Кривые второго порядка

- *Кривой второго порядка* называется линия, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль. При $A = B = C = 0$ уравнение задаёт прямую, которая называется *линией первого порядка.*

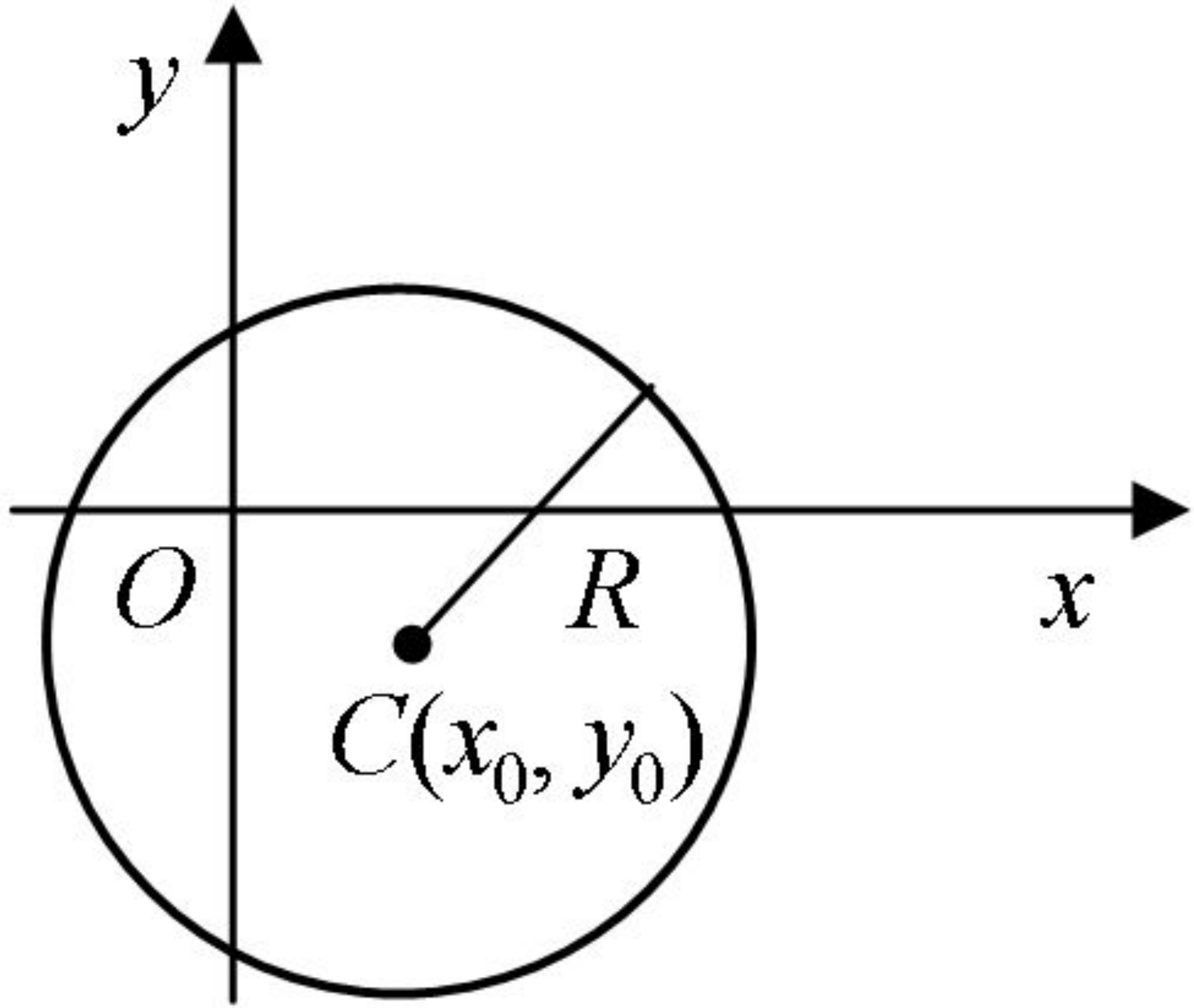
- К числу линий второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

- **Окружностью** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).
- Если центр окружности поместить в начало координат, то *каноническое уравнение окружности* радиусом R имеет вид $$x^2 + y^2 = R^2.$$

- Если центр окружности находится в точке $C(x_0, y_0)$, то ее уравнение записывается в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

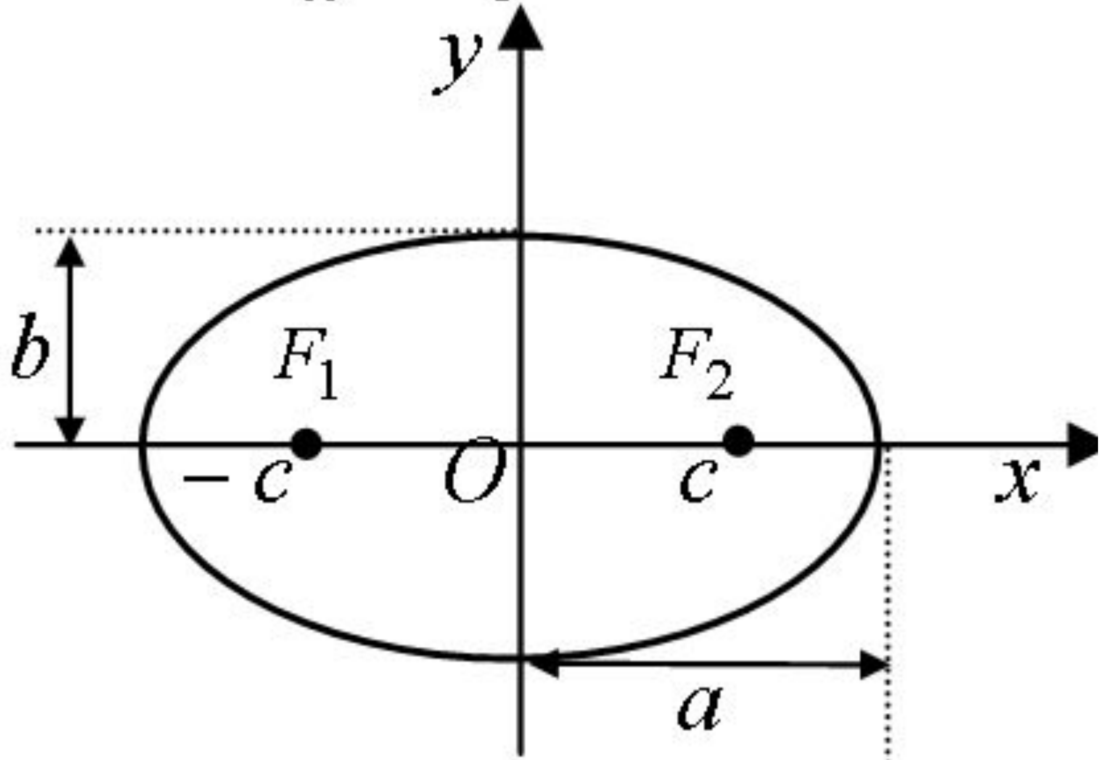
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$



- Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, и задано число $a > c$.

- **Эллипсом** называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная *2a.*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



a - большая полуось

b - малая полуось

$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - фокусы

$c^2=a^2-b^2$

- Если систему координат выбрать так, как указано на рис., то *каноническое уравнение эллипса* запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$, a *– большая, b – малая полуоси* эллипса (при *a>b*).

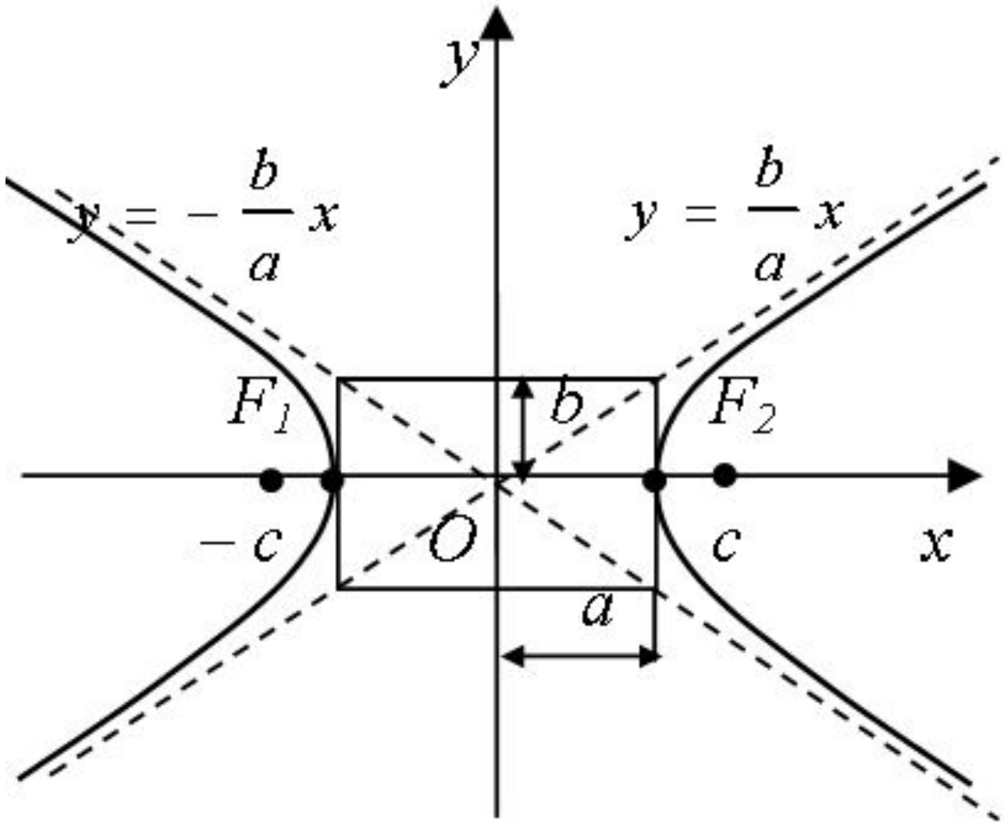
- Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$.

- Окружность есть частный случай эллипса при $a = b$.

- Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, и задано число $a < c$.

- **Гиперболой** называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



a - действительная полуось

b - мнимая полуось

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы

$c^2 = a^2 + b^2$

- Если систему координат выбрать так, как указано на рис., то *каноническое уравнение гиперболы* запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- где $b^2 = c^2 - a^2,$
- *a – действительная, b – мнимая полуоси* гиперболы.

- Гипербола состоит из двух *ветвей* и расположена симметрично относительно координатных осей. При этом ее ветви при удалении в бесконечность как угодно близко подходят к прямым $y = \pm \frac{b}{a} x$, которые называются *асимптотами гиперболы*.

- При построении гиперболы вначале строят *основной прямоугольник* со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$. Затем через противоположные вершины этого прямоугольника проводят прямые, которые являются асимптотами гиперболы.

- *Вершины гиперболы* расположены в точках с координатами (– a,0) и (a,0), а фокусы – в точках F_1(-c; 0) и F_2(c; 0).

- Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$ (или $$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$)

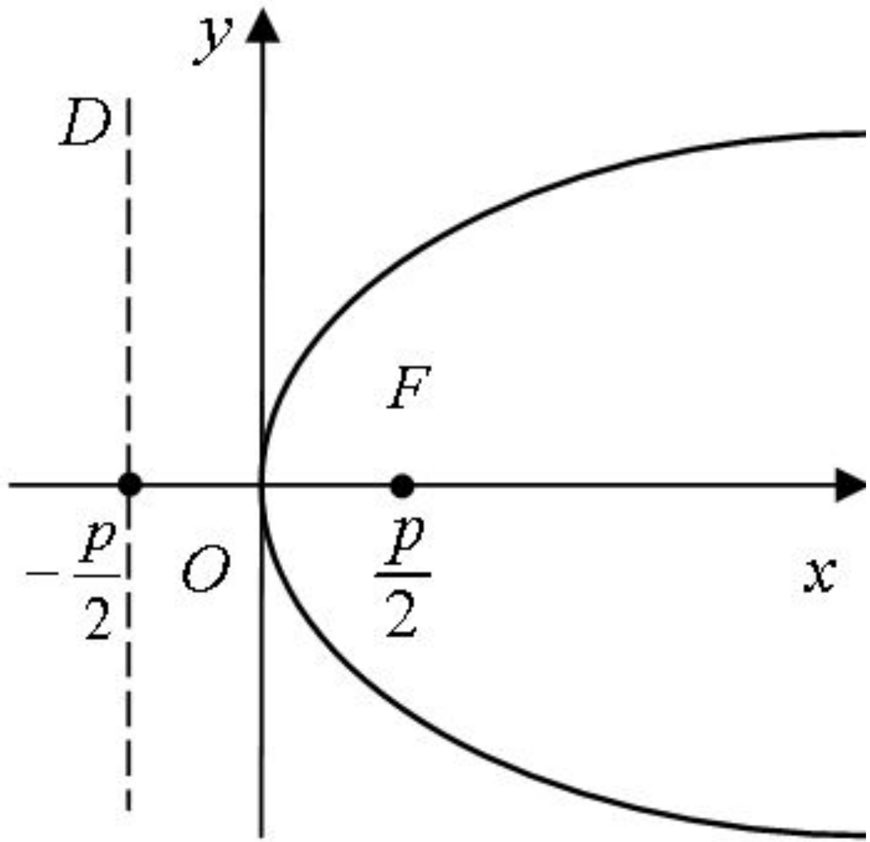
также задаёт гиперболу, *сопряженную* с гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Действительная и мнимая полуоси этой гиперболы соответственно равны *b* и *a.*

- Пусть на плоскости задана точка *F* и прямая *D*, расстояние между которыми равно *p.*
- **Параболой** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки *F* (фокуса) и данной прямой *D* (директрисы).

$$y^2 = 2px\,(p > 0)$$



$D: x = -\frac{p}{2}$ - директриса

$F(\frac{p}{2},0)$ - фокус

- Если систему координат выбрать так, как указано на рис., то *каноническое уравнение параболы* запишется в виде

$$y^2 = 2px.$$

- Эта парабола симметрична относительно оси *Ox.* Директрисой является прямая $x = -\frac{p}{2}$, точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус параболы, *p – параметр параболы.*

- Если $p < 0$, то парабола направлена в противоположную сторону.

- Уравнение $x^2 = 2py$ задаёт параболу, симметричную относительно оси Oy.

- Для того, чтобы построить кривую второго порядка, заданную общим уравнением, уравнение кривой приводят к каноническому виду и переходят к новой системе координат.

- **Пример.** Определить тип линии и схематически построить её:

$$9x^2 - 25y^2 - 36x + 150y - 414 = 0$$

- **Решение.** Приведем заданное уравнение к каноническому виду. Для этого в исходном уравнении выделим полные квадраты по переменным x и y. Перепишем исходное уравнение в виде:

$$9x^2 - 36x - 25y^2 + 150y - 414 = 0,$$

$$9(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 6y) - 414 = 0,$$

$$9(x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2)-$$

$$-25(y^2-2\cdot 3y+3^2-3^2)-414=0,$$

$$9[(x-2)^2-4]-$$

$$-25[(y-3)^2-9]-414=0,$$

$$9(x-2)^2-36-$$

$$-25(y-3)^2+225-414=0,$$

$$9(x-2)^2-25(y-3)^2=225,$$

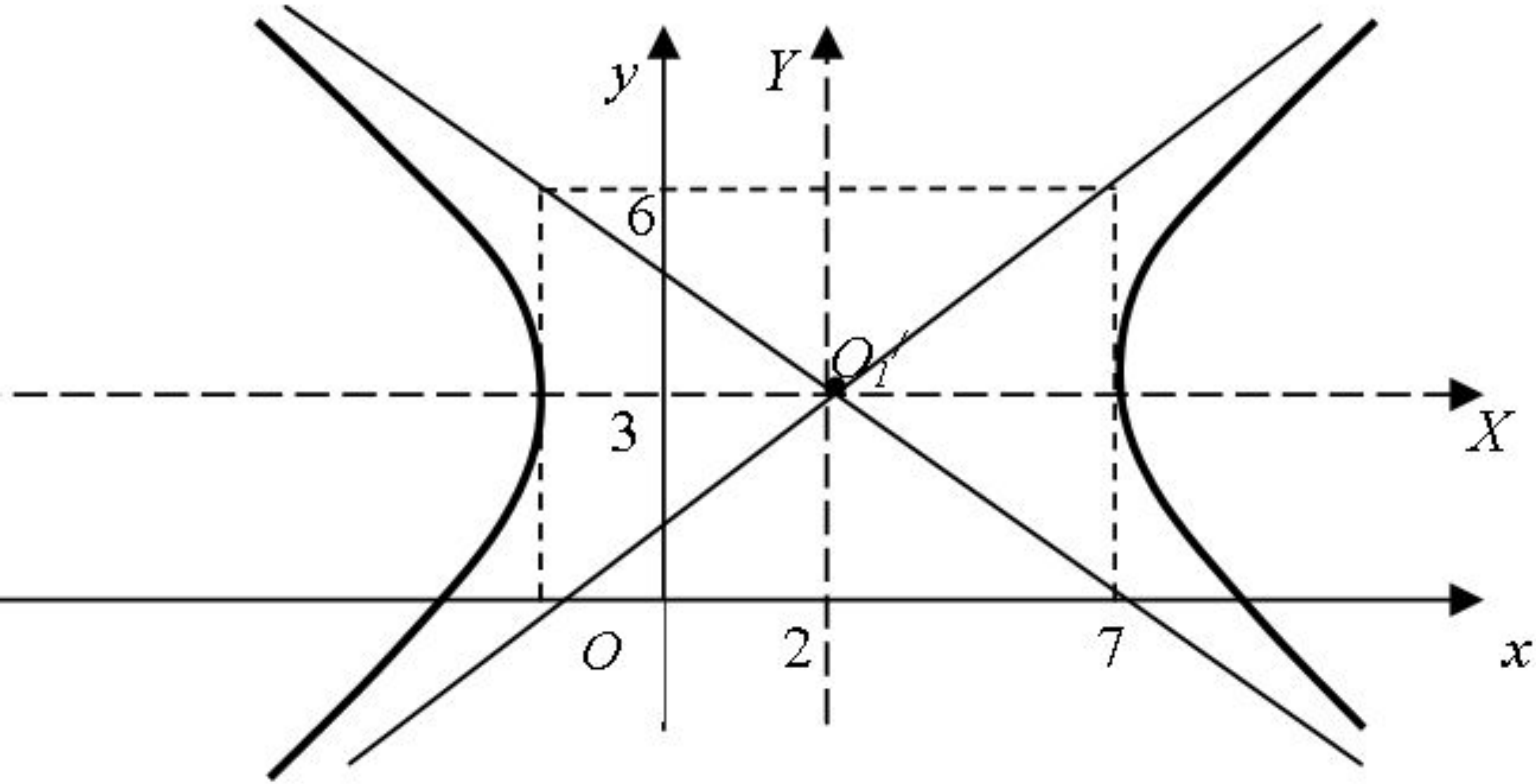
$$\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-3)^2}{9}=1.$$

- Совершим параллельный перенос координатных осей по формулам: $$\begin{cases} X = x - 2, \\ Y = y - 3. \end{cases}$$

(2, 3) – координаты центра O_1 системы координат X и Y. В этой системе координат уравнение принимает вид:

$$\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{9} = 1$$

- Получили каноническое уравнение гиперболы (действительная полуось $a = 5$, мнимая полуось $b = 3$)



y
Y
6
O'
3
X
O
2
7
x