ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Теория вероятностей и математическая статистика
лектор Макеева О.В.

Лекция 2

Теоремы о вероятностях сложных событий

1. Теоремы сложения вероятностей
2. Теоремы умножения вероятностей
3. Формула полной вероятности
4. Теорема гипотез (формула Байеса)

Пролог

На практике обычно требуется определить вероятности событий непосредственное экспериментальное воспроизведение которых затруднительно. Например, оценить вероятность исхода боя для *проектируемых* образцов техники, чтобы выявить наиболее рациональные конструктивные параметры элементов техники. Поэтому, как правило, используют не непосредственные прямые методы вычисления вероятностей, а косвенные, позволяющие по вероятностям одних событий, определять вероятности других событий, с ними связанных.

Пролог

Применение косвенных методов в той или иной мере всегда сводится к применению ***основных теорем*** **теории вероятностей**: теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей. Оба эти положения являются теоремами и могут быть доказаны лишь для событий сводящихся к **схеме случаев**. Для остальных событий они принимаются аксиоматически как постулаты.

Утверждения теорем используют понятия: *сумма* событий и *произведение* событий, *независимые* события и *зависимые* события, *совместные* события и несовместные события (см. Лекция 1. Основные понятия теории вероятностей).

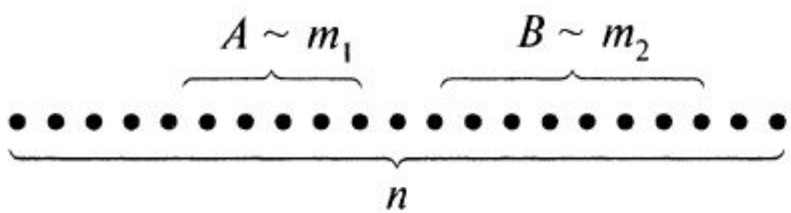
§1. Теорема сложения вероятностей

Теорема.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B), \text{ где } \quad A\cdot B=\varnothing$$

Доказательство.



$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

§1. Теорема сложения вероятностей

Замечание.

Теорему можно обобщить на случай любого конечного числа несовместных событий.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots\ P\left(A_n\right),$$

где $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

Пример 1

Имеется три склада боеприпасов.
Эксперимент: наугад сбрасывается одна бомба.
Событие A_i : бомба попала в склад i, где i=1, 2, 3.

$$P(A_1)=1\%,\ P(A_2)=0,8\%,\ P(A_3)=2,5\%.$$

Событие A: склады взорваны (что происходит при попадании бомбы в один из складов).

$$A = A_1 + A_2 + A_3;$$

A_1, A_2, A_3 несовместны $\Rightarrow$

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=$$

$$0,01+0,008+0,025=0,043=4,3\%$$

Ответ: 4,3%.

§1. Теорема сложения вероятностей

Следствие 1.

Если несовместные события образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+\dots\ P(A_n)=1,$$

где $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

Доказательство.

$A_1 + A_2 + \dots\ + A_n = \Omega$, где $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

$$P(A_1 + A_2 + \dots\ + A_n) = P(\Omega)$$

$$P(A_1)+P(A_2)+\dots\ P(A_n)=1$$

§1. Теорема сложения вероятностей

Следствие 2.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Доказательство.

$$A+\overline{A}=\Omega, \text{где} \quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$$

$$P(A+\overline{A})=P(\Omega)$$

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

§2. Теорема умножения вероятностей

Событие A называется **независимым** от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло ли событие B.

Событие A называется **зависимым** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Эксперимент – бросить две монеты.

Событие A – выпадет «герб» на 1-й монете.

Событие B – выпадет «герб» на 2-й монете.

A и B – независимые.

Эксперимент – последовательно вынуть два шара из урны с разноцветными шарами.

Событие C – 1-ый шар выпадет белым.

Событие D – 2-ой шар выпадет белым.

C и D – зависимые.

§2. Теорема умножения вероятностей

Вероятность события А, найденная при условии, что событие В произошло, называется **условной вероятностью** события А и обозначается $P_B(A)$.

Условие *независимости* события А от события В можно записать в виде

$$P(A)=P_B(A).$$

Условие *зависимости* события А от события В можно записать в виде

$$P(A)\neq P_B(A).$$

§2. Теорема умножения вероятностей

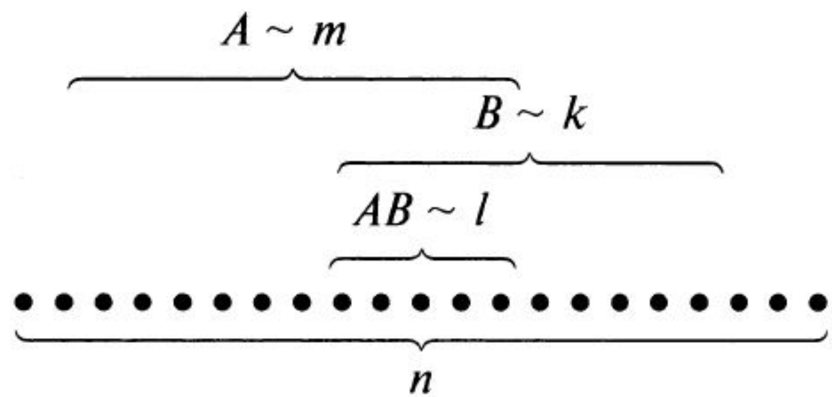
Теорема.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

§2. Теорема умножения вероятностей

Доказательство.



$$\left.\begin{aligned} P(A\cdot B) &= \frac{l}{n} \\ P(A) &= \frac{m}{n} \\ P_A(B) &= \frac{l}{m} \end{aligned}\right| \Rightarrow P(A\cdot B) = P(A)\cdot P_A(B)$$

§2. Теорема умножения вероятностей

Замечание.

Теорему можно обобщить на случай любого конечного числа событий.

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причём вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предшествующие события произошли.

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P_{A_1}\left(A_2\right) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}\left(A_n\right)$$

Пример 2

Всего в урне два белых и три чёрных шара.

Эксперимент: наугад последовательно извлекают из урны два шара.

Событие A_i : белый шар появится при i-м извлечении, где i=1, 2.

Событие A: появятся два белых шара.

$$A = A_1 \cdot A_2;$$

A_1, A_2 зависимы $\Rightarrow$

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) =$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Ответ: 0,1.

§2. Теорема умножения вероятностей

Следствие 1.

Если событие А не зависит от события В, то и событие В не зависит от события А, т.е. зависимость или независимость событий всегда взаимна.

Следствие 2.

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Замечание.

Теорему можно обобщить на случай любого конечного числа событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Пример 3

Эксперимент: монета наугад подбрасывается три раза.
Событие A_i : выпал «герб» при i-м броске, где i=1,2,3.

Событие A: хотя бы один раз выпала цифра.
Событие $\bar{A}$: цифра не выпала ни разу.

$$\overline{A} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3, \ A_1, A_2, A_3 \text{ независимы} \Rightarrow$$

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot P\left(A_3\right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

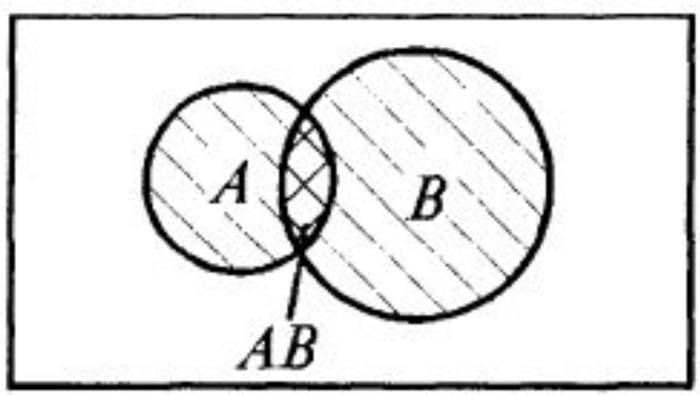
Ответ: 7/8.

§2. Теорема умножения вероятностей

Теорема.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$



§2. Теорема умножения вероятностей

Доказательство.

$$A+B=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B\Rightarrow$$

$$P(A+B)=P\left(A\cdot\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cdot B\right)+P(A\cdot B)$$

$$A=A\cdot\overline{B}+A\cdot B\ \Rightarrow P(A)=P\left(A\cdot\overline{B}\right)+P(A\cdot B)$$

$$B=A\cdot B+\overline{A}\cdot B\Rightarrow P(B)=P(A\cdot B)+P\left(\overline{A}\cdot B\right)$$

$$P(A+B)=\left[P(A)-P(A\cdot B)\right]+\left[P(B)-P(A\cdot B)\right]$$

$$+P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

§3. Формула полной вероятности

Следствием обеих основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей – является *формула полной вероятности*.

Пусть событие А наступает одновременно с одной из несовместных гипотез

$$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

образующих полную группу. Тогда вероятность события А равна сумме произведений вероятностей гипотез на вероятности события А при этих гипотезах:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$$

Пример 4

Имеется две винтовки с «оптикой» и три обычных винтовки. Вероятность попадания для винтовки с «оптикой» – 90%, для обычной винтовки – 70%.

Эксперимент: наугад выбирается винтовка, чтобы сделать выстрел.

Гипотеза H_1 : выбрана винтовка с «оптикой».
Гипотеза H_2 : выбрана обычная винтовка.

Событие A: выстрел поразил мишень.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 0,9 + \frac{3}{5} \cdot 0,7 = \frac{1,8 + 2,1}{5} = \frac{3,9}{5} = 0,78$$

Ответ: 0,78.

§4. Теорема гипотез (формула Байеса)

Следствием теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности является *теорема гипотез* или *формула Байеса*.

Пусть событие А наступает одновременно с одной из несовместных гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ **образующих полную группу. Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны**

$$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n).$$

Произведён опыт в результате которого наступило событие А. Переоценить вероятности гипотез после наступления события А можно по формуле

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Пример 4 (продолжение)

Имеется две винтовки с «оптикой» и три обычных винтовки. Вероятность попадания для винтовки с «оптикой» – 90%, для обычной винтовки – 70%.

Эксперимент: наугад выбирается винтовка, чтобы сделать выстрел.

Гипотеза *H1* : выбрана винтовка с «оптикой».
Гипотеза *H2* : выбрана обычная винтовка.

Событие *A*: выстрел поразил мишень – произошло. Какова вероятность того, что этот удачный выстрел был сделан из обычной винтовки?

$$P_A\left(H_2\right)=\frac{P\left(H_2\right)\cdot P_{H_2}\left(A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,6\cdot 0,7}{0,78}\approx 0,54$$

Ответ: 0,54.

Продолжение следует…