

# Скрещивающиеся

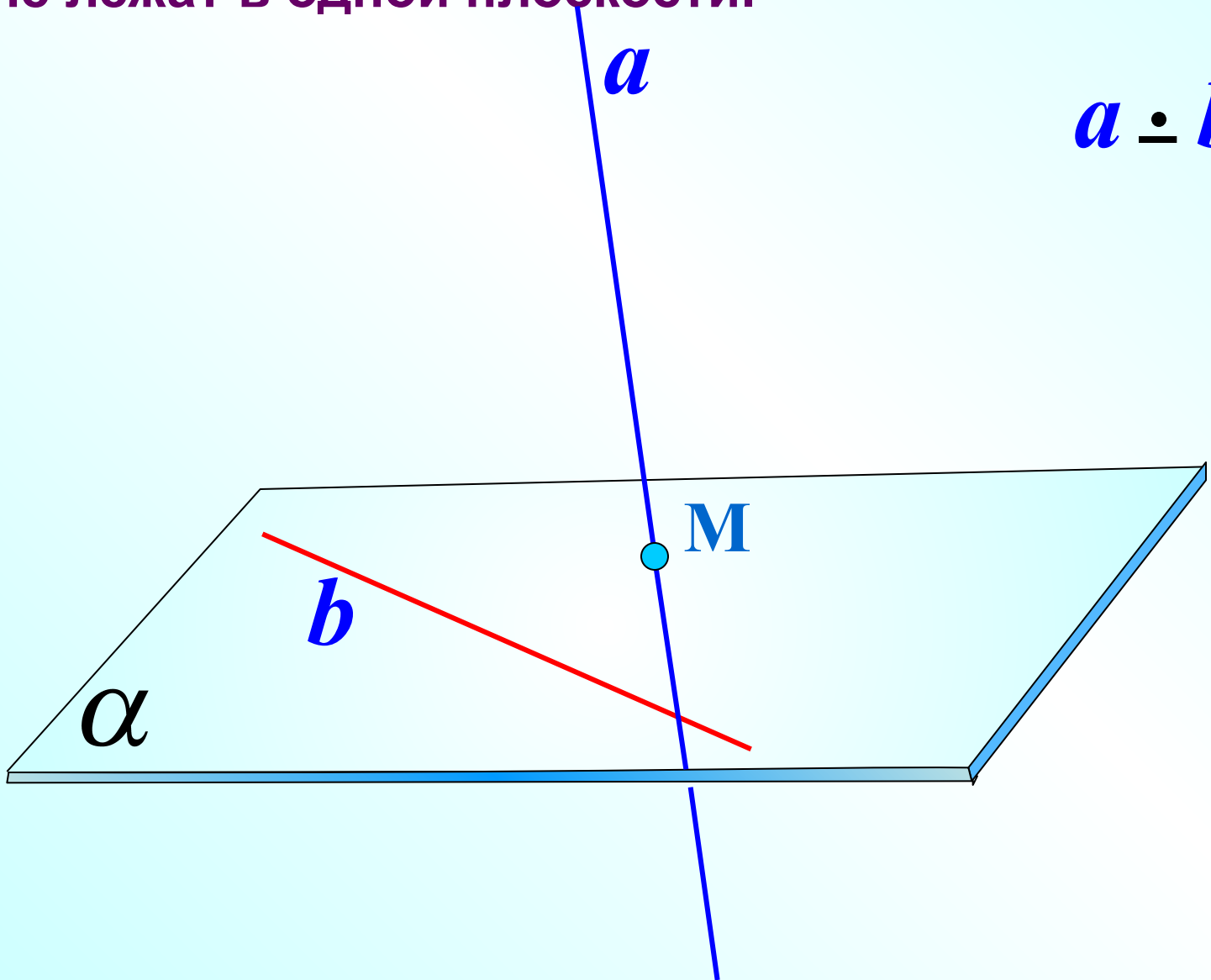
*Л.С. Атанасян Геометрия 10 класс*

*прямые*

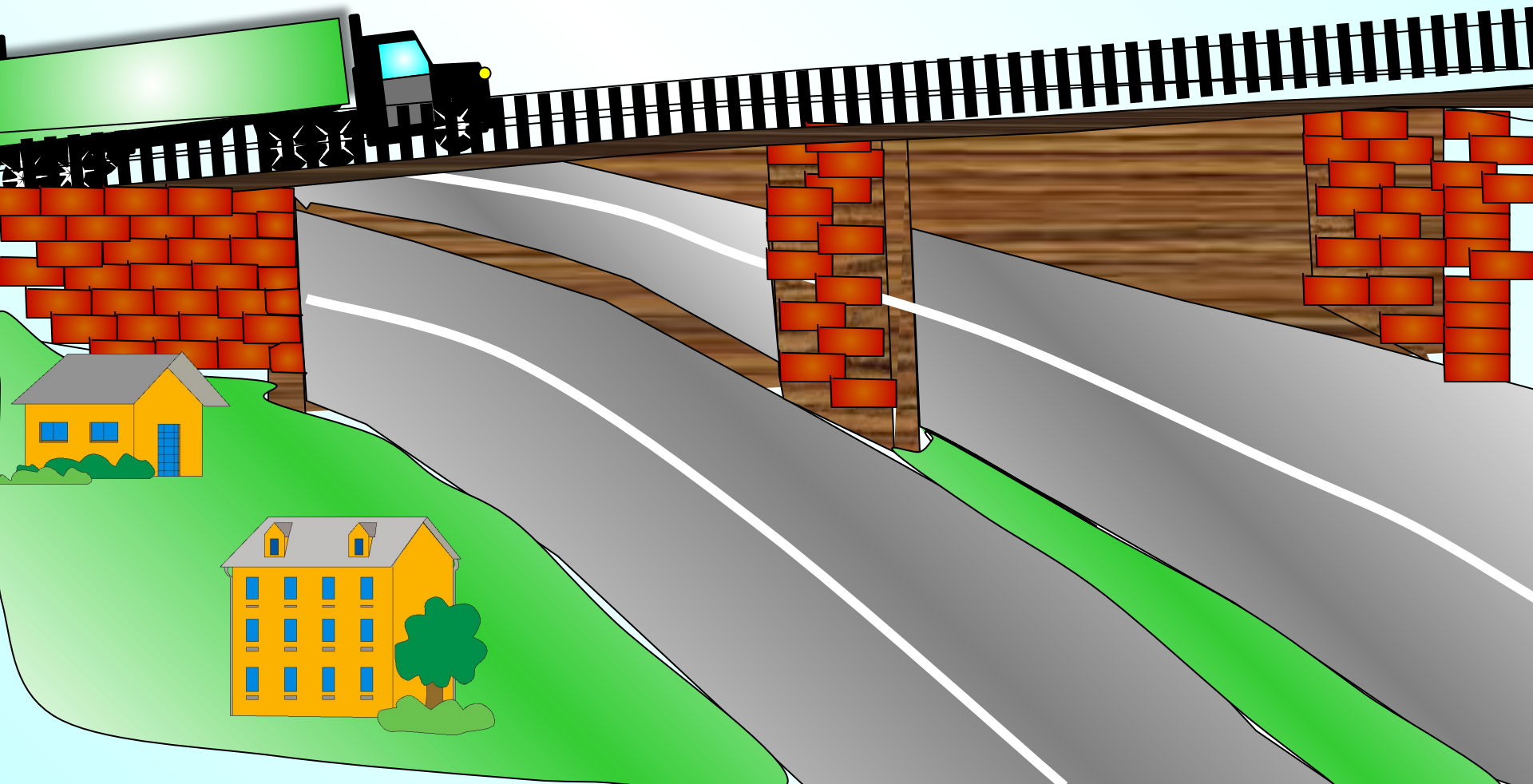
**Определение**

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

$a \neq b$



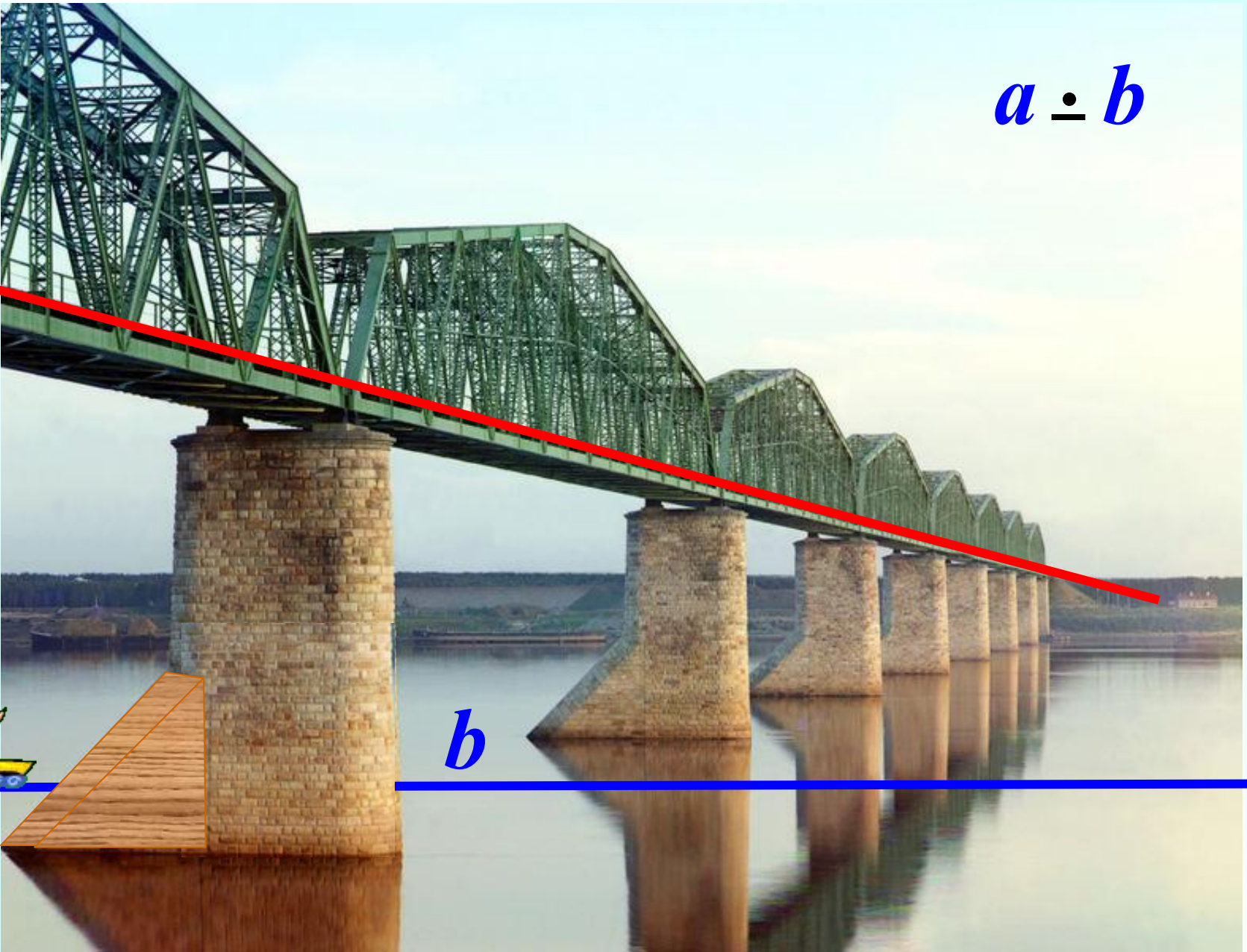
Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая под эстакадой.



$$a \div b$$

*a*

*b*



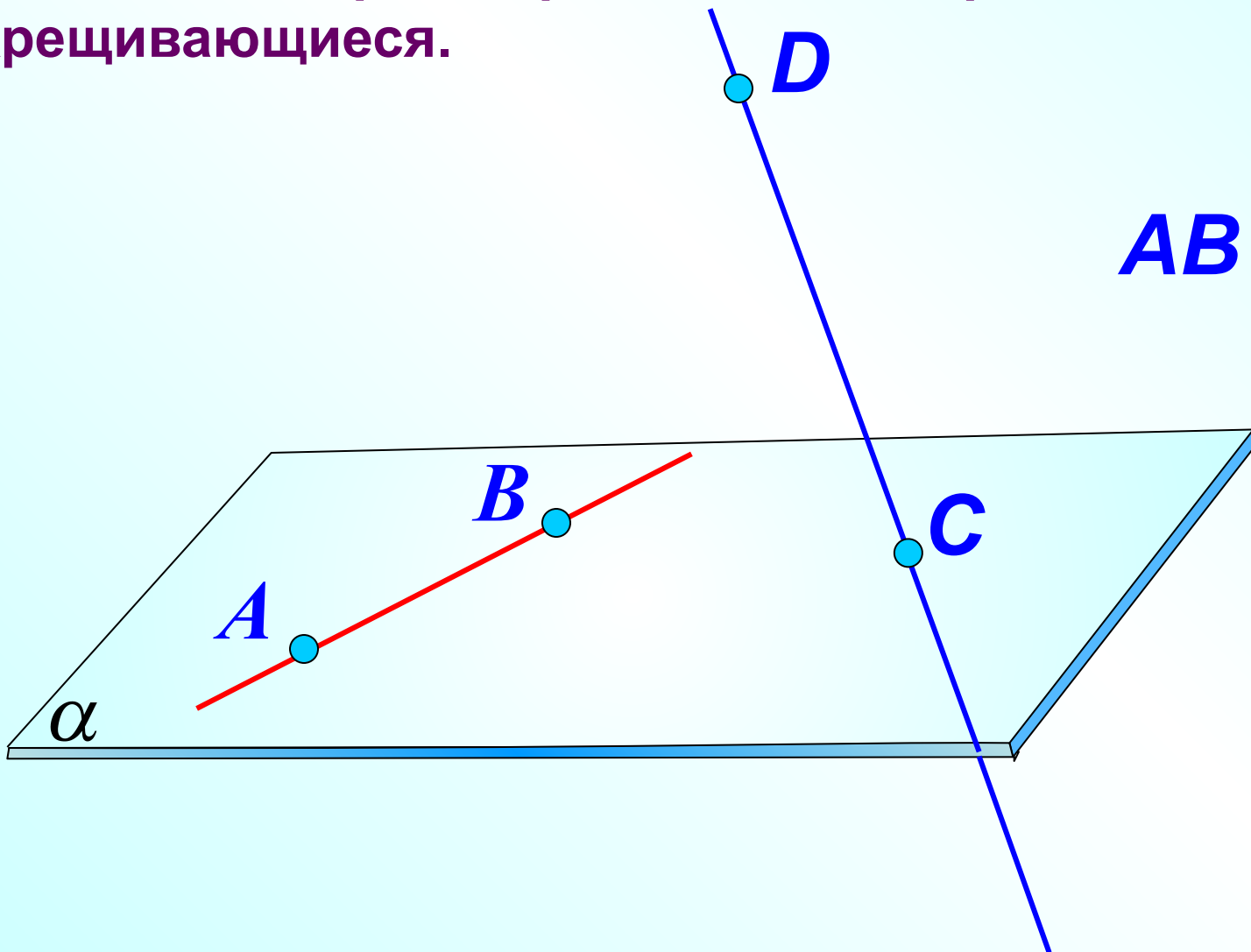




Найдите на рисунке параллельные прямые.  
Назовите параллельные прямые и плоскости.  
Найдите скрещивающиеся прямые.

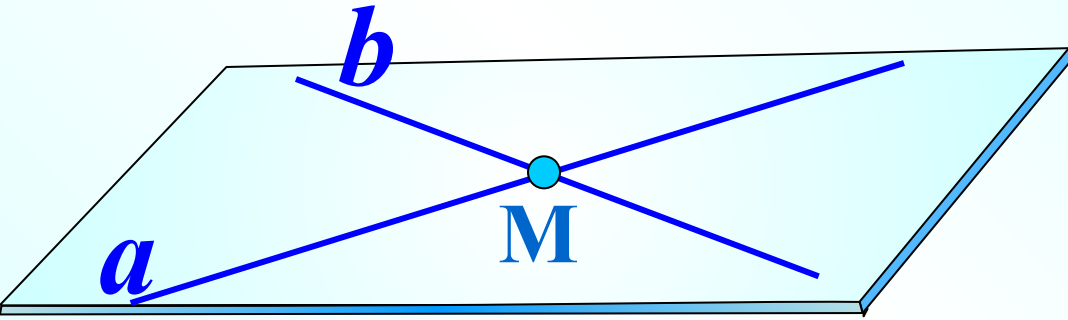
## Признак скрещивающихся прямых

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

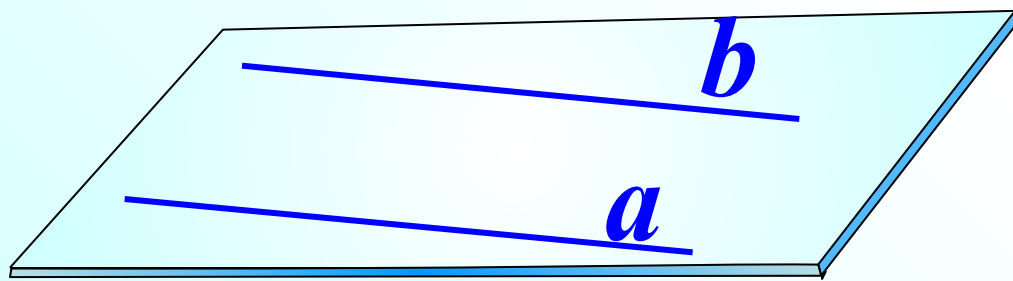


$AB \neq CD$  ?

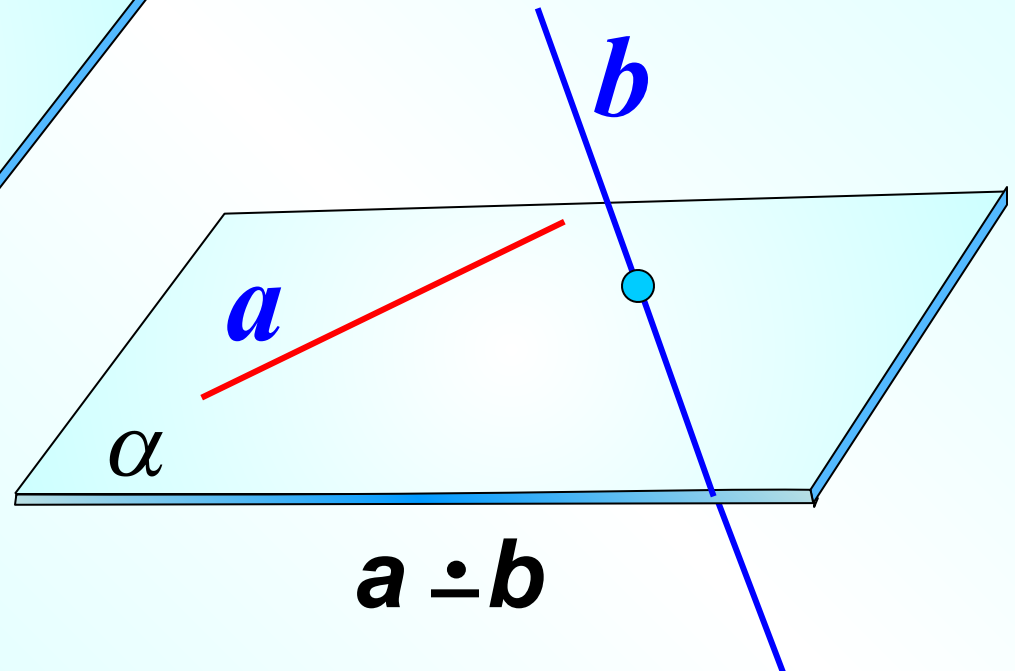
# Три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве



$$a \cap b$$

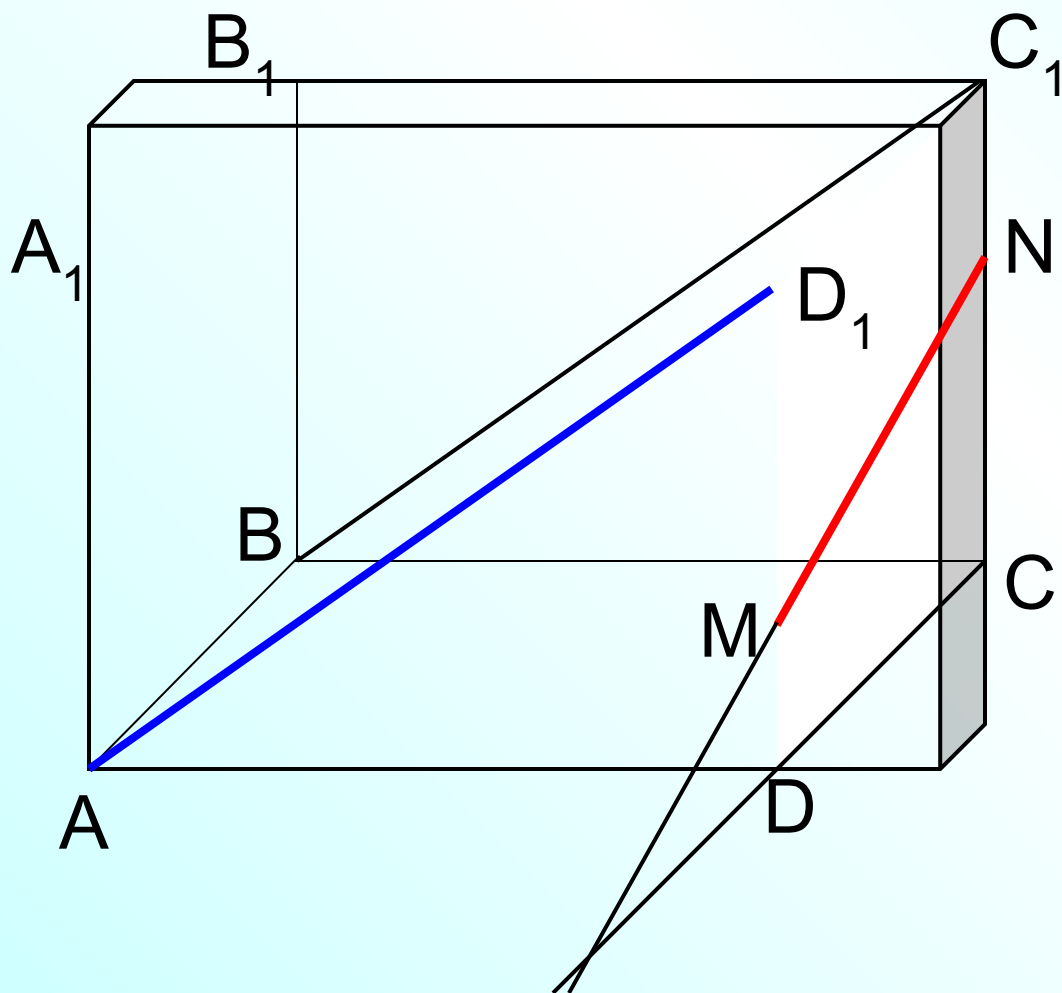


$$a \parallel b$$



$$a \neq b$$

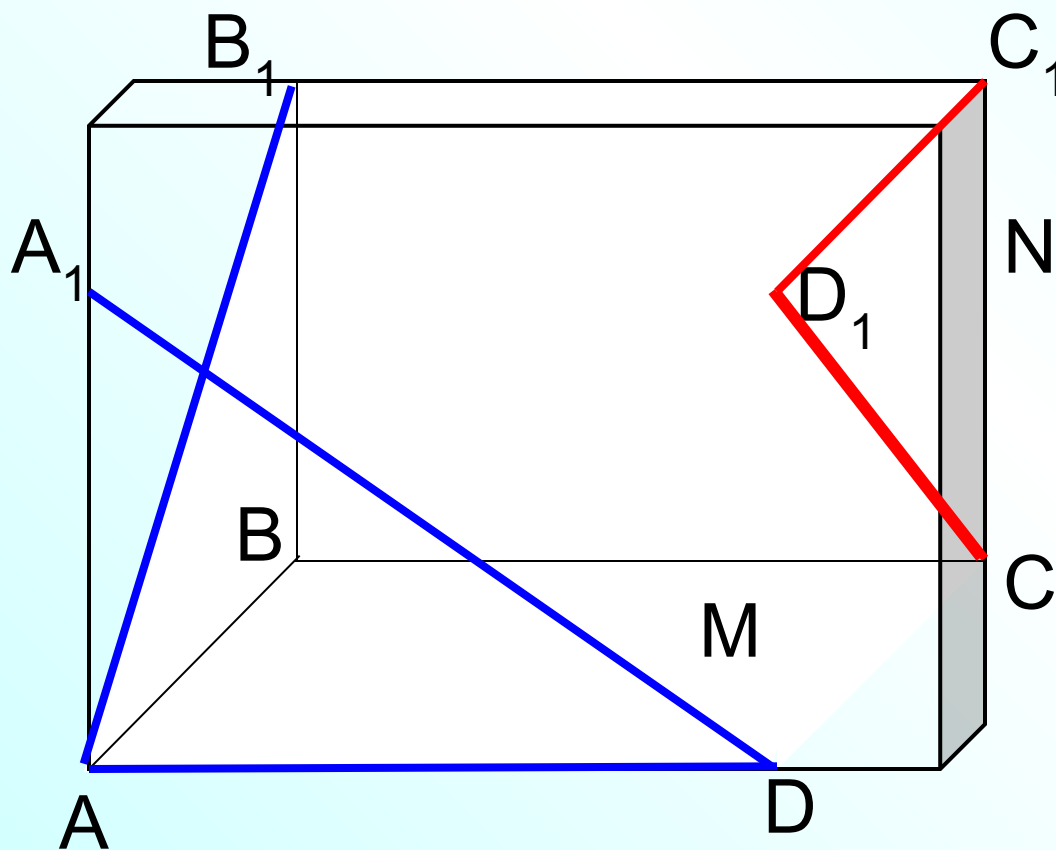
Каково взаимное положение прямых  
1)  $AD_1$  и  $MN$ ; 2)  $AD_1$  и  $BC_1$ ; 3)  $MN$  и  $DC$ ?





Докажите, что прямые

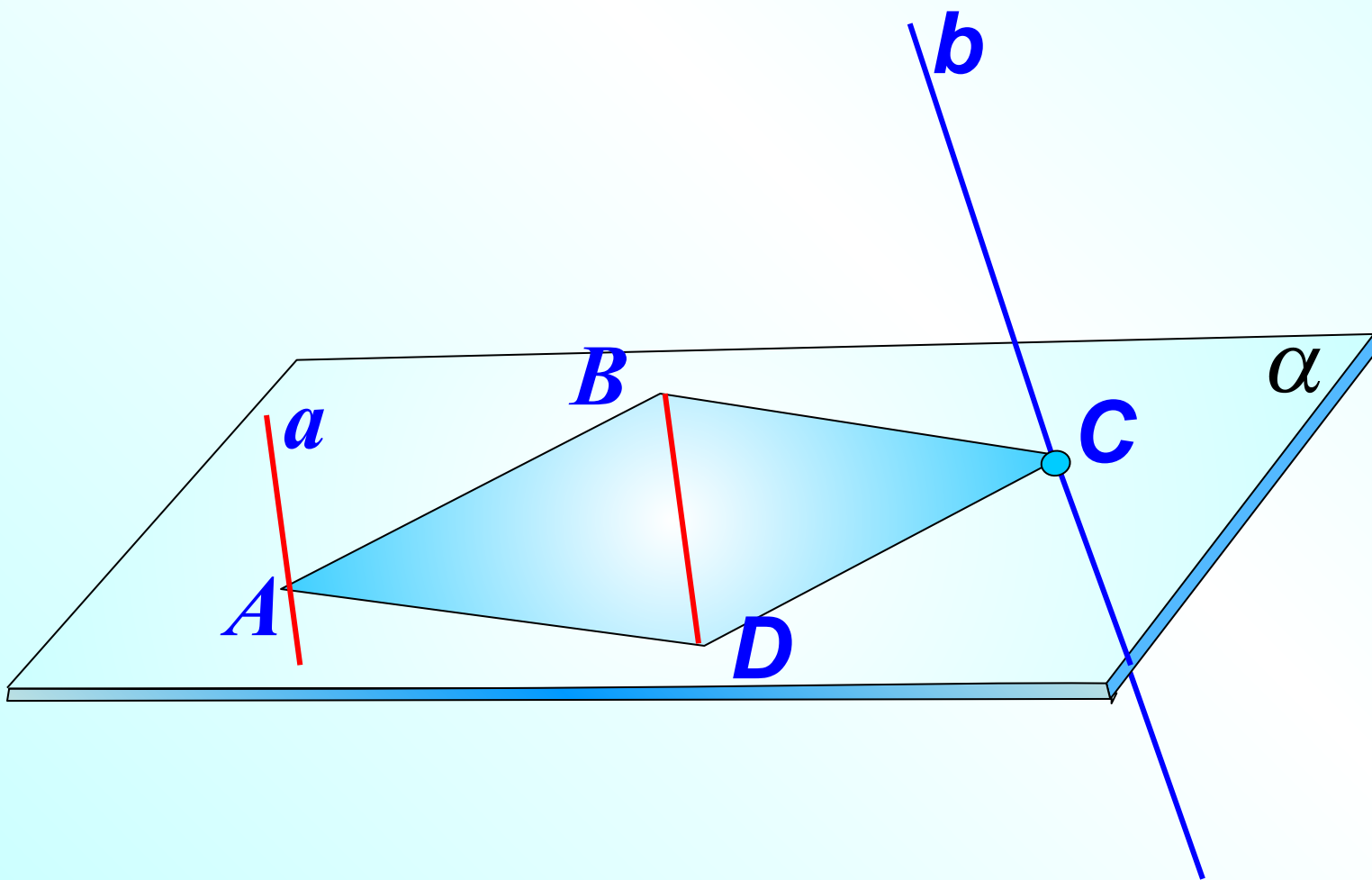
1)  $AD$  и  $C_1D_1$ ; 2)  $A_1D$  и  $D_1C$ ; 3)  $AB_1$  и  $D_1C$  скрещивающиеся.



**№ 38.** Через вершину  $A$  ромба  $ABCD$  проведена прямая  $a$ , параллельная диагонали  $BD$ , а через вершину  $C$  – прямая  $b$ , не лежащая в плоскости ромба.

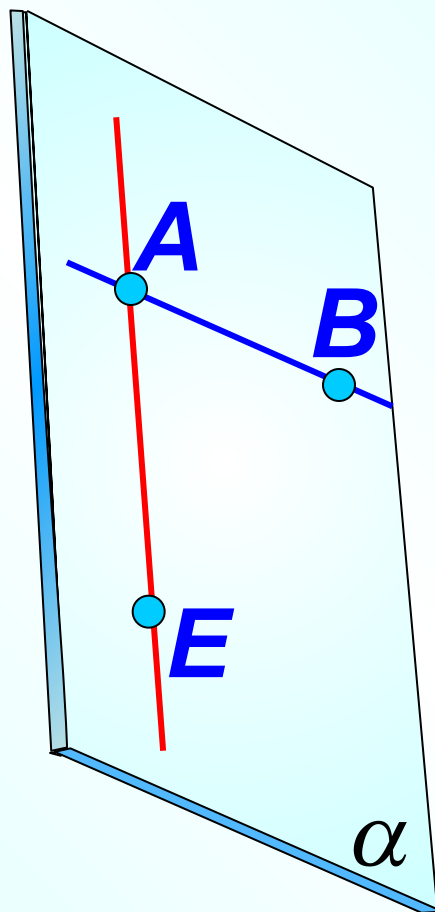
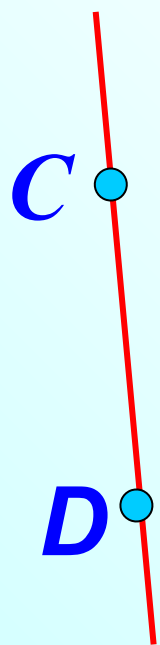
Докажите, что: а)  $a$  и  $CD$  пересекаются;

б)  $a$  и  $b$  скрещивающиеся прямые.  $b \neq a$  ?



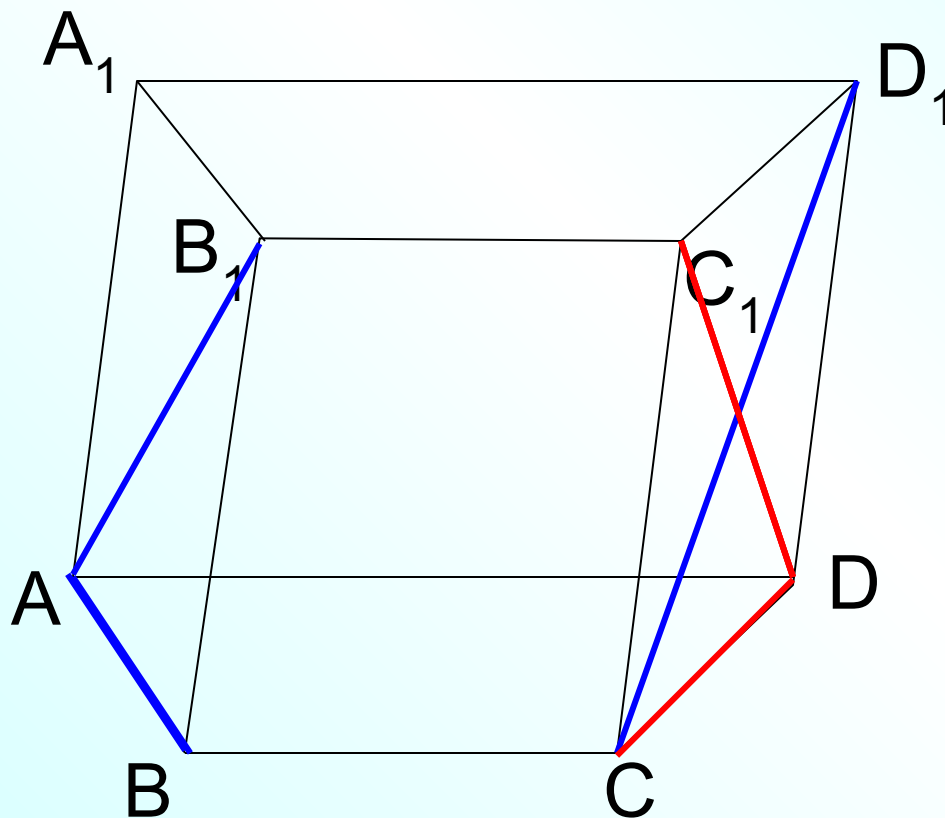
## ***Теорема о скрещивающихся прямых***

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

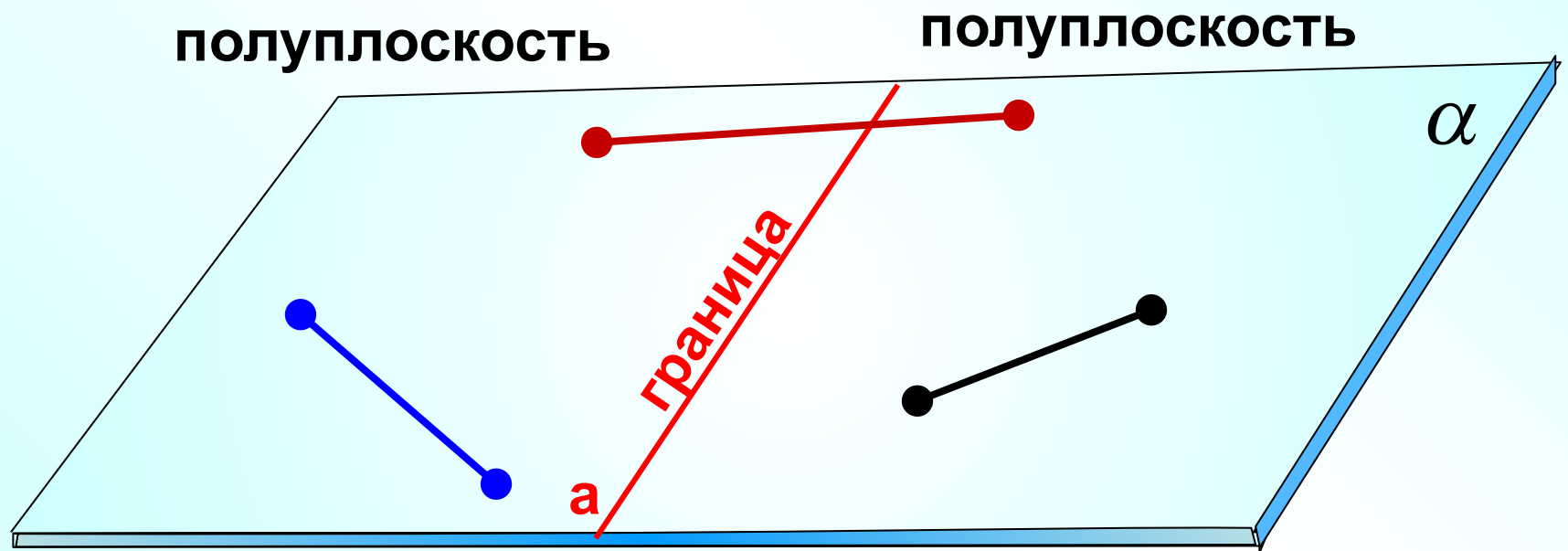


Основание призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – трапеция.  
Какие из следующих пар прямых являются скрещивающимися?

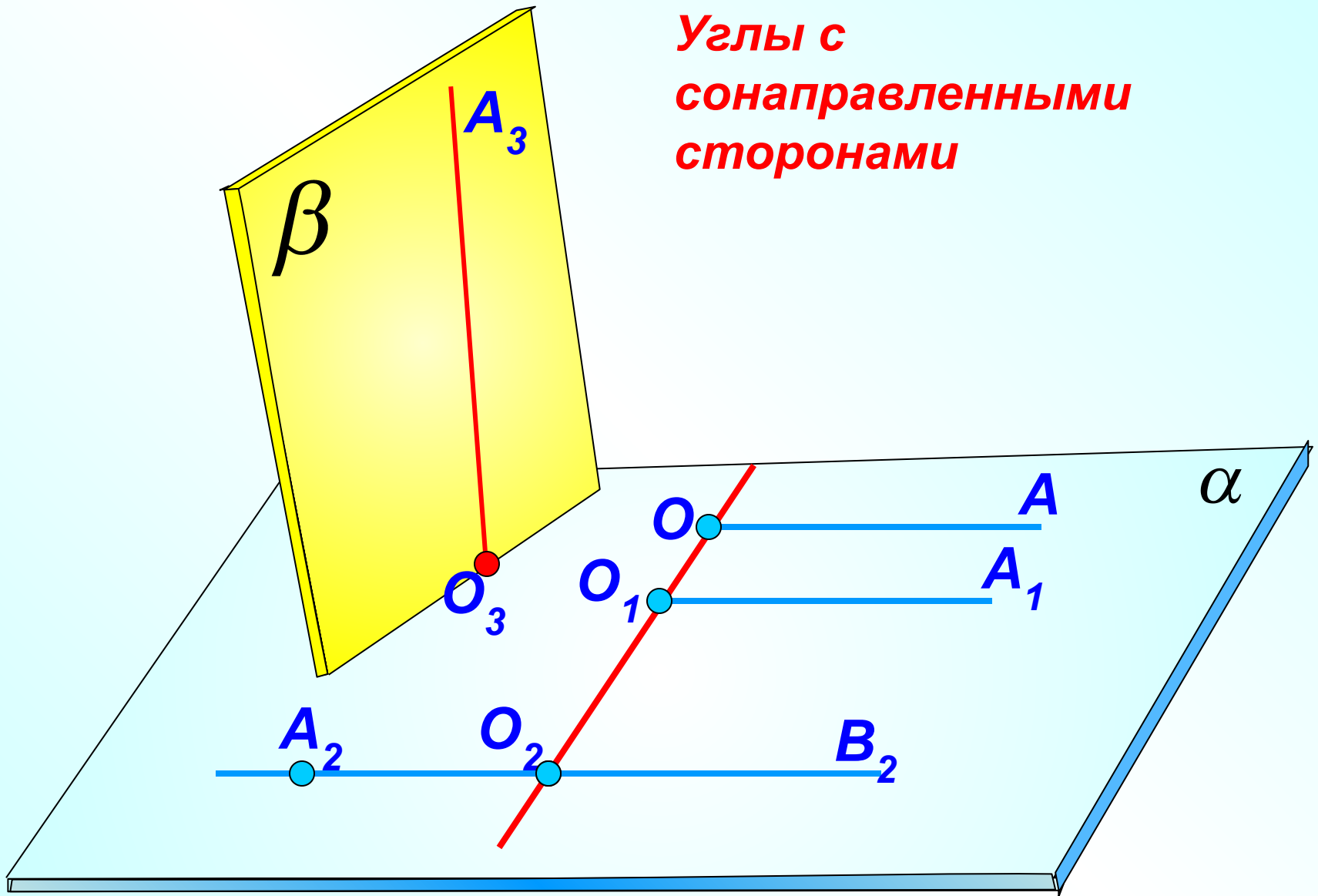
- 1)  $D_1 C$  и  $C_1 D$ ; 2)  $C_1 D$  и  $AB_1$ ; 3)  $C_1 D$  и  $AB$ ; 4)  $AB$  и  $CD$ .



Любая прямая  $a$ , лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части, называемые полуплоскостями. Прямая  $a$  называется границей каждой из этих полуплоскостей.



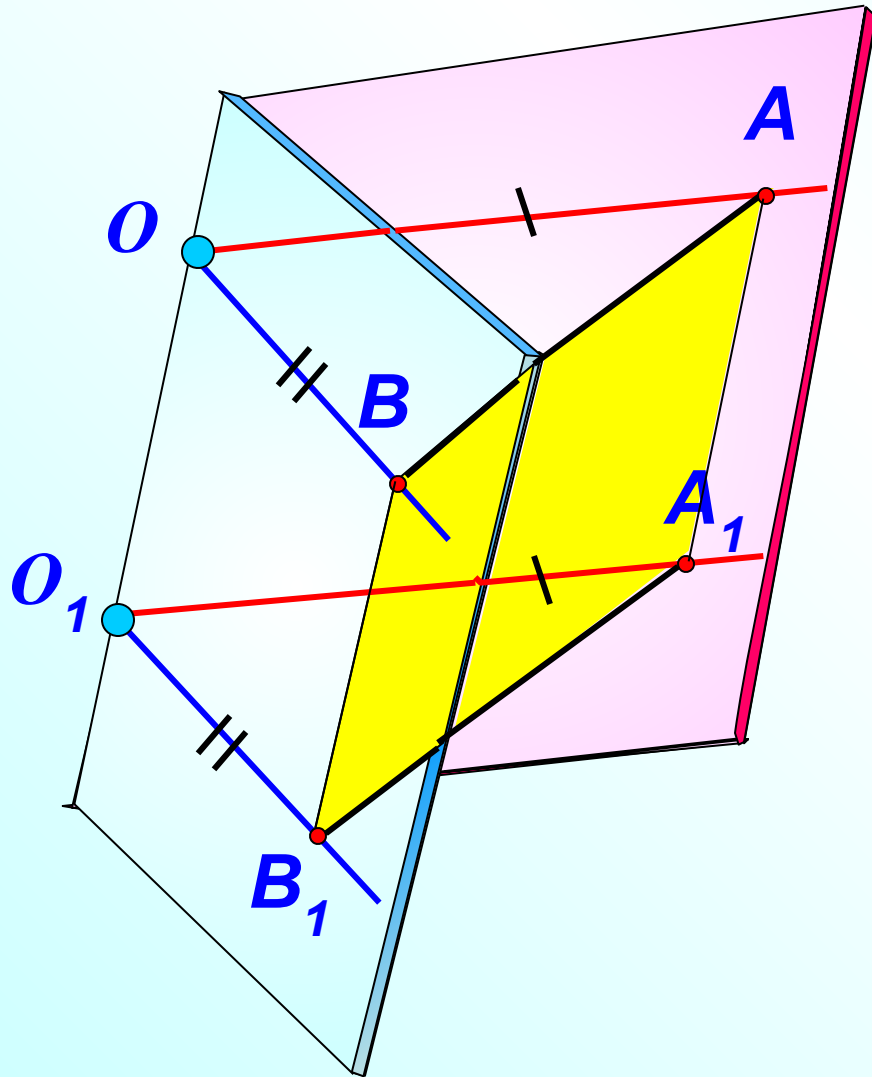
**Углы с  
сонаправленными  
сторонами**



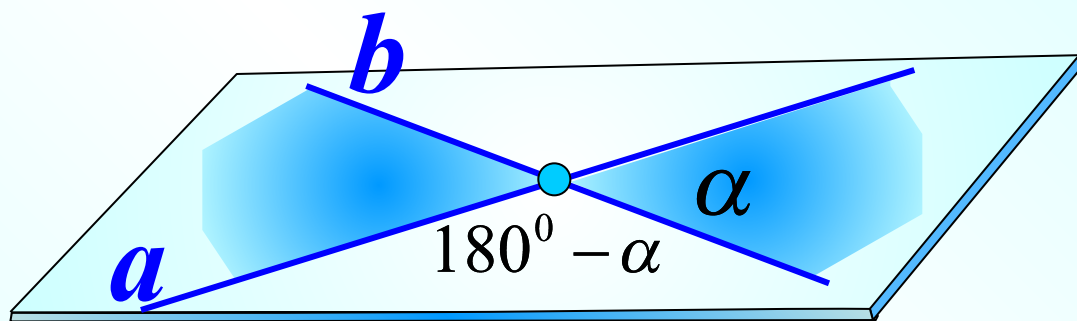


## ***Теорема об углах с сонаправленными сторонами***

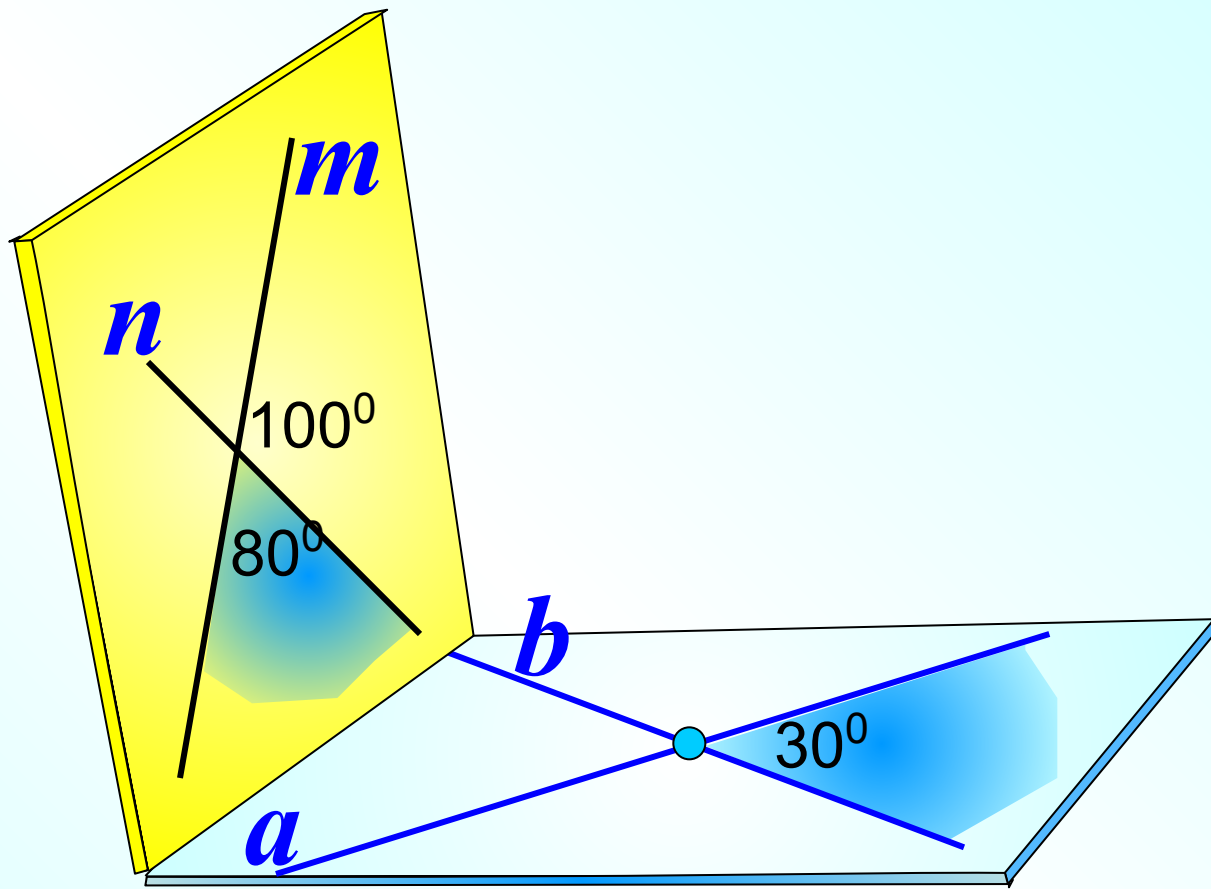
**Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.**



## Угол между прямыми



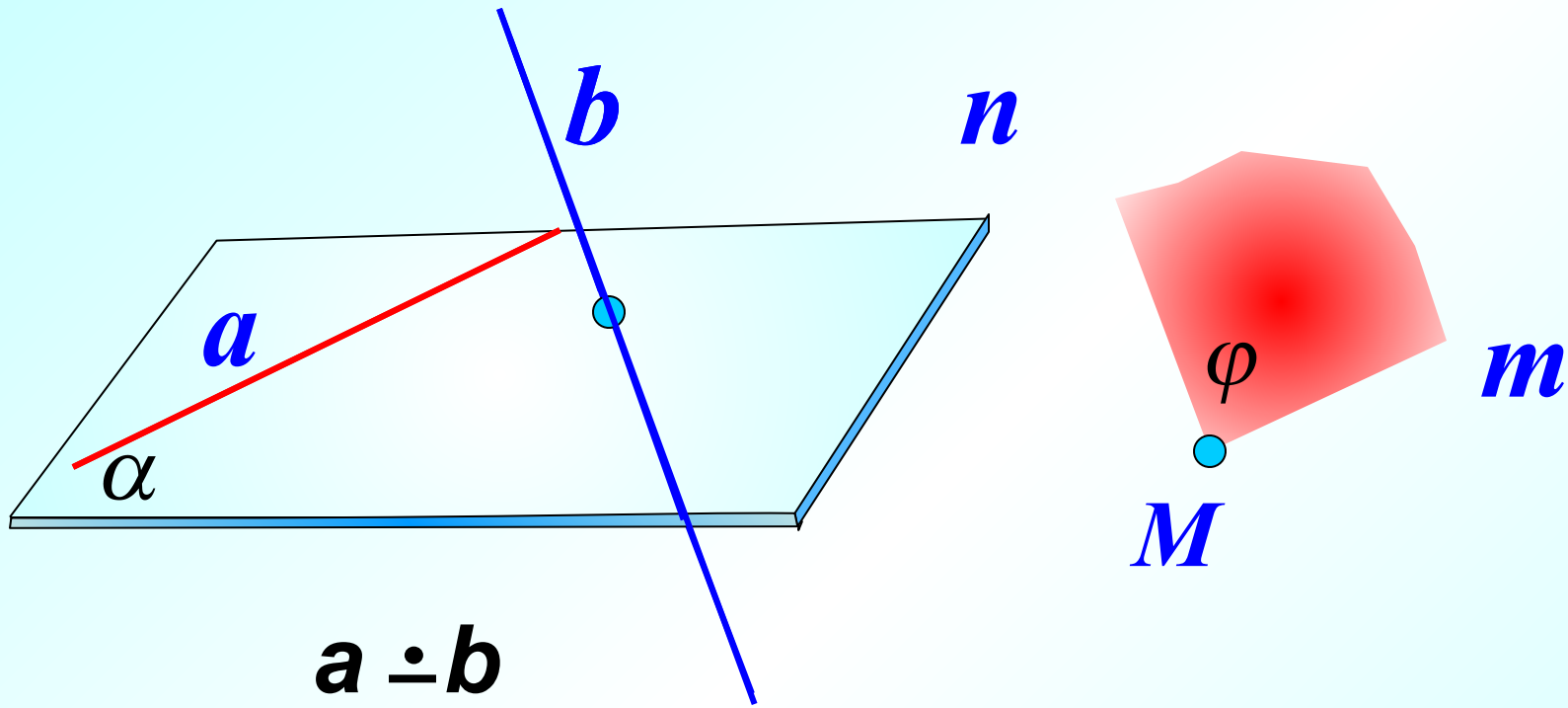
Пусть  $\alpha$  - тот из углов, который не превосходит любой из трех остальных углов. Тогда говорят, что угол между пересекающимися прямыми равен  $\alpha$ .



Угол между прямыми  $a$  и  $b$   $30^\circ$ .

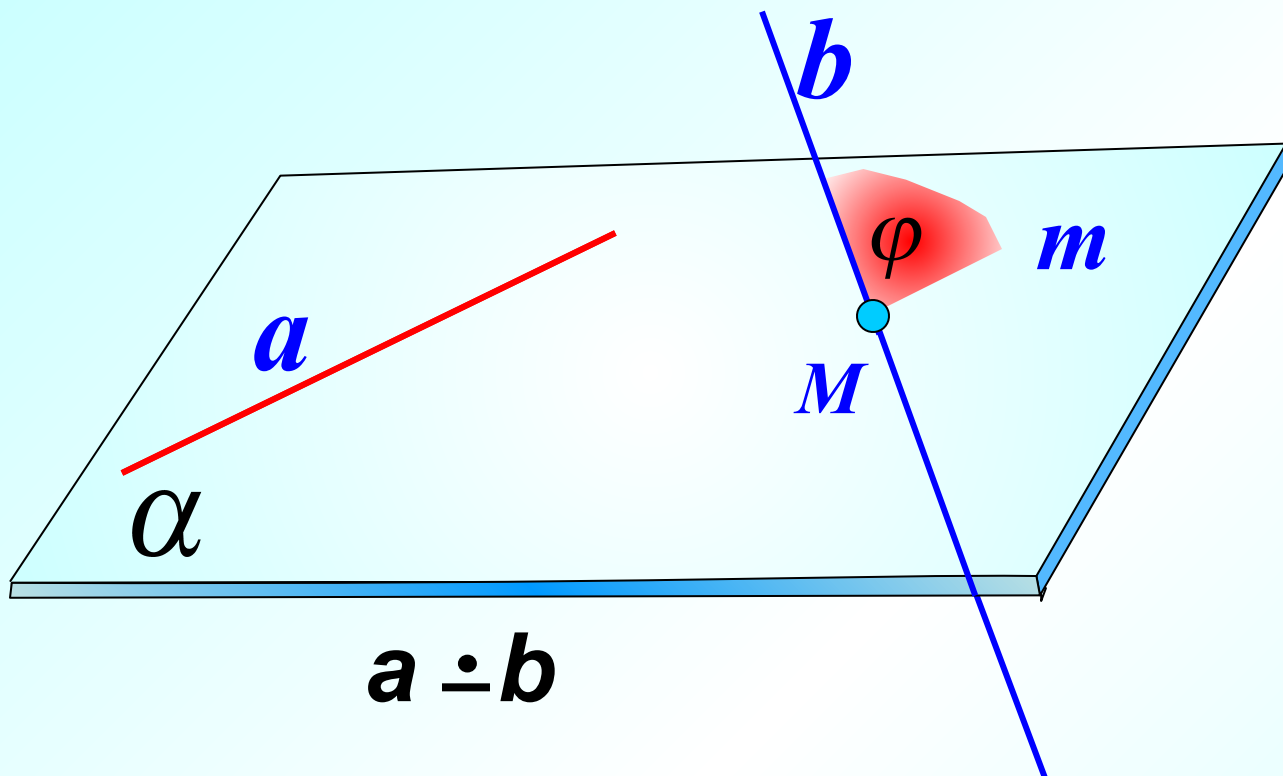
Угол между прямыми  $m$  и  $n$   $80^\circ$ .

## Угол между скрещивающимися прямыми



Через произвольную точку  $M_1$  проведем прямые  $m$  и  $n$ , соответственно параллельные прямым  $a$  и  $b$ .  
Угол между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  равен  $\varphi$

## Угол между скрещивающимися прямыми

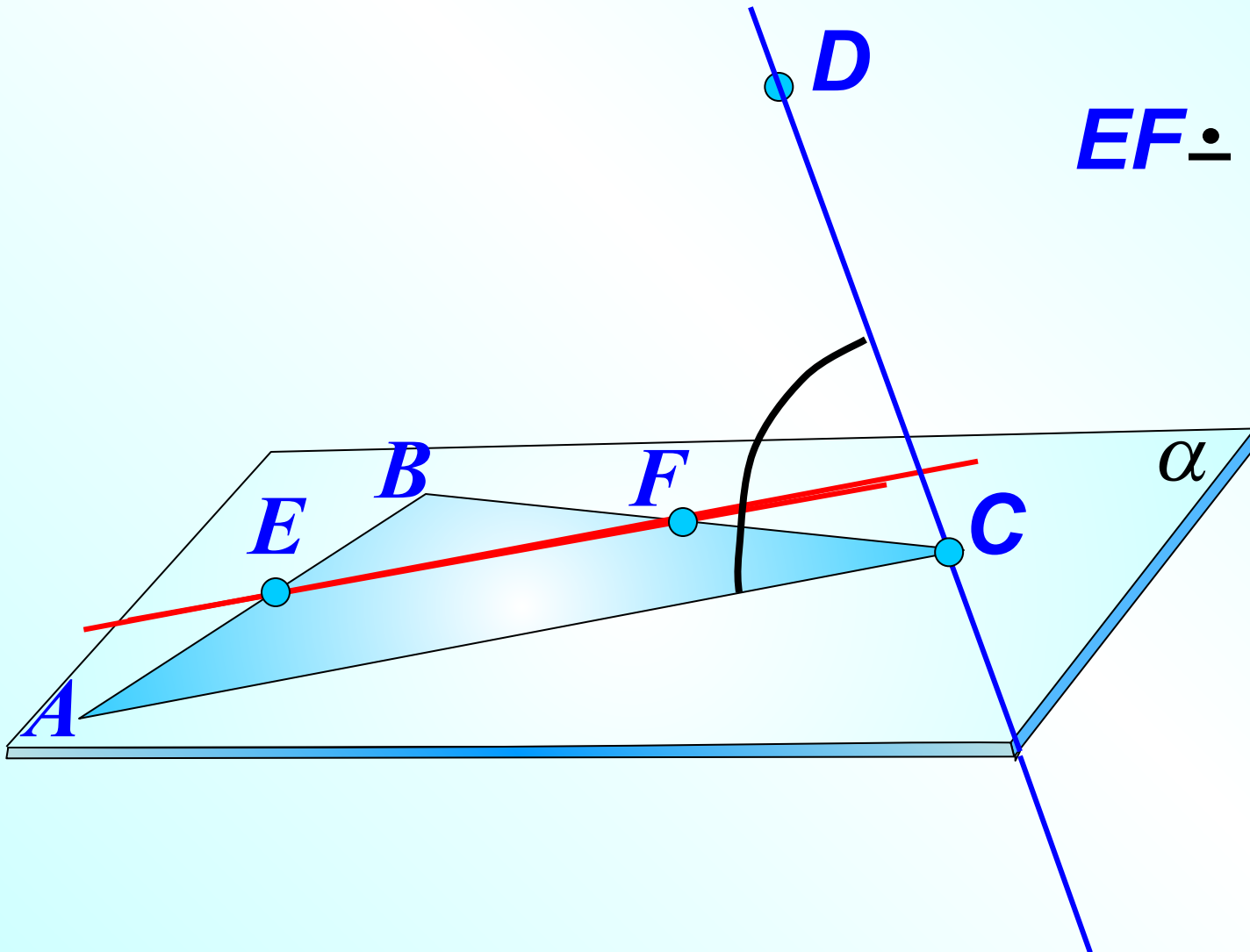


Точку  $M$  можно выбрать произвольным образом.

В качестве точки  $M$  удобно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых.

Прямая  $CD$  проходит через вершину треугольника  $ABC$  и не лежит в плоскости  $ABC$ .  $E$  и  $F$  – середины отрезков  $AB$  и  $BC$ . Найдите угол между прямыми  $CD$  и  $EF$ , если  $\angle DCA = 60^\circ$

$EF \perp CD$  ?

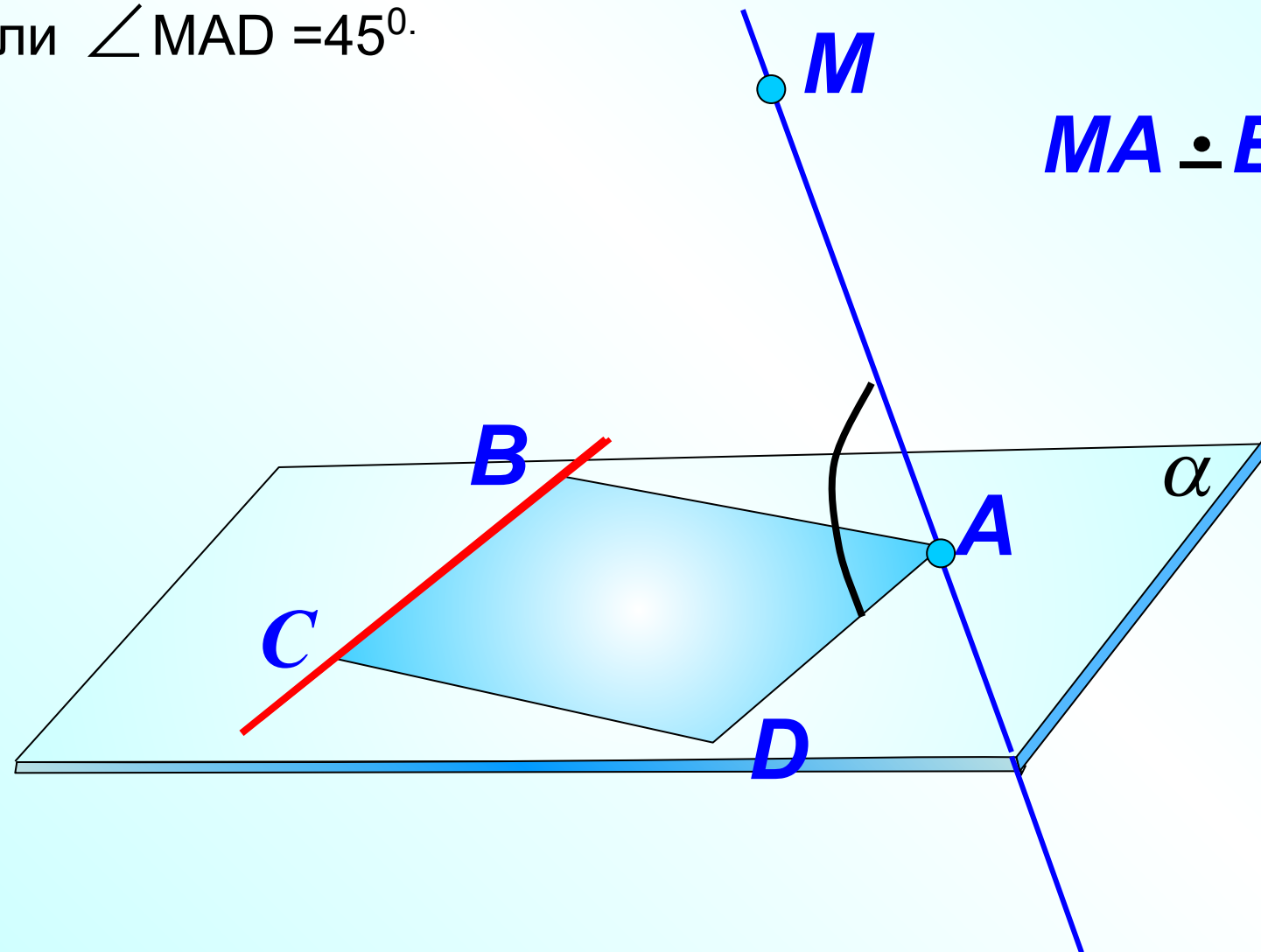




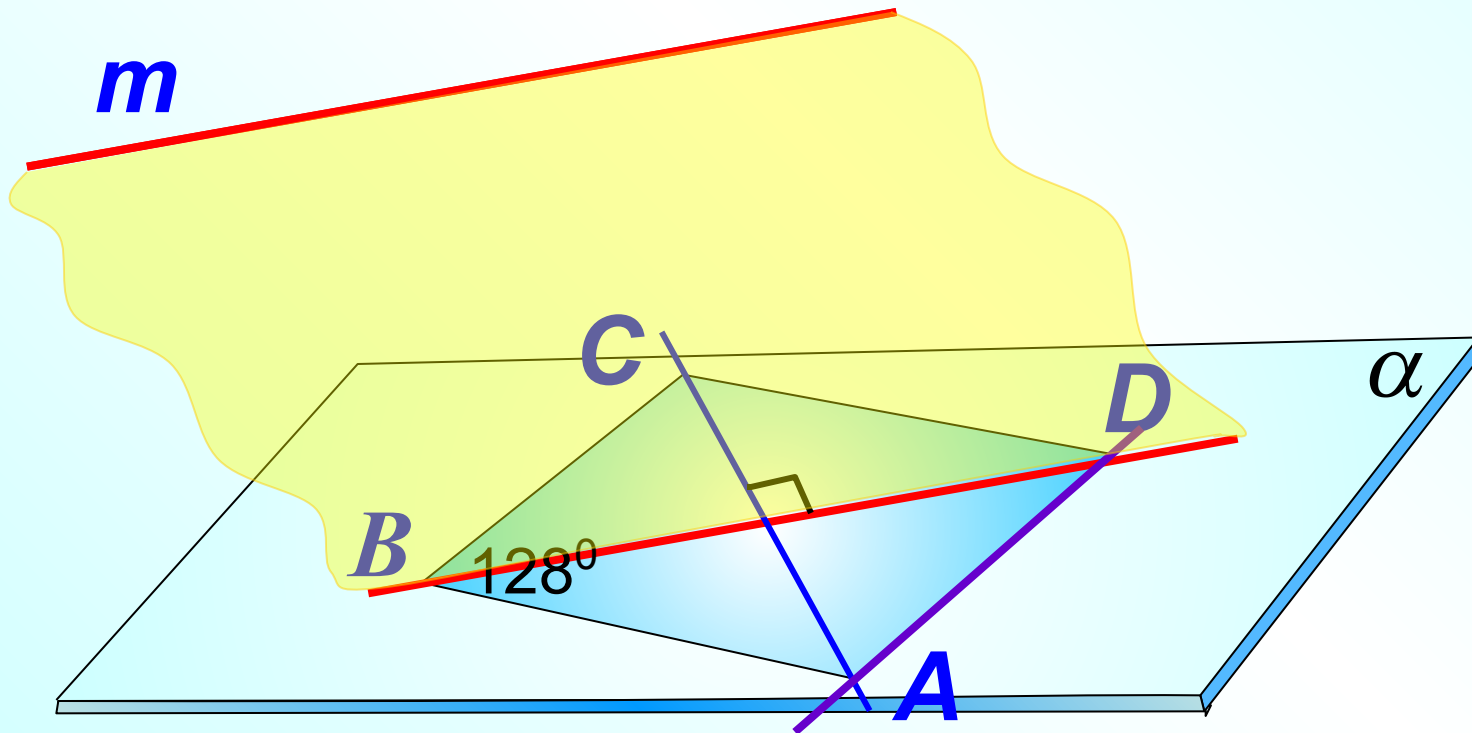
Прямая  $MA$  проходит через вершину квадрата  $ABCD$  и не лежит в плоскости квадрата. Докажите, что  $MA$  и  $BC$  – скрещивающиеся прямые.

Найдите угол между скрещивающимися прямыми  $MA$  и  $BC$ , если  $\angle MAD = 45^\circ$ .

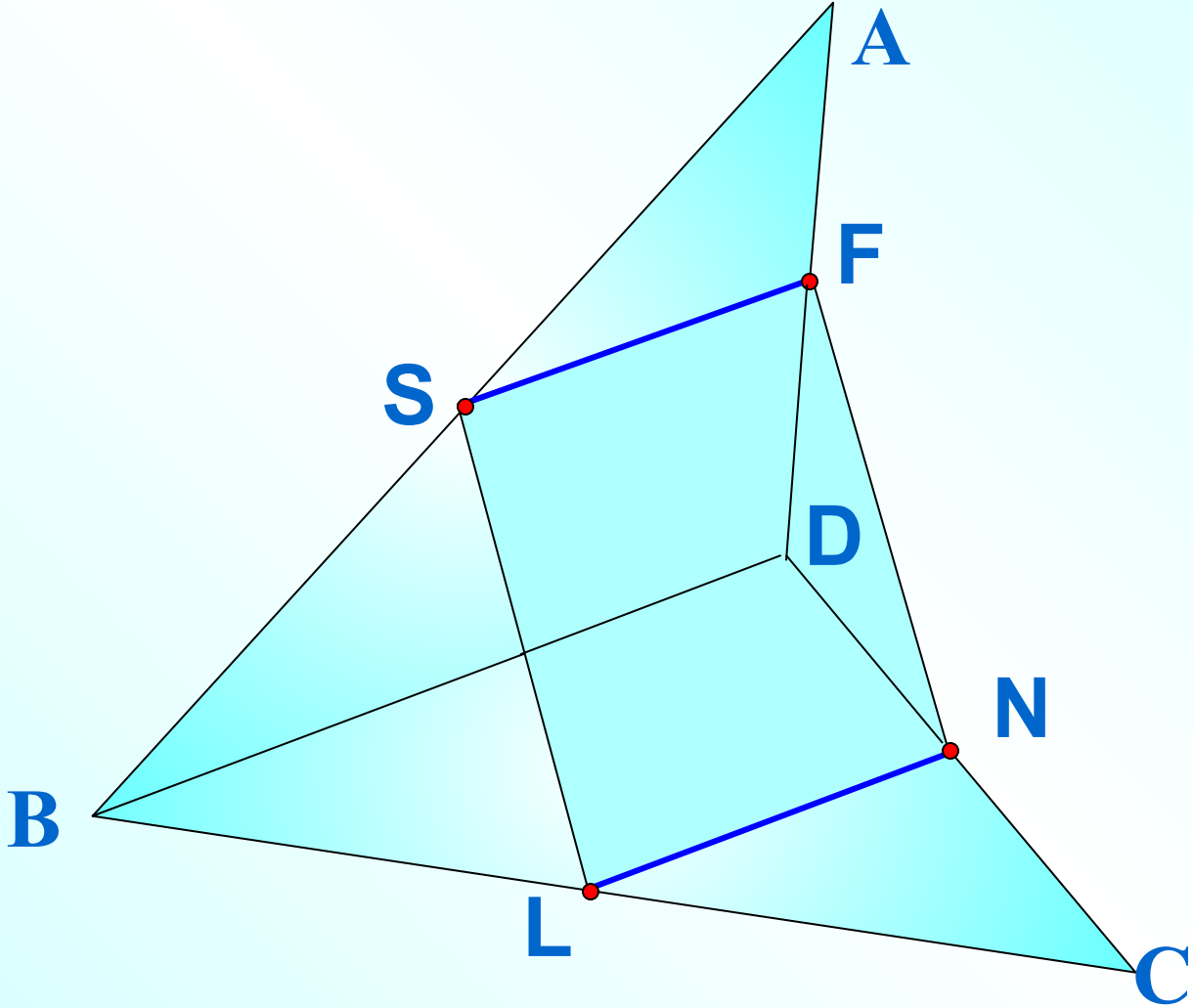
$MA \perp BC$  ?



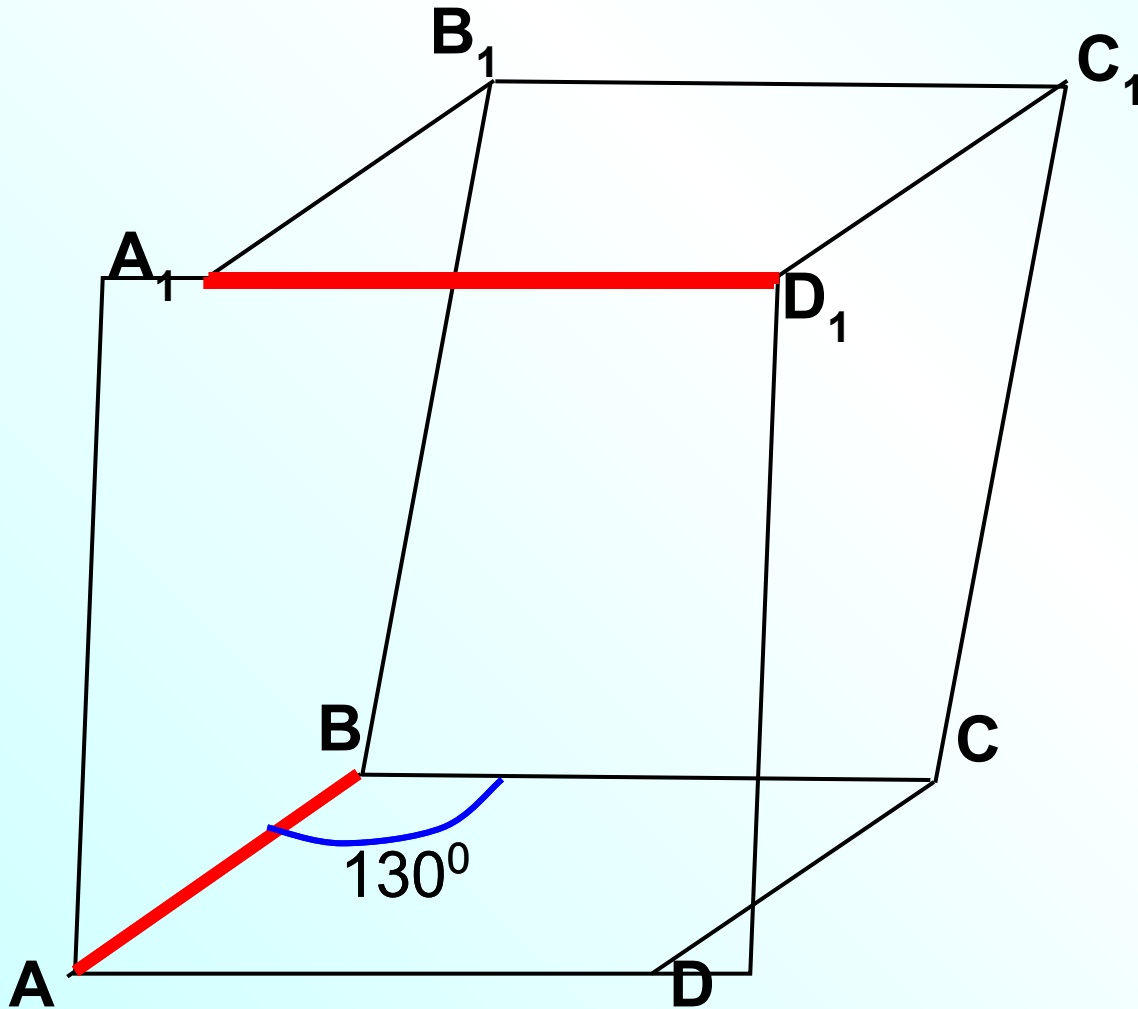
**№ 46.** Прямая  $m$  параллельна диагонали  $BD$  ромба  $ABCD$  и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что  
а)  $m$  и  $AC$  – скрещивающиеся прямые – и найдите угол между ними;  
б)  $m$  и  $AD$  – скрещивающиеся прямые – и найдите угол между ними, если  $\angle ABC = 128^\circ$ .



Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



На рисунке  $ABCD$  – параллелограмм,  $\angle ABC = 130^\circ$ ,  
 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$  и  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ . Найдите  
угол между прямыми  $AB$  и  $A_1D_1$ .  
Рассмотрите различные способы.



На рисунке  $ABCD$  – параллелограмм,  $\angle BCC_1 = 120^\circ$ ,  
 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$  и  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ . Найдите  
угол между прямыми  $BB_1$  и  $AD$ .

