ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Теория вероятностей и математическая статистика
лектор Макеева О.В.

Лекция 3

Повторные независимые испытания

1. Формула Бернулли
2. Формула Пуассона
3. Локальная теорема Муавра-Лапласа
4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа
5. Следствия интегральной теоремы

Пролог

На практике часто проводятся серии экспериментов, независимых относительно некоторого события A. Это означает, что вероятность наступления события A в каждом отдельном эксперименте не зависит от исходов других экспериментов серии. В результате каждого эксперимента событие A может либо наступить, либо не наступить. Пусть вероятность наступления события A для всех экспериментов серии одинакова и равна p. Значит, вероятность наступления противоположного события $\bar{A}$ тоже постоянна для всех экспериментов серии и равна $q = 1 - p$. Поставим задачу: *найти вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A наступило ровно m раз и, следовательно, не наступило $n - m$ раз.*

§1. Формула Бернулли

Теорема.

Вероятность того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях равна

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (1)$$

Доказательство.

$$B_m = A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_n + A_1 \overline{A}_2 A_3 \ldots \overline{A}_{n-1} A_n + \ldots +$$
$$+ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n,$$

$$P(B_m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Пример 1

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 5 деталей 3 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2;\ q = P\left(\overline{A}\right) = 1 - p = 0,8.$$

n=5 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов).

m=3 – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события A).

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0,008 \cdot 0,64 =$$

$$= 10 \cdot 0,008 \cdot 0,64 = 0,0512$$

Ответ: ≈0,05

§1. Формула Бернулли

Якоб Берн**у**лли
(1655-1705)

Формула Бернулли названа в честь её автора – выдающегося математика, одного из основателей теории вероятностей и математического анализа Якоба Бернулли.
Он является старшим представителем знаменитой швейцарской династии учёных.

§1. Формула Бернулли

Определение.

Наивероятнейшим числом наступления события A в серии n независимых экспериментов называется число m_0 для которого вероятность наступления события A не меньше чем для остальных событий серии экспериментов и определяется условием

$$np - q \le m_0 \le np + p. \qquad (2)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} P_n(m_0) \ge P_n(m_0 + 1), \\ P_n(m_0) \ge P_n(m_0 - 1). \end{cases}$$

§1. Формула Бернулли

$$\begin{cases} P_n(m_0) \ge P_n(m_0+1), \\ P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1). \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \ge \dfrac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1} \\ \dfrac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \ge \dfrac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n-m_0} q \ge \dfrac{1}{m_0+1} p \\ \dfrac{1}{m_0} p \ge \dfrac{1}{n-m_0+1} q \end{cases} \qquad \begin{cases} m_0(q+p) \ge np-q \\ np+p \ge m_0(q+p) \end{cases}$$

$$np-q \le m_0 \le np+p$$

Пример 2

Сколько деталей нужно проверить, чтобы наивероятнейшее число бракованных равнялось 3, если брак составляет 20 процентов?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие А : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2;\ q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0,8.$$

n=? – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов).

$m_0=3$ – наивероятнейшее число бракованных деталей среди отобранных на проверку (наивероятнейшее число наступлений события А).

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

$$\frac{n}{5} - \frac{4}{5} \le 3 \le \frac{n}{5} + \frac{1}{5}, \qquad \begin{cases} n \le 19 \\ n \ge 14 \end{cases}$$

Ответ: от 14 до 19

§2. Формула Пуассона

Теорема.

Если при неограниченном увеличении числа испытаний *n* вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании стремится к нулю, а произведение *np* стремится к постоянному числу λ , то вероятность того, что событие *A* наступит *m* раз в *n* независимых испытаниях удовлетворяет равенству

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}. \qquad (3)$$

При постоянных и малых *p*, когда $\lambda = np \leq 10$ из теоремы вытекает формула Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}. \qquad (4)$$

§2. Формула Пуассона

Доказательство.

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^n (1-p)^{-m}$$

$$P_n(m) = \frac{n^m \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \left(\left(1+\frac{1}{-n/\lambda}\right)^{-n/\lambda}\right)^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

Пример 3

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 50 деталей 3 окажутся с браком, если брак составляет 2 процента?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0{,}02 \ - \ \text{мало}; \ q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}98.$$

n=50 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – велико.
m=3 – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события A).

$$\lambda = np = 50 \cdot 0{,}02 = 1 \le 10, \qquad P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$P_{50}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0{,}0613$$

Ответ: ≈0,06

§2. Формула Пуассона

Симе**о**н Ден**и** Пуасс**о**н
(1781-1840)

В 1837 году была опубликована работа французского математика Пуассона «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах».
В ней было введено дискретное распределение с плотностью вероятности

$$P(Y=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

§3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Теорема.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, приближённо равна

$$P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (5)$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ **- функция Гаусса,** $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

§3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Свойства функции Гаусса $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ **:**

1) $f(-x) = f(x)$; функция чётная;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, функция убывая стремится к нулю .

<u>Замечание 1.</u> $f(x) \approx 0$ при $x \geq 4$.

<u>Замечание 2.</u>

При $npq \geq 20$ приближённые значения вероятности принимают *на практике* как точные.

Пример 4

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей 20 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2;\; q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0,8.$$

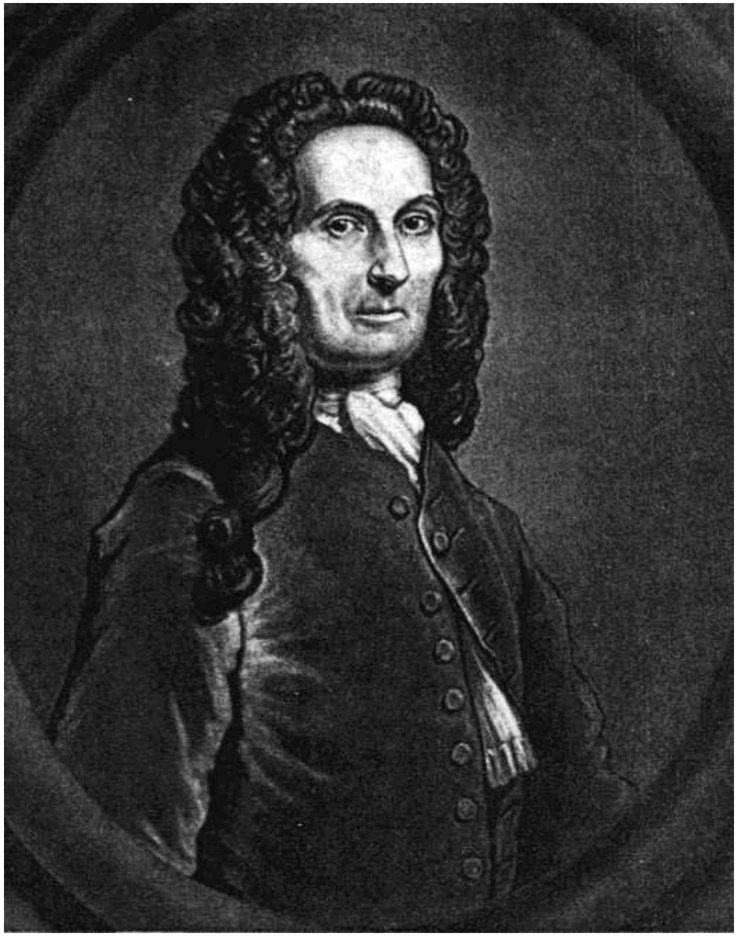
n=200 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – великo.
m=20 – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события A).

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \geq 20, \quad P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$P_{200}(20) \approx \frac{f(-3,54)}{\sqrt{32}} \approx \frac{0,0008}{5,66} \approx 0,0001$$

Ответ: ≈0,01%

§3. Локальная теорема Муавра-Лапласа



Абрах**а**м де Му**а**вр
(1667-1754)

Английский математик французского происхождения Абрахам де Муавр в 1738 году во втором издании работы «Доктрина случайностей» впервые ввёл функцию нормального распределения и доказал первый частный случай *центральной предельной теоремы*.

§3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Пьер Сим**о**н Лапл**а**с
(1749-1827)

Большинство результатов де Муавра вскоре были перекрыты трудами французского математика Пьера Симона, маркиза де Лапласа. После обобщения Лапласом в 1812 году теорема получила название теоремы Муавра-Лапласа. Степень возможного влияния де Муавра на Лапласа неясна.

§4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема.

Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число *m* наступлений события *A* в *n* независимых испытаниях заключено в диапазоне от *a* до *b*, при достаточно большом числе *n* приближённо равна

$$P_n\left(a \le m \le b\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(x_2\right)-\Phi\left(x_1\right)\right), \qquad (6)$$

где $\Phi\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ **– функция Лапласа,**

$$x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}.$$

§4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Свойства функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ **:**

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; функция нечётная;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$, функция возрастая стремится к е динице.

<u>Замечание 1.</u> $\Phi(x) \approx 1$ при $x \geq 4$.

<u>Замечание 2.</u>

При $npq \geq 20$ приближённые значения вероятности принимают *на практике* как точные.

Пример 5

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей не более 20 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2;\ q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0,8.$$

n=200 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – велико.

$0 \le m \le 20$ – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события А)

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \ge 20,$$

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right),\quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$

Пример 5

$$P_n\left(a \le m \le b\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right)\right)$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 40}{\sqrt{32}} \approx -7,07; \qquad \Phi\left(x_1\right) = -\Phi\left(7,07\right) = -1$$

$$x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 40}{\sqrt{32}} \approx -3,54; \quad \Phi\left(x_2\right) = -\Phi\left(3,54\right) = -0,9996$$

$$P_{200}\left(0 \le m \le 20\right) \approx \frac{1}{2}\left(-0,9996 - \left(-1\right)\right) = 0,0002$$

Ответ: ≈0,02%

§5. Следствия интегральной теоремы

Следствие 1.

Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, *m* – число наступлений события *A* в серии *n* независимых испытаний, то при достаточно большом значении *n* при ε>0 справедливо приближённое равенство

$$P_n\left(\left|m-np\right|\le\varepsilon\right)\approx\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (7)$$

Пример 6

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей от 30 до 50 окажутся с браком, если брак составляет 20 процентов?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2; \; q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0,8.$$

n=200 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – велико.

$30 \le m \le 50$ – число бракованных деталей среди отобранных на проверку (число наступлений события А)

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \ge 20,$$

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right), \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$

Пример 6

$$np = 200 \cdot 0,2 = 40,$$

$$30 \le m \le 50 \Leftrightarrow -10 \le m - 40 \le 10 \Leftrightarrow |m - 40| \le 10,$$

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right)$$

$$P_n\left(|m - np| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right), \ \varepsilon = 10$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = \frac{10}{\sqrt{32}} \approx 1,77; \ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi(1,77) = 0,0833$$

$$P_{200}(30 \le m \le 50) \approx 0,0833$$

Ответ: ≈0,08

§5. Следствия интегральной теоремы

Следствие 2.

Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, *m* – число наступлений события *A* в серии *n* независимых испытаний, то при достаточно большом значении *n* справедливо приближённое равенство

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\right), \qquad (8)$$

где $\frac{m}{n}$ **– частость события A,** $z_1 = \dfrac{\alpha - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}, z_2 = \dfrac{\beta - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}.$

Пример 7

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей доля бракованных составит от 0,3 до 0,5, если брак составляет 20 процентов?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2;\ q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0,8.$$

n=200 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – велико.

$0,3 \le \dfrac{m}{n} \le 0,5$ – доля бракованных деталей среди отобранных на проверку (частость события А).

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \ge 20,$$

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right), \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$$

Пример 7

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(z_2\right) - \Phi\left(z_1\right)\right)$$

$$z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0,3 - 0,2}{\sqrt{0,0008}} \approx 3,54; \qquad \Phi\left(z_1\right) = \Phi\left(3,54\right) = 0,9996$$

$$z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0,5 - 0,2}{\sqrt{0,0008}} \approx 10,61; \quad \Phi\left(z_2\right) = \Phi\left(10,61\right) = 1$$

$$P_{200}\left(0,3 \le \frac{m}{n} \le 0,5\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(10,61\right) - \Phi\left(3,54\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 0,9996\right) = 0,0002$$

Ответ: ≈0,02%

§5. Следствия интегральной теоремы

Следствие 3.

Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, *m* – число наступлений события *A* в серии *n* независимых испытаний, то при достаточно большом значении *n* при ε>0 справедливо приближённое равенство

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right), \qquad (9)$$

где $\frac{m}{n}$ – частость события А.

Пример 8

Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 200 деталей доля бракованных составит от 0,1 до 0,3, если брак составляет 20 процентов?

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие А : выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2;\ q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0,8.$$

n=200 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов) – велико.

$0,1 \le \frac{m}{n} \le 0,3$ – доля бракованных деталей среди отобранных на проверку (частость события А).

$$npq = 200 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32 \ge 20,$$

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right),\quad x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$$

Пример 8

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\right)$$

$$0,1 \le \frac{m}{n} \le 0,3 \Leftrightarrow -0,1 \le \frac{m}{n} - 0,2 \le 0,1 \Leftrightarrow \left|\frac{m}{n} - 0,2\right| \le 0,1$$

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq/n}}\right), \ \varepsilon = 0,1$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0,1}{\sqrt{0,0008}} \approx 3,54; \ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq/n}}\right) = \Phi(3,54) = 0,9996$$

$$P_{200}\left(0,1 \le \frac{m}{n} \le 0,3\right) \approx 0,9996$$

Ответ: ≈100%

Продолжение следует…