

# Повторные независимые испытания

1. Формула Бернулли
2. Формула Пуассона
3. Локальная теорема Муавра-Лапласа
4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа
5. Следствия интегральной теоремы

# Пролог

На практике часто проводятся серии экспериментов, независимых относительно некоторого события  $A$ . Это означает, что вероятность наступления события  $A$  в каждом отдельном эксперименте не зависит от исходов других экспериментов серии. В результате каждого эксперимента событие  $A$  может либо наступить, либо не наступить. Пусть вероятность наступления события  $A$  для всех экспериментов серии одинакова и равна  $p$ . Значит, вероятность наступления противоположного события  $\bar{A}$  тоже постоянна для всех экспериментов серии и равна  $q = 1 - p$ . Поставим задачу: *найти вероятность того, что в серии из  $n$  независимых испытаний событие  $A$  наступило ровно  $t$  раз и, следовательно, не наступило  $n - t$  раз.*

# §1. Формула Бернулли

## Теорема.

**Вероятность того, что событие  $A$  наступит  $m$  раз в  $n$  независимых испытаниях равна**

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \quad (1)$$

Доказательство.

$$B_m = A_1 A_2 \dots A_m \bar{A}_{m+1} \dots \bar{A}_n + A_1 \bar{A}_2 A_3 \dots \bar{A}_{n-1} A_n + \dots + \\ + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-m} A_{n-m+1} \dots A_n,$$

$$P(B_m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + \dots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

# Пример 1

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 5 деталей 3 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

*Эксперимент:* выбрать наугад деталь для проверки качества.

*Событие A* : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,8.$$

$n=5$  – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов).

$m=3$  – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события A).

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0,008 \cdot 0,64 =$$

$$= 10 \cdot 0,008 \cdot 0,64 = 0,0512$$

**Ответ:  $\approx 0,05$**

# §1. Формула Бернулли



**Якоб Бернулли**  
(1655-1705)

Формула Бернулли названа в честь её автора – выдающегося математика, одного из основателей теории вероятностей и математического анализа Якоба Бернулли. Он является старшим представителем знаменитой швейцарской династии учёных.

# §1. Формула Бернулли

## Определение.

**Наивероятнейшим числом** наступления события  $A$  в серии  $n$  независимых экспериментов называется число  $m_0$  для которого вероятность наступления события  $A$  не меньше чем для остальных событий серии экспериментов и определяется условием

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \quad (2)$$

## Доказательство.

$$\begin{cases} P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1), \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1). \end{cases}$$

# §1. Формула Бернулли

$$\begin{cases} P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1), \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1). \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1} \\ \frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n-m_0} q \geq \frac{1}{m_0+1} p \\ \frac{1}{m_0} p \geq \frac{1}{n-m_0+1} q \end{cases} \quad \begin{cases} m_0(q+p) \geq np - q \\ np + p \geq m_0(q+p) \end{cases}$$

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

## Пример 2

Сколько деталей нужно проверить, чтобы наивероятнейшее число бракованных равнялось 3, если брак составляет 20 процентов?

*Эксперимент:* выбрать наугад деталь для проверки качества.

*Событие A:* выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,8.$$

**n=?** – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов).

$m_0=3$  – наивероятнейшее число бракованных деталей среди отобранных на проверку (наивероятнейшее число наступлений события A).

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

$$\frac{n}{5} - \frac{4}{5} \leq 3 \leq \frac{n}{5} + \frac{1}{5}, \quad \begin{cases} n \leq 19 \\ n \geq 14 \end{cases}$$

**Ответ: от 14 до 19**



## §2. Формула Пуассона

### Теорема.

Если при неограниченном увеличении числа испытаний  $n$  вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании стремится к нулю, а произведение  $np$  стремится к постоянному числу  $\lambda$ , то вероятность того, что событие  $A$  наступит  $m$  раз в  $n$  независимых испытаниях удовлетворяет равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (3)$$

При постоянных и малых  $p$ , когда  $\lambda = np \leq 10$  из теоремы вытекает формула Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (4)$$

## §2. Формула Пуассона

Доказательство.

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^n (1-p)^{-m}$$

$$P_n(m) = \frac{n^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \left( \left(1 + \frac{1}{-n/\lambda}\right)^{-n/\lambda} \right)^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

## Пример 3

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 50 деталей 3 окажутся с браком, если брак составляет 2 процента?

**Эксперимент:** выбрать наугад деталь для проверки качества.

**Событие  $A$ :** выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,02 \text{ – мало}; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,98.$$

$n=50$  – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – **велико**.

$m=3$  – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события  $A$ ).

$$\lambda = np = 50 \cdot 0,02 = 1 \leq 10, \quad P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$P_{50}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0,0613$$

**Ответ:  $\approx 0,06$**

## §2. Формула Пуассона



**Симеон Дени Пуассон**  
(1781-1840)

В 1837 году была опубликована работа французского математика Пуассона «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах».

В ней было введено дискретное распределение с плотностью вероятности

$$P(Y = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

## §3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

### Теорема.

Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие  $A$  наступит  $m$  раз в  $n$  независимых испытаниях при достаточно большом числе  $n$ , приближённо равна

$$P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \quad (5)$$

где  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  - функция Гаусса,  $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ .

## §3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

**Свойства функции Гаусса**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  :

Функция чётная;

Функция убывает, стремится к нулю  
 $x \rightarrow +\infty$  .

Замечание 1.  $f(x) \approx 0$  при  $x \neq 0$ .

Замечание 2.

При  $npq \geq 20$  приближённые значения вероятности принимают на практике как точные.

## Пример 4

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей 20 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

*Эксперимент:* выбрать наугад деталь для проверки качества.

*Событие A:* выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,8.$$

$n=200$  – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – **велико**.

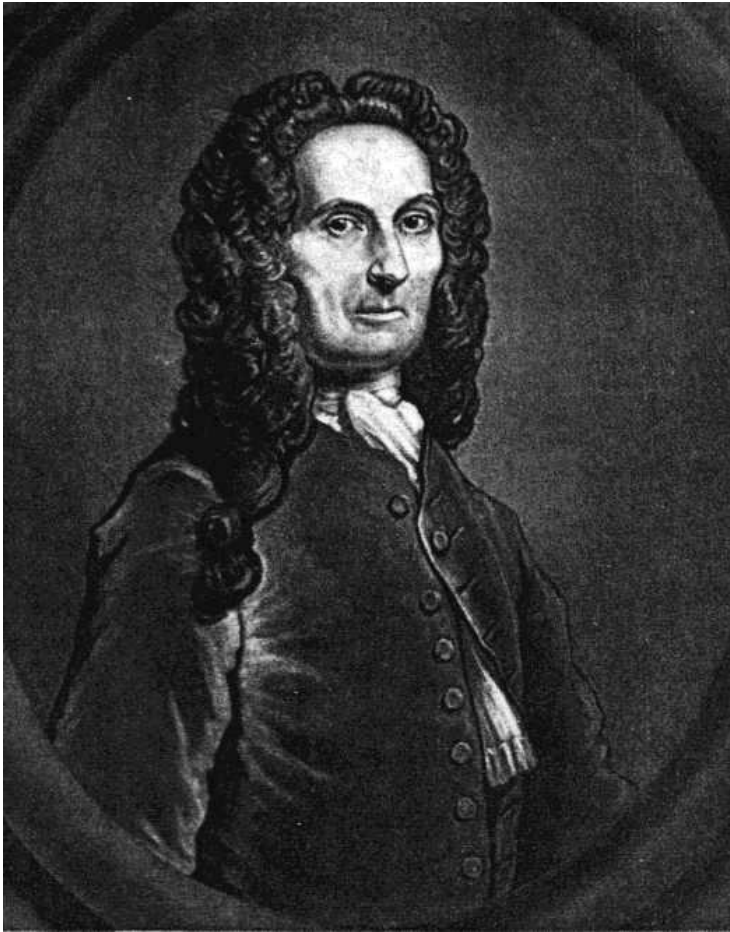
$m=20$  – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события A).

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \geq 20, \quad P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$P_{200}(20) \approx \frac{f(-3,54)}{\sqrt{32}} \approx \frac{0,0008}{5,66} \approx 0,0001$$

**Ответ:  $\approx 0,01\%$**

## §3. Локальная теорема Муавра-Лапласа



Абрахам де Муавр  
(1667-1754)

Английский математик французского происхождения Абрахам де Муавр в 1738 году во втором издании работы «Доктрина случайностей» впервые ввёл функцию нормального распределения и доказал первый частный случай *центральной предельной теоремы*.



## §3. Локальная теорема Муавра-Лапласа



Пьер Симон Лаплас  
(1749-1827)

Большинство результатов де Муавра вскоре были перекрыты трудами французского математика Пьера Симона, маркиза де Лапласа. После обобщения Лапласом в 1812 году теорема получила название теоремы Муавра-Лапласа. Степень возможного влияния де Муавра на Лапласа неясна.

## §4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

### Теорема.

Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число  $m$  наступлений события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях заключено в диапазоне от  $a$  до  $b$ , при достаточно большом числе  $n$  приближённо равна

$$\Phi_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \left( \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \right), \quad (6)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция Лапласа,

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

## §4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

**Свойства функции Лапласа**  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt :$

Функция нечётная;

Функция возрастает, стремясь к единице.  
 $x \rightarrow +\infty$

Замечание 1.  $\Phi(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$  при  $x \ll 1$ .

Замечание 2.

При  $npq \geq 20$  приближённые значения вероятности принимают на практике как точные.

## Пример 5

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей не более 20 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

*Эксперимент:* выбрать наугад деталь для проверки качества.

*Событие A:* выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,8.$$

$n=200$  – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – **велико**.

$0 \leq m \leq 20$  – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события A)

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \geq 20,$$

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \left( \binom{a}{2} - \binom{1}{1} \right), \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$

## Пример 5

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \left( \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \right)$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 40}{\sqrt{32}} \approx -7,07; \quad \Phi(x_1) = -\Phi(7,07) = -1$$

$$x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 40}{\sqrt{32}} \approx -3,54; \quad \Phi(x_2) = -\Phi(3,54) = -0,9996$$

$$P_{200}(0 \leq m \leq 20) \approx \frac{1}{2} \left( -0,9996 - (-1) \right) = 0,0002$$

Ответ:  $\approx 0,02\%$

## §5. Следствия интегральной теоремы

### Следствие 1.

Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1,  $m$  – число наступлений события  $A$  в серии  $n$  независимых испытаний, то при достаточно большом значении  $n$  при  $\varepsilon > 0$  справедливо приближённое равенство

$$\Phi_n(|m - np| \leq \varepsilon) \approx \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} \right). \quad (7)$$

## Пример 6

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей от 30 до 50 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

*Эксперимент:* выбрать наугад деталь для проверки качества.

*Событие A* : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,8.$$

$n=200$  – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – **велико**.

$30 \leq m \leq 50$  – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события A)

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \geq 20,$$

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \left( \binom{a}{2} - \binom{1}{1} \right), \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$

## Пример 6

$$np = 200 \cdot 0,2 = 40,$$

$$30 \leq m \leq 50 \Leftrightarrow -10 \leq m - 40 \leq 10 \Leftrightarrow |m - 40| \leq 10,$$

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \left( \binom{b}{2} - \binom{a}{1} \right) \quad \boxtimes$$
$$P_n(|m - np| \leq \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right), \quad \varepsilon = 10$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = \frac{10}{\sqrt{32}} \approx 1,77; \quad \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi(1,77) = 0,0833$$

$$P_{200}(30 \leq m \leq 50) \approx 0,0833$$

Ответ:  $\approx 0,08$



## §5. Следствия интегральной теоремы

### Следствие 2.

Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1,  $m$  – число наступлений события  $A$  в серии  $n$  независимых испытаний, то при достаточно большом значении  $n$  справедливо приближённое равенство

$$\Phi_n \left( \alpha \leq \frac{m}{n} \leq z\beta \right) \approx \frac{1}{2} \left( \binom{n}{m} - \binom{n}{m-1} \right), \quad (8)$$

где  $\frac{m}{n}$  – частота события  $A$ ,  $z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ ,  $z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ .

# Пример 7

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей доля бракованных составит от 0,3 до 0,5, если брак составляет 20 процентов?

**Эксперимент:** выбрать наугад деталь для проверки качества.

**Событие A:** выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,8.$$

$n=200$  – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – **велико**.

$0,3 \leq \frac{m}{n} \leq 0,5$  – доля бракованных деталей среди отобранных на проверку (частость события A).

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \geq 20,$$

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \left( \binom{n}{2} - \binom{n}{1} \right), \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$



## Пример 7

$$\Phi_n \left( \alpha \leq \frac{m}{n} \leq z\beta \right) \approx \frac{1}{2} \left( \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \right)$$

$$z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0,3 - 0,2}{\sqrt{0,0008}} \approx 3,54; \quad \Phi(z_1) = \Phi(3,54) = 0,9996$$

$$z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0,5 - 0,2}{\sqrt{0,0008}} \approx 10,61; \quad \Phi(z_2) = \Phi(10,61) = 1$$

$$\Phi_{200} \left( 0,3 \leq \frac{m}{n} \leq 0,5 \right) \approx \frac{1}{2} \left( \Phi(10,61) - \Phi(3,54) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 0,9996) = 0,0002$$

Ответ:  $\approx 0,02\%$

## §5. Следствия интегральной теоремы

### Следствие 3.

Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1,  $m$  – число наступлений события  $A$  в серии  $n$  независимых испытаний, то при достаточно большом значении  $n$  при  $\varepsilon > 0$  справедливо приближённое равенство

$$\Phi_n \left( \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \approx \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \right), \quad (9)$$

где  $\frac{m}{n}$  – частота события  $A$ .

# Пример 8

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей доля бракованных составит от 0,1 до 0,3, если брак составляет 20 процентов?

**Эксперимент:** выбрать наугад деталь для проверки качества.

**Событие A:** выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,8.$$

$n=200$  – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – **велико**.

$0,1 \leq \frac{m}{n} \leq 0,3$  – доля бракованных деталей среди отобранных на проверку (частость события A).

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \geq 20,$$

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \left( \binom{n}{2} - \binom{n}{1} \right), \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$



## Пример 8

$$P_n \left( \alpha \leq \frac{m}{n} \leq \beta \right) \approx \frac{1}{2} \left( \binom{2}{2} - \binom{2}{1} \right)$$

$$0,1 \leq \frac{m}{n} \leq 0,3 \Leftrightarrow -0,1 \leq \frac{m}{n} - 0,2 \leq 0,1 \Leftrightarrow \left| \frac{m}{n} - 0,2 \right| \leq 0,1$$

$$\boxtimes P_n \left( \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \approx \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{pq/n}} \right), \varepsilon = 0,1$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0,1}{\sqrt{0,0008}} \approx 3,54; \quad \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{pq/n}} \right) = \Phi(3,54) = 0,9996$$

$$P_{200} \left( 0,1 \leq \frac{m}{n} \leq 0,3 \right) \approx 0,9996$$

**Ответ:  $\approx 100\%$**

Продолжение следует...