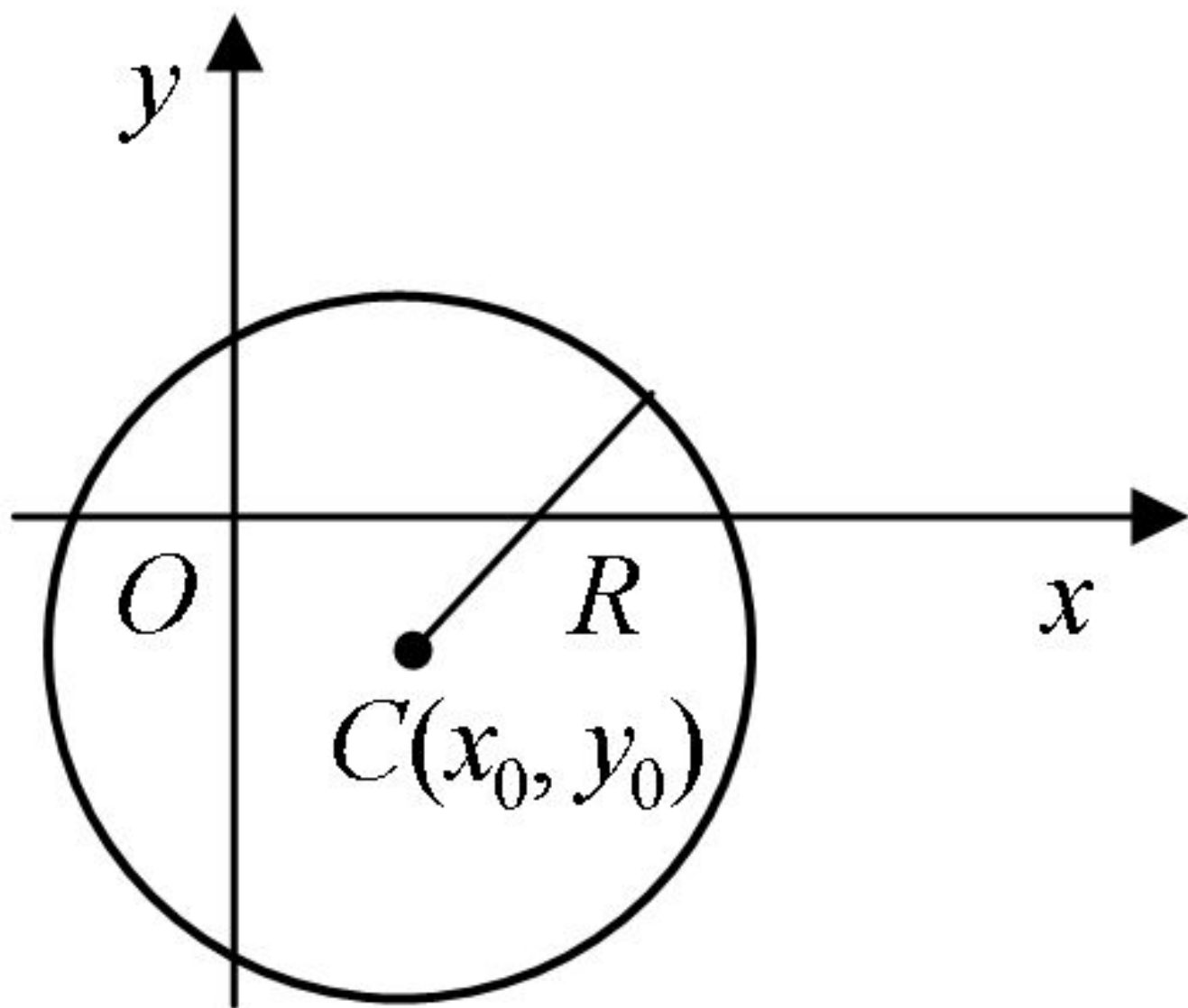
- К числу линий второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

- **Окружностью** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).
- Если центр окружности поместить в начало координат, то *каноническое уравнение окружности* радиусом R имеет вид
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

- Если центр окружности находится в точке $C(x_0, y_0)$, то ее уравнение записывается в виде

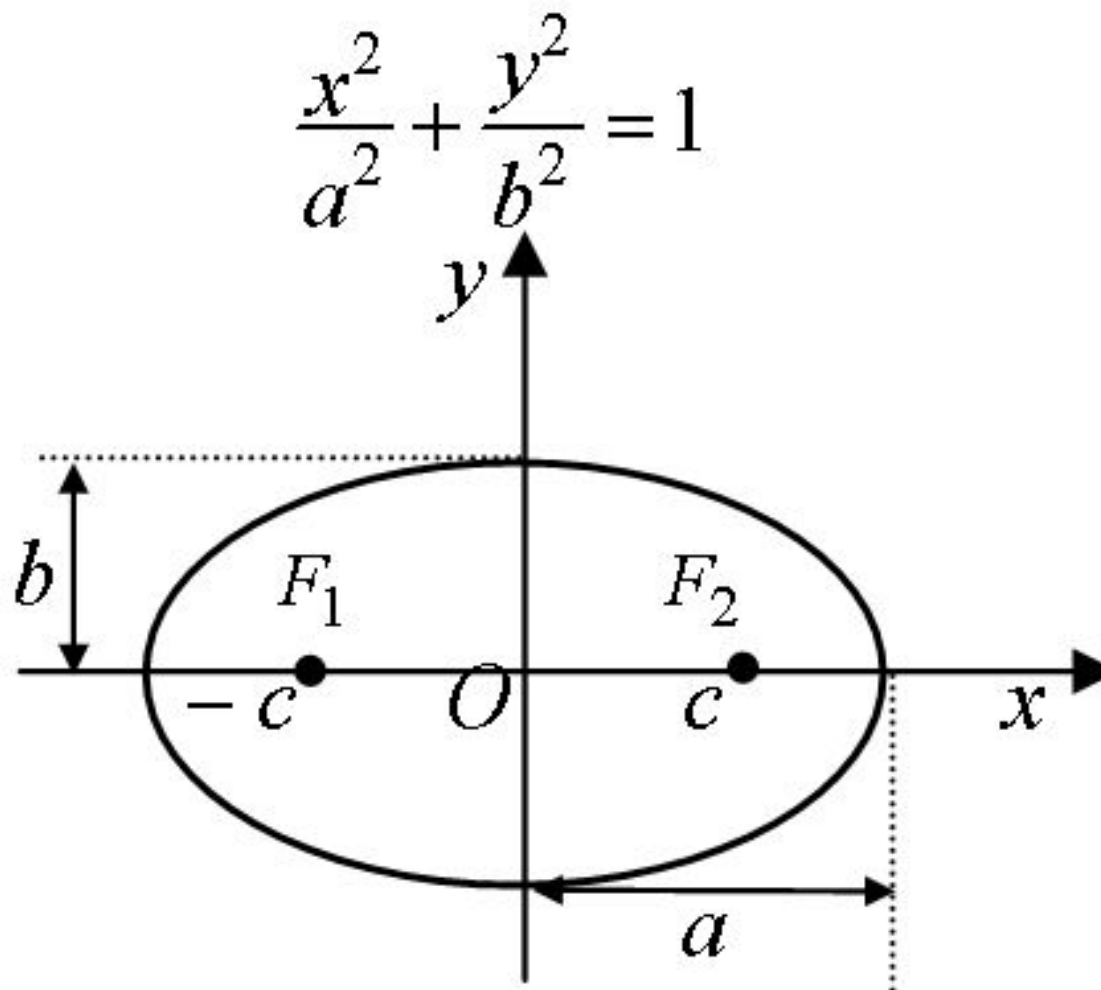
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



- Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2 , расстояние между которыми равно $2c$, и задано число $a > c$.

- **Эллипсом** называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$.



a - большая полуось

b - малая полуось

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы

$$c^2 = a^2 - b^2$$

- Если систему координат выбрать так, как указано на рис., то *каноническое уравнение эллипса* запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

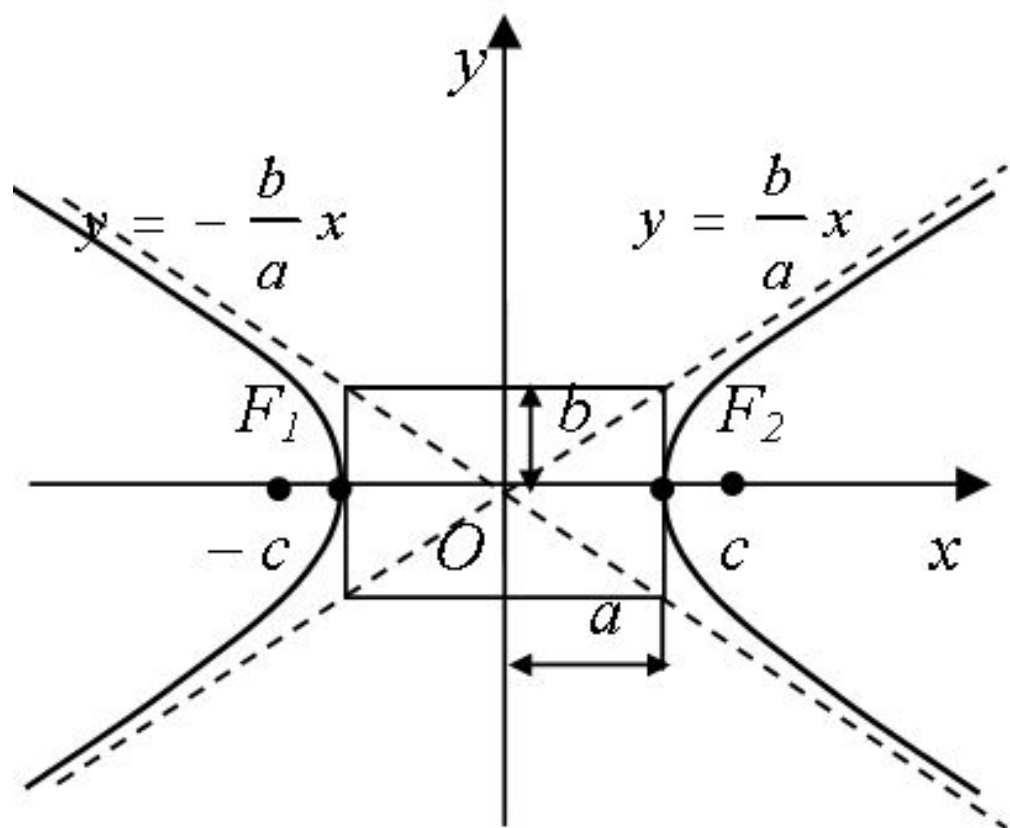
где $b^2 = a^2 - c^2$, a – *большая*, b – *малая полуоси эллипса* (при $a > b$).

- Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.
- Окружность есть частный случай эллипса при $a = b$.

- Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2 , расстояние между которыми равно $2c$, и задано число $a < c$.

- **Гиперболой** называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



a - действительная полуось

b - мнимая полуось

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- Если систему координат выбрать так, как указано на рис., то *каноническое уравнение гиперболы* запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- где $b^2 = c^2 - a^2$,
- a – действительная, b – мнимая полуоси гиперболы.

- Гипербола состоит из двух *ветвей* и расположена симметрично относительно координатных осей. При этом ее ветви при удалении в бесконечность как угодно *близко* подходят к прямым $y = \pm \frac{b}{a} x$, которые называются *асимптотами гиперболы*.

- При построении гиперболы вначале строят *основной прямоугольник* со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$. Затем через противоположные вершины этого прямоугольника проводят прямые, которые являются асимптотами гиперболы.

- *Вершины гиперболы* расположены в точках с координатами $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, а фокусы – в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

- Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{или} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$$

также задаёт гиперболу,

сопряжённую с гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

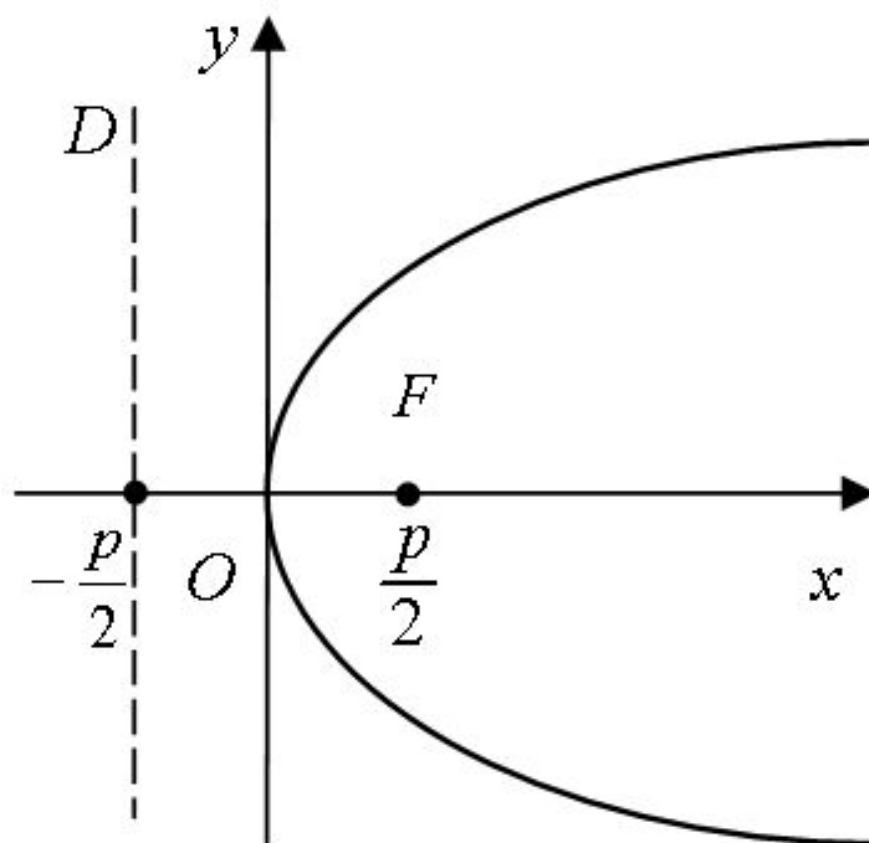
действительная и мнимая

полуоси этой гиперболы

соответственно равны b и a .

- Пусть на плоскости задана точка F и прямая D , расстояние между которыми равно p .
- **Параболой** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (фокуса) и данной прямой D (директрисы).

$$y^2 = 2px \quad (p > 0)$$



$D : x = -\frac{p}{2}$ - директриса

$F(\frac{p}{2}, 0)$ - фокус

- Если систему координат выбрать так, как указано на рис., то *каноническое уравнение параболы* запишется в виде

$$y^2 = 2px.$$

- Эта парабола симметрична относительно оси Ox .

Директрисой является прямая

$$x = -\frac{p}{2},$$

точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус
параболы, p – параметр
параболы.

- Если $p < 0$, то парабола направлена в противоположную сторону.
- Уравнение $x^2 = 2py$ задаёт параболу, симметричную относительно оси Oy .

- Для того, чтобы построить кривую второго порядка, заданную общим уравнением, уравнение кривой приводят к каноническому виду и переходят к новой системе координат.

- **Пример.** Определить тип линии и схематически построить её:

$$9x^2 - 25y^2 - 36x + 150y - 414 = 0$$

- **Решение.** Приведем заданное уравнение к каноническому виду. Для этого в исходном уравнении выделим полные квадраты по переменным x и y . Перепишем исходное уравнение в виде:

$$9x^2 - 36x - 25y^2 + 150y - 414 = 0,$$

$$9(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 6y) - 414 = 0,$$

$$9(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2) -$$
$$- 25(y^2 - 2 \cdot 3y + 3^2 - 3^2) - 414 = 0,$$

$$9[(x - 2)^2 - 4] -$$
$$- 25[(y - 3)^2 - 9] - 414 = 0,$$

$$9(x-2)^2 - 36 - 25(y-3)^2 + 225 - 414 = 0,$$

$$9(x-2)^2 - 25(y-3)^2 = 225,$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

- Совершим параллельный перенос координатных осей по формулам:
$$\begin{cases} X = x - 2, \\ Y = y - 3. \end{cases}$$

$(2, 3)$ – координаты центра O_1 системы координат X и Y . В этой системе координат уравнение

принимает вид:
$$\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{9} = 1$$

- Получили каноническое уравнение гиперболы (действительная полуось $a = 5$, мнимая полуось $b = 3$)

