

# Алгебра и геометрия

## Глава 1. Матрицы. Действия над матрицами

---

Одияко Наталья Николаевна,  
доцент кафедры математики и моделирования

Ауд. 1602, тел. 240-40-65  
Natalya.Odiyako@vvsu.ru



# Содержание лекции

---

# Ключевые понятия

---

# Основные понятия и определения

- **Матрицей** называется таблица, состоящая из  $n$  строк и  $m$  столбцов.
- Таблица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

, где  $a_{ij}$  – элементы матрицы;

$i$  – номер строки;

$j$  – номер столбца.

- Если  $n=m$ , то матрица называется **квадратной**.
- Если  $n \neq m$ , то матрица называется **прямоугольной**.
- $n \times m$  называется **размерностью** матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

матрица  
размерностью  $2 \times 3$

# Обозначение матрицы

- Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами (**A, B, A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>**) или  **$A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$** .
- Матрица, у которой все элементы внутри **равны 0**, называется **нулевой матрицей** и обозначается «**O**».

- Элементы квадратной матрицы с одинаковыми индексами образуют **главную диагональ матрицы.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1, 5, 9 образуют главную диагональ



- Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные нули, называется **единичной матрицей**, и обозначается **E**.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Действия над матрицами

- Две матрицы одинаковой размерности называются равными, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

- **Суммой 2-х матриц** одинаковой размерности называется матрица, элементы которой находят по правилу:

$$A = \{a_{ij}\}_{n \times m}, \quad B = \{b_{ij}\}_{n \times m}$$

$$A + B = C = \{c_{ij}\}_{n \times m}.$$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  - складываются элементы, стоящие на одинаковых местах.

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2 & 2 + 3 & 3 - 3 \\ 4 + 2 & 5 + 1 & 6 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$



- Для того чтобы матрицу умножить на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$A = \{a_{ij}\}_{n \times m}; \alpha\text{-число}$$

$$\alpha \cdot A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$$

- Если  $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$ ,  $B = \{b_{ij}\}_{n \times m}$ ,  
то разностью матриц  $A$  и  
 $B$  называется матрица  
 $C = \{c_{ij}\}_{n \times m}$ , где  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .

- Введём операцию **умножения матрицы** таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$A_{n \times p} \cdot B_{p \times m} = C_{n \times m}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 9 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

# Свойства операций над матрицами

1)  $A+B=B+A$

2)  $A \cdot B \neq B \cdot A$

3)  $\alpha \cdot (A+B) = \alpha A + \alpha B$

4)  $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$  (строго!)



5) Если в матрице  $A$  строки заменить местами, то получим так называемую **транспонированную матрицу**.

Если  $A$  – матрица, то  $A^T$  – транспонированная

матрица, тогда  $(A^T)^T = A$ ;

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

6) Для квадратных матриц вычисляют **определители матриц**, которые обозначаются символами  $\Delta_A$ ;  $|A|$ ;  $||A||$ ;  $\det A$  (**детерминант**), являющиеся числом.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

**Замечание!** Все операции определены.



# Обратная матрица

- Матрица  $A^{-1}$  называется **обратной матрице  $A$** , если  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ .
- **Вывод 1:** обратная матрица существует для квадратной матрицы.

• **Вывод 2:**  $A^{-1}$  имеет ту же размерность, что и данная.

• **Вывод 3:**  $\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- Квадратная матрица, у которой определитель отличен от  $0$ , т.е.  $|A| \neq 0$ , называется **невырожденной**. В противном случае называется **вырожденной**.

- **Теорема о единственности обратной матрицы.**

Если матрица имеет обратную, то единственную.

- **Теорема о существовании обратной матрицы.**

Чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной и невырожденной.

Необходимость доказательства следует из выводов. Доказательство достаточности представляет собой процесс представления матрицы, которая, по определению, и будет обратной.

# Алгоритм построения обратной матрицы

- 1) Убеждаемся, что матрица квадратная (для прямоугольных матриц нет обратных).
- 2) Вычисляем определитель квадратной матрицы. Если определитель **равен 0**, то делаем вывод, что у матрицы нет обратной.



- 3) Если определитель не равен 0, то вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы.
- 4) Из алгебраических дополнений составляем так называемую **присоединённую матрицу** ( $\tilde{A} = \{A_{ij}\}_{n \times n}$ ).
- 5) Транспонируем присоединённую матрицу.

6) Обратную матрицу получаем по формуле  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$

ИЛИ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Транспонированная  
матрица



# Линейная зависимость и линейная независимость столбцов и строк

- Пусть  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_m$  – числа, тогда выражение

$$\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m$$

называется **линейной**

**комбинацией столбцов.**



- Столбцы называются **линейно-независимыми**, когда линейная комбинация равна **0** при всех  $\alpha=0$ .
- Столбцы называются **линейно-зависимыми**, если линейная комбинация равна **0** не при всех  $\alpha=0$ .

- **Теорема.**

Столбцы линейно-зависимы, когда хотя бы один столбец является линейной комбинацией остальных.

- **Теорема.**

Столбцы матрицы можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы  $E$ .

# Ранг матрицы

- Дана матрица размером  $n \times m$ .
- **Минором порядка  $r$  ( $M_r$ )** называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых  $r$  строк и любых  $r$  столбцов матрицы.

$$r \leq \min\{n; m\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\dot{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$M_4$  и более высоких порядков не существует для данной матрицы.



- Минор порядка  $r$  называется **базисным**, если он отличен от **0**, и миноры более высоких порядков равны **0** или не существуют.
- Порядок базисного минора называется **рангом матрицы** (число  $r$ ).

- Нахождение ранга матрицы через миноры трудоёмкая операция. Существует алгоритм, позволяющий достаточно легко найти ранг и базисный минор.

# • Теорема.

Ранг матрицы равен  
максимальному числу линейно-  
зависимых столбцов матрицы.

Максимальное число линейно-  
независимых строк равно  
максимальному числу линейно-  
независимых столбцов.

# • Теорема.

Линейные преобразования столбцов или строк матрицы не меняют ранг матрицы.

К линейным преобразованиям строк относятся следующие преобразования:

- 1) перестановка строк местами;
- 2) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число;
- 3) умножение строки на некоторое число;
- 4) те же действия со столбцами.

- **Теорема.**

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк (столбцов), полученных в результате применения элементарных преобразований, которые позволяют выделить строки и столбцы, являющиеся линейными комбинациями других строк (столбцов), т.е. выделить базисный минор.

- Матрицы, получающиеся друг из друга с помощью элементарных преобразований, называются эквивалентными (имеют одинаковый ранг).

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & \underline{6} & 7 & 8 \\ 7 & 10 & \underline{13} & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{III} = 2 \cdot \text{I} + \text{II}$$

в A все  $M_3=0$

Применим к матрице  
элементарные преобразования.

Подчеркнём элементы, имеющие  
одинаковые индексы.

Ниже или выше этих элементов  
будем получать 0, если  
понадобится, устраним линейно-  
зависимые строки.



$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & \underline{6} & 7 & 8 \\ 7 & 10 & \underline{13} & 16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{-4} & -8 & -12 \\ 0 & -4 & \underline{-8} & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{-4} & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I строка без изменений  
 $I \cdot (-5) + II = II$  новая строка  
 $I \cdot (-7) + III = III$  новая строка

I и II строки без изменений  
 $II \cdot (-1) + III = III$  новая строка

# Вопросы и задания для самопроверки

---

# Рекомендуемая литература

---

## **Использование материалов презентации**

Использование данной презентации, может осуществляться только при условии соблюдения требований законов РФ об авторском праве и интеллектуальной собственности, а также с учетом требований настоящего Заявления.

Презентация является собственностью авторов. Разрешается распечатывать копию любой части презентации для личного некоммерческого использования, однако не допускается распечатывать какую-либо часть презентации с любой иной целью или по каким-либо причинам вносить изменения в любую часть презентации. Использование любой части презентации в другом произведении, как в печатной, электронной, так и иной форме, а также использование любой части презентации в другой презентации посредством ссылки или иным образом допускается только после получения письменного согласия авторов.

