# Линейное программирование

**Симплекс-методом решить задачи линейного программирования:**

1) $F(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) $F(X) = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 240 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 200 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 160 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3) $F(X) = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4) $F(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# Теория двойственности

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

# Теория двойственности

**Правила построения двойственной задачи можно описать следующим образом:**

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

# Теория двойственности

**Составить двойственную задачу по отношению к исходной задаче линейного программирования :**

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

# Теория двойственности

## Построить двойственные задачи к следующим задачам линейного программирования:

1.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \qquad (16)$$
$$Ax=B \qquad (17)$$
$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \to \min \qquad (19)$$
$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

2.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \qquad (16)$$
$$Ax=B \qquad (17)$$
$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \to \min \qquad (19)$$
$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

3.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \qquad (16)$$
$$Ax=B \qquad (17)$$
$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \to \min \qquad (19)$$
$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

# Теория двойственности

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \tag{16}$$

$$Ax=B \tag{17}$$

$$x \geq 0 \tag{18}$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \tag{19}$$

$$A^{T}u \geq C \tag{20}$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \tag{16}$$

$$Ax=B \tag{17}$$

$$x \geq 0 \tag{18}$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \tag{19}$$

$$A^{T}u \geq C \tag{20}$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

**Основные теоремы о двойственных задачах можно переформулировать следующим образом:**

1) Если исходная и двойственная ей задачи имеет допустимые решения, то обе имеют оптимальные решения, причем значения целевых функций для оптимальных решений обоих задач совпадают.

2) Если одна из задач имеет допустимые решения, а другая – нет, то задача, которая имеет допустимые решения, неограниченна.

Третий возможный случай: обе задачи не имеют допустимых значений. Других вариантов нет.

# Теория двойственности

Решать двойственную задачу можно **двойственным симплекс-методом**. Двойственный симплекс-метод строится по аналогии с прямым симплекс-методом. Различие состоит лишь в том, что свободные члены задачи, решаемой двойственным симплекс-методом, могут быть любыми числами, в то время как в прямом симплекс-методе эти числа должны быть неотрицательными. При этом если все коэффициенты в строке целевой функции неположительны, то базисное решение называется **псевдорешением**.

## Алгоритм двойственного симплекс-метода

1) Пусть дана задача линейного программирования в канонической форме, так что базисное решение является псевдорешением. Тогда, если все свободные члены неотрицательны, псевдорешение является оптимальным.

2) Если в какой-нибудь строке, кроме отрицательного свободного члена нет других отрицательных коэффициентов, то данная задача линейного программирования не имеет допустимых решений.

3) Если базисное решение содержит отрицательные переменные (есть отрицательные свободные члены), то исключению из базиса подлежит одна из этих переменных, а именно та, значение которой максимально по модулю.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \tag{16}$$

$$Ax=B \tag{17}$$

$$x \geq 0 \tag{18}$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \to \min \tag{19}$$

$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \tag{20}$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

# Целочисленное программирование

Основной класс задач оптимизации составляют задачи линейного программирования, в которых на значения всех или части переменных наложены требования целочисленности. Если все переменные принимают только целочисленные значения, то модель определяет полностью целочисленную задачу, иначе говорят о частично целочисленной задаче.

## Постановка полностью целочисленной задачи линейного программирования

Задача, в которой требуется обратить в максимум (минимум) целевую функцию $F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1, s},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{s+1, s+t},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i = \overline{s+t+1, m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n}$$

$x_j$ - целые, $j = \overline{1, n}$

Если найти решение данной задачи симплекс-методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет. Поэтому в общем случае для определения оптимального плана требуются специальные методы.

# Целочисленное программирование

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

## Определение

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

# Целочисленное программирование

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

# Целочисленное программирование

определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \tag{16}$$

$$Ax=B \tag{17}$$

$$x \geq 0 \tag{18}$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \tag{19}$$

$$A^{T}u \geq C \tag{20}$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

## Алгоритм метода Гомори

1. Используя симплекс-метод, находим оптимальное решение задачи линейного программирования без учета требования целочисленности.
2. Если все свободные члены в завершающей симплекс-таблице целые числа, то оптимальное решение является целочисленным, то есть отвечает условиям исходной задачи.
3. Если же есть нецелые свободные члены, то выбираем среди них член с наименьшим номером и рассматриваем соответствующую ему строку симплекс-таблицы. Допустим, эта строка с номером *l*. По выбранной строке записываем правильное отсечение вида 22.

# Целочисленное программирование

определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \quad (16)$$

$$Ax=B \quad (17)$$

$$x \geq 0 \quad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \quad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \quad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$

## Пример решения целочисленной задачи линейного программирования, используя алгоритм Гомори:

$$F_{\min} = -x_1 - x_2,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9,$$

$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4},\ x_j \text{ – целые}$$

## Решение:

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \quad (16)$$

$$Ax=B \quad (17)$$

$$x \geq 0 \quad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \quad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \quad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \tag{16}$$

$$Ax=B \tag{17}$$

$$x \geq 0 \tag{18}$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \tag{19}$$

$$A^{T}u \geq C \tag{20}$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

| | $x_Б$ | | 1 | 1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | min |
| 0 | $x_3$ | 6 | 1 | 2 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | $x_4$ | 9 | 3 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| $\Delta$ | | | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| $\varepsilon$ | | 3 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | |

X1=(3;0;3;0), F(X1)=3

| | $x_Б$ | | 1 | 1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | min |
| 0 | $x_3$ | 3 | 0 | $\frac{4}{3}$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{9}{4}=2,25$ |
| 1 | $x_1$ | 3 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{9}{2}$=4,5 |
| $\Delta$ | | | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | |
| $\varepsilon$ | | $\frac{9}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | |

X2=($\frac{3}{2}$; $\frac{9}{4}$; 0; 0), F(X2)=$\frac{15}{4}$=3,75

| | $x_Б$ | | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 |
| 1 | $x_2$ | $\frac{9}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ |
| 1 | $x_1$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Δ | | | 0 | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ |

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допстимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

| | $x_Б$ | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |
| 1 | $x_2$ | $\frac{9}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 |
| 1 | $x_1$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 0 | $x_5$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 |
| Δ | | | 0 | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 |
| **ε** | | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | -2 |

| | $x_Б$ | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |
| 1 | $x_2$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 1 | 0 | -1 | $\frac{3}{2}$ |
| 1 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 0 | $x_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | -2 |
| Δ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ |

$X3=(2;\frac{3}{2};1;0)$, $F(X3)=\frac{7}{2}=3,5$

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$

| | $x_Б$ | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 | Y6 |
| 1 | $x_2$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 1 | 0 | -1 | $\frac{3}{2}$ | 0 |
| 1 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| 0 | $x_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | -2 | 0 |
| 0 | $x_6$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 |
| Δ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| **ε** | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 |

| | $x_Б$ | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Y0 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 | Y6 |
| 1 | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 3 |
| 1 | $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 |
| 0 | $x_3$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -4 |
| 0 | $x_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 |
| Δ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

X4=(3; 0; 3; 0), F(X4)=3

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.
Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования
$z(x)=C^{T}x \to max,$ (16)
$Ax=B$ (17)
$x \geq 0$ (18)
Задача вида
$w(u) = u^{T}b \to \min$ (19)
$A^{T}u \geq C$ (20)
называется двойственной к задаче (16)-(18).
Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Найдите графическим методом и методом Гомори оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Решить целочисленные задачи линейного программирования методом Гомори

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Найти целочисленное решение задачи линейного программирования. Составить двойственную задачу и решить её без условия целочисленности. По теоремам двойственности проверить связь нецелочисленных решений прямой и двойственной задачи.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

# Транспортные задачи

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

# Транспортные задачи

определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq$$

Задача вида

**ТАБЛИЦА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ**

Исходные данные

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы (объемы отправления) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | ... | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | ... | $c_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ⋮ |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | ... | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| Потребность | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_n$ | |

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b$$

$$A^{\mathrm{T}}u \geq$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \tag{16}$$

$$Ax=B \tag{17}$$

$$x \geq 0 \tag{18}$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \tag{19}$$

$$A^{T}u \geq C \tag{20}$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.

Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \to max, \tag{16}$$

$$Ax=B \tag{17}$$

$$x \geq 0 \tag{18}$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \to \min \tag{19}$$

$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \tag{20}$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

# Транспортная задача

**Пример решения транспортной задачи:**

| Пункты | B1 | B2 | B 3 | Запасы |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 4 | 5 | 1 | 40 |
| A2 | 9 | 5 | 2 | 70 |
| Потребности | 10 | 30 | 70 | 110 |

**Решение:**

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \rightarrow max, \quad (16)$$

$$Ax=B \quad (17)$$

$$x \geq 0 \quad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \rightarrow \min \quad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \quad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

| Пункты | B1 | B2 | B 3 | Запасы |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 4 | 5 | 1 **40** | 40 |
| A2 | 9 **10** | 5 **30** | 2 **30** | 70 |
| Потребности | 10 | 30 | 70 | 110 |

# Транспортная задача

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{T}x \to max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{T}b \to \min \qquad (19)$$

$$A^{T}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{T}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^{*}$.

# Транспортная задача

| Пункты | В1 | В2 | В 3 | Запасы |
|---|---|---|---|---|
| **А1** | 4 **10** | 5 | 1 **30** | 40 |
| **А2** | 9 | 5 **30** | 2 **40** | 70 |
| **Потребности** | 10 | 30 | 70 | 110 |

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой.

Рассмотрим исходную каноническую задачу линейного программирования

$$z(x)=C^{\mathrm{T}}x \rightarrow max, \qquad (16)$$

$$Ax=B \qquad (17)$$

$$x \geq 0 \qquad (18)$$

Задача вида

$$w(u) = u^{\mathrm{T}}b \rightarrow \min \qquad (19)$$

$$A^{\mathrm{T}}u \geq C \qquad (20)$$

называется двойственной к задаче (16)-(18).

Требуется найти минимум $w$, которая является целевой функцией; вектор u имеет размерность m; $A^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица.
Эта задача неканоническая.

Обозначим множество допустимых планов двойственной задачи через $\Omega^*$.

# Транспортная задача

Три оптовых склада (A1 A2 A3) поставляют в три магазина розничной сети (B1 B2 B3) некоторый товар. Запасы данного товара на складах (шт.), потребности в нем магазинов (шт.) и тарифы на перевозку (в расчете на 1 шт.) приведены в транспортной таблице ниже. Найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий удовлетворение потребностей магазинов в товаре с минимальными издержками на его транспортировку, а также общие затраты грузоперевозок.

| Магазины / Склады | B1 | B2 | B3 | Запасы |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 6 | 2 | 3 | 20 |
| A2 | 3 | 1 | 4 | 30 |
| A3 | 5 | 7 | 2 | 50 |
| Потребности | 25 | 35 | 40 | |

| Магазины / Склады | B1 | B2 | B3 | Запасы |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 8 | 4 | 1 | 20 |
| A2 | 2 | 3 | 6 | 40 |
| A3 | 5 | 7 | 2 | 20 |
| Потребности | 30 | 15 | 20 | |

# Вопросы для проверки знаний

- Задачи линейного программирования (ЗЛП). Каноническая форма ЗЛП. План. Допустимый план. Теорема о множестве допустимых планов.
- Область допустимых решений. Ограниченная и неограниченная область допустимых решений. Геометрическая интерпретация ЗЛП для двумерного случая.
- Симплекс-метод Данцига. Базисный план. Леммы 1, 2. Теоремы Данцига. Нахождение исходного базисного плана. Переход от одного базисного решения к другому.
- Двойственность в линейном программировании. Типы двойственных задач.
- Задачи линейного целочисленного программирования. Постановка задачи целочисленного программирования. Алгоритм метода Гомори для решения задач целочисленного программирования.
- Транспортные задачи. Постановка задачи и стратегия решения. Методы нахождения начального плана перевозок. Метод северо-западного угла. Метод минимальной стоимости. Решение транспортной задачи методом потенциалов.

# Примеры тестовых заданий для проверки знаний

1) Задачу линейного программирования можно сформулировать так:

A. найти максимум или минимум линейной формы при отсутствии ограничений на переменные;

B. найти нули функции при заданных интервалах их положения;

C. найти максимум или минимум линейной формы при заданных ограничениях в виде равенств или неравенств;

D. найти максимум или минимум нелинейной формы при заданных ограничениях в виде равенств или неравенств.

2) Симплекс-метод в задаче линейного программирования реализуется в виде:

A. системы линейных дифференциальных уравнений;

B. системы рекуррентных соотношений;

C. симплекс таблиц;

D. системы нелинейных дифференциальных уравнений.

3) Один из алгоритмов нахождения решения задачи целочисленного программирования группы методов отсекающих плоскостей называется:

A. алгоритм двойственного симплекс-метода;

B. алгоритм метода ветвей и границ;

C. алгоритм метода Гомори;

D. алгоритм симплекс-метода.

# Примеры тестовых заданий для проверки знаний

4) Метод северо-западного угла это

A. один из методов проверки опорного плана транспортной задачи на оптимальность;

B. один из комбинированных методов дискретного программирования, при котором гиперплоскость, определяемая целевой функцией задачи, вдавливается внутрь многогранника планов соответствующей задачи линейного программирования до встречи с ближайшей целочисленной точкой этого многогранника;

C. один из методов отсечения, с помощью которого решаются задачи целочисленного программирования;

D. один из группы методов определения первоначального опорного плана транспортной задачи.

5) Оптимальный план задачи линейного программирования это

A. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который не входит в допустимую область и доставляет экстремум целевой функции;

B. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который входит в допустимую область и доставляет ненулевое значение целевой функции;

C. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который входит в допустимую область и доставляет нулевое значение целевой функции;

D. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который входит в допустимую область и доставляет экстремум целевой функции.

6) Несбалансированная транспортная задача это

A. открытая транспортная задача;

B. закрытая транспортная задача;

C. произвольная транспортная задача;

D. правильного ответа нет.

7) Если исходная задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то задача двойственная к ней

A. имеет оптимальное решение;

B. может не иметь решения;

C. может не иметь смысла;

D. не имеет решение.

8) Универсальный метод решения задач линейного программирования – это

A. симплексный метод;

B. метод динамического программирования;

C. уравнение Леонтьева;

D. метод множителей Лагранжа.

9) Ограничения в задаче линейного программирования в каноническом виде имеют следующий вид:

A. $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}$$

B. $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array}$$

C. $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

10) Вектор X является планом задачи линейного программирования, если он

A. удовлетворяет ограничениям задачи и условию неотрицательности;

B. содержит m неотрицательных основных переменных и (n-m) свободных компонент;

C. удовлетворяет ограничениям задачи линейного программирования