Алгебра и геометрия

Глава 1. Матрицы. Действия над матрицами

Одияко Наталья Николаевна,
доцент кафедры математики и моделирования

Ауд.1602, тел. 240-40-65
Natalya.Odiyako@vvsu.ru

Содержание лекции

Ключевые понятия

Основные понятия и определения

- **Матрицей** называется таблица, состоящая из **n** строк и **m** столбцов.
- Таблица имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

, где $\mathbf{a_{ij}}$ – элементы матрицы;

i – номер строки;

j – номер столбца.

- Если **n=m**, то матрица называется **квадратной.**
- Если **n≠m**, то матрица называется **прямоугольной.**
- **n×m** называется **размерностью** матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

матрица размерностью 2×3

Обозначение матрицы

- Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами (**A**, **B**, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$) или $\mathbf{A=\{a_{ij}\}_{n\times m}}$.

- Матрица, у которой все элементы внутри **равны 0**, называется **нулевой матрицей** и обозначается **«О»**.

- Элементы квадратной матрицы с одинаковыми индексами образуют **главную диагональ матрицы.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

1, 5, 9 образуют главную диагональ

- Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные нули, называется **единичной матрицей**, и обозначается **Е**.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

- Две матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

- **Суммой 2-х матриц** одинаковой размерности называется матрица, элементы которой находят по правилу:

$A=\{a_{ij}\}_{n\times m},\ B=\{b_{ij}\}_{n\times m}$

$A+B=C=\{c_{ij}\}_{n\times m}.$

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ - складываются элементы, стоящие на одинаковых местах.

-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times3} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3-3 \\ 4+2 & 5+1 & 6-1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Для того чтобы **матрицу умножить на число**, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$A=\{a_{ij}\}_{n\times m}$; α-число

$\alpha\cdot A=\{a_{ij}\}_{n\times m}$

- Если $\mathbf{A=\{a_{ij}\}_{n\times m}}$, $\mathbf{B=\{b_{ij}\}_{n\times m}}$, то **разностью матриц A и B** называется матрица $\mathbf{C=\{c_{ij}\}_{n\times m}}$, где $\mathbf{c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}}$.

- Введём операцию **умножения матрицы** таким образом, чтобы выполнялось условие: $\mathbf{A_{n\times p}\cdot B_{p\times m}=C_{n\times m}}$.

-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 & 1\cdot 8 + 2\cdot 10 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 9 & 3\cdot 8 + 4\cdot 10 \\ 5\cdot 7 + 6\cdot 9 & 5\cdot 8 + 6\cdot 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Свойства операций над матрицами

1) $A+B=B+A$

2) $A \cdot B \neq B \cdot A$

3) $\alpha \cdot (A+B)= \alpha A+ \alpha B$

4) $A(B+C)=A \cdot B+A \cdot C$ (строго!)

5) Если в матрице **А** строки заменить местами, то получим так называемую **транспонированную матрицу**.

Если **А** – матрица, то $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ – транспонированная матрица, тогда $\mathbf{(A^T)^T=A}$; $\mathbf{(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T}$

6) Для квадратных матриц вычисляют **определители матриц**, которые обозначаются символами $\boldsymbol{\Delta_A}$**; |A|; ||A||; detA (детерминант)**, являющиеся числом.

det(A·B)=detA·detB

Замечание! Все операции определены.

Обратная матрица

- Матрица A^{-1} называется **обратной матрице А**, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.
- **Вывод 1**: обратная матрица существует для квадратной матрицы.

- **Вывод 2**: A^{-1} имеет ту же размерность, что и данная.
- **Вывод 3**: $\det(A\cdot A^{-1})=\det E$

$$\det A\cdot \det A^{-1}=1$$

$$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$$

- Квадратная матрица, у которой определитель отличен от **0**, т.е. **|A|≠0**, называется **невырожденной**. В противном случае называется **вырожденной**.

- **Теорема о единственности обратной матрицы.**

Если матрица имеет обратную, то единственную.

- **Теорема о существовании обратной матрицы.**

Чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной и невырожденной.

Необходимость доказательства следует из выводов. Доказательство достаточности представляет собой процесс представления матрицы, которая, по определению, и будет обратной.

Алгоритм построения обратной матрицы

1) Убеждаемся, что матрица квадратная (для прямоугольных матриц нет обратных).

2) Вычисляем определитель квадратной матрицы. Если определитель **равен 0**, то делаем вывод, что у матрицы нет обратной.

3) Если определитель **не равен 0**, то вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы.

4) Из алгебраических дополнений составляем так называемую **присоединённую матрицу** ($\tilde{A}=\{A_{ij}\}_{n\times n}$).

5) Транспонируем присоединённую матрицу.

6) Обратную матрицу получаем по формуле $\mathbf{A^{-1}=\frac{1}{detA}\cdot \tilde{A}^{T}}$

или

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\left\{\begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}\right\}$$

Транспонированная матрица

Линейная зависимость и линейная независимость столбцов и строк

-
- Пусть α_1, α_2 и α_m – числа, тогда выражение $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m$ называется **линейной комбинацией столбцов**.

- Столбцы называются **линейно-независимыми**, когда линейная комбинация равна **0** при всех **α=0**.
- Столбцы называются **линейно-зависимыми**, если линейная комбинация равна **0** не при всех **α=0**.

- **Теорема.**

  Столбцы линейно-зависимы, когда хотя бы один столбец является линейной комбинацией остальных.

- **Теорема.**

  Столбцы матрицы можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы **E**.

Ранг матрицы

- Дана матрица размером **n×m**.
- **Минором порядка r (M_r)** называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых r строк и любых r столбцов матрицы.

$r \le \min\{n;m\}$

-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

- $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

M_4 и более высоких порядков не существует для данной матрицы.

- Минор порядка r называется **базисным**, если он отличен от **0**, и миноры более высоких порядков равны **0** или не существуют.
- Порядок базисного минора называется **рангом матрицы** (число **r**).

- Нахождение ранга матрицы через миноры трудоёмкая операция. Существует алгоритм, позволяющий достаточно легко найти ранг и базисный минор.

- **Теорема.**

Ранг матрицы равен максимальному числу линейно-зависимых столбцов матрицы.

Максимальное число линейно-независимых строк равно максимальному числу линейно-независимых столбцов.

- **Теорема.**

Линейные преобразования столбцов или строк матрицы не меняют ранг матрицы.

К линейным преобразованиям строк относятся следующие преобразования:

1) перестановка строк местами;
2) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число;
3) умножение строки на некоторое число;
4) те же действия со столбцами.

- **Теорема.**

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк (столбцов), полученных в результате применения элементарных преобразований, которые позволяют выделить строки и столбцы, являющиеся линейными комбинациями других строк (столбцов), т.е. выделить базисный минор.

- Матрицы, получающиеся друг из друга с помощью элементарных преобразований, называются эквивалентными (имеют одинаковый ранг).

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & \underline{6} & 7 & 8 \\ 7 & 10 & \underline{13} & 16 \end{pmatrix}$$

III = 2·I + II

в A все M_3=0

Применим к матрице элементарные преобразования.

Подчеркнём элементы, имеющие одинаковые индексы.

Ниже или выше этих элементов будем получать 0, если понадобится, устраним линейно-зависимые строки.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & \underline{6} & 7 & 8 \\ 7 & 10 & \underline{13} & 16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{-4} & -8 & -12 \\ 0 & -4 & \underline{-8} & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{-4} & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I строка без изменений
I·(-5)+II = II новая строка
I·(-7)+III = III новая строка

I и II строки без изменений
II·(-1)+III = III новая строка

Вопросы и задания для самопроверки

Рекомендуемая литература