Предел и непрерывность функции одной переменной

Бесконечно малые функции

Пусть функция $\alpha(x)$ определена в окрестности точки ***a***, кроме, быть может, самой точки ***a***.

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией*** (б.м.ф.) при ***x***, стремящемся к ***a***, если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Определение б.м.ф. на бесконечности

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией*** (б.м.ф.) при $x \to \infty,$ $x \to +\infty$ или $x \to -\infty,$ если

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$$ или $$\lim_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0$$

Примеры.

$1.\ \alpha(x) = x - 1$ б.м.ф. при $x \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \alpha(x) = \lim_{x\to 1}(x-1) = 0.$$

$\alpha(x) = x - a$ б.м.ф. при $x \to a$

$2.\ \alpha(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ б.м.ф. при $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$3.\ \alpha(x) = e^{-x}$ б.м.ф. при $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

Свойства бесконечно малых функций

Теорема 5 (сумма б.м.ф.)

Если $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$,

то их сумма

$$\alpha(x) + \beta(x)$$

есть также б.м.ф. при $x \to a.$

Доказательство:

Функция $\alpha(x)$ б.м.ф. при $x \to a$.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0 : \forall x \neq a \; |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Функция $\beta(x)$ б.м.ф. при $x \to a$.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_2 > 0 : \forall x \neq a \; |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\forall x \neq a \; |x - a| < \delta \;\; \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\alpha(x) + \beta(x)| < |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \alpha(x) + \beta(x)$ б.м.ф. при $x \to a$.

Теорема 6 (произведение б.м.ф. на ограниченную функцию)

Если функция $\alpha(x)$ является б.м.ф. при $x \to a$, а функция ***f(x)*** ограничена в окрестности точки ***a***, то произведение

$$\alpha(x) \cdot f(x)$$

есть б.м.ф. при $x \to a.$

Доказательство:

$f(x)$ - ограничена в окрестности точки a.

$$\exists M > 0 \quad \delta_1 > 0$$

$$| f(x) | \le M \quad \forall x \in U(a, \delta_1) = (a - \delta_1, a + \delta_1)$$

$\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_2 > 0 : \forall x \ \ 0 < | x - a | < \delta_2 \Rightarrow | \alpha(x) | < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\forall x \ \ 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | \alpha(x) | < \frac{\varepsilon}{M} \wedge | f(x) | \le M$$

$$| \alpha(x) \cdot f(x) | = | \alpha(x) | \cdot | f(x) | < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

$$\forall x \ \ 0 < | x - a | < \delta$$

$\alpha(x) \cdot f(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

Пример.

$$y = x \cdot \sin\frac{1}{x}$$

$\alpha(x) = x$ - б.м.ф. при $x \to 0.$

$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0$ -ограничена в любой проколотой окрестности точки x=0.

$y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ - б.м.ф. при $x \to 0.$

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

Следствие.

Если $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$,

а функция ***f(x)*** имеет конечный предел в точке ***a***, то произведение

$\alpha(x) \cdot f(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

Лемма.

Если функция ***f(x)*** в точке ***x=a*** имеет предел, отличный от нуля , то функция

$\frac{1}{f(x)}$ - ограничена в окрестности точки ***x=a***.

Доказательство: $$\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{|A|}{2} \qquad |A - f(x)| < \frac{|A|}{2}$$

$$|A| - |f(x)| \leq |A - f(x)| < \frac{|A|}{2}$$

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \qquad \forall x \ \ 0 < |x-a| < \delta$$

$\frac{1}{f(x)}$ определена и $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|}$

$\frac{1}{f(x)}$ - ограничена в проколотой окрестности точки $x=a$.

Теорема 7

Если $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$,
а функция ***f(x)*** в точке ***x=a*** имеет предел, отличный от нуля , то частное

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)}$$ - есть б.м.ф. при $x \to a$.

Доказательство:

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$$

$f(x)$ имеет конечный предел в точке $x=a$.

$\overset{\text{лемма}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{f(x)}$ - ограничена в проколотой окрестности точки $x=a$.

$\overset{\text{теорема 6}}{\Rightarrow} \alpha(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}$ - б.м.ф. при $x \to a$.

Теорема 8(связь функции, имеющей предел, с её пределом и бесконечно малой функцией)

Пусть функция ***f(x)*** определена в окрестности точки ***x=a***, кроме, быть может, самой точки ***a***.

Для того, чтобы число ***A*** было пределом функции ***f(x)*** при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы ***f(x)*** можно было представить в виде суммы

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

Где $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to a.$

$$\left(\exists \lim_{x\to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(f(x) = A + \alpha(x): \quad \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0\right)$$

Необходимость. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Положим $\alpha(x) = f(x) - A$

и докажем, что $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall x,\, 0 < |x - a| < \delta \;\; \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$|\alpha(x)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \alpha(x)$$ - б.м.ф. при $x \to a$.

Достаточность.

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

$\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall x,\, 0 < |x - a| < \delta \;\; \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

$\alpha(x) = f(x) - A \quad \Rightarrow | f(x) - A | < \varepsilon$ для тех же значений x.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

Теорема 9 (арифметические операции над пределами)

Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в окрестности точки $x=a$, кроме, быть может, самой точки a.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы в точке $\boldsymbol{x=a}$, то имеют пределы также их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$, произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$, причём

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\qquad(\lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0)$$

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$

$$\overset{\text{теорема 8}}{\Rightarrow} \quad f(x) = A + \alpha(x), \qquad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

$$f(x)\cdot\varphi(x) = [A + \alpha(x)]\cdot[B + \beta(x)] =$$

$$= A\cdot B + B\cdot\alpha(x) + A\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)$$

$B\cdot\alpha(x),\ A\cdot\beta(x),\ \alpha(x)\cdot\beta(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

$\Rightarrow \gamma(x) = B\cdot\alpha(x) + A\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)$ - б.м.ф. при $x \to a$.

$$f(x)\cdot\varphi(x) = A\cdot B + \gamma(x)$$

$$\overset{\text{теорема 8}}{\Rightarrow} \quad \exists \lim_{x\to a} [f(x)\cdot\varphi(x)] = A\cdot B$$

Следствие.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Определение бесконечно большой функции

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки а, кроме, быть может, самой точки а.

Если для любого, как угодно большого, числа $M>0$ существует такое число δ, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию

$$|x-a|<\delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x)|>M,$$

То функцию ***f(x)*** называют *бесконечно большой функцией* при $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

f(x) – б.б.ф.

$$(\lim_{x\to a} f(x) = \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0:\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x)| > M\right)$$

f(x) – положительная б.б.ф.

$$(\lim_{x\to a} f(x) = +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0:\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow f(x) > M\right)$$

f(x) – отрицательная б.б.ф.

$$(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0:\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow f(x) < -M\right)$$

Пример. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ – *б.б.ф. при* $x\to 0,\ x\neq 0$

Решение.

$$\left(\forall M>0\ \exists\delta(M)>0:\ \forall x,\ 0<\left|x-a\right|<\delta\quad\Rightarrow\left|f(x)\right|>M\right)$$

$$|\,f(x)\,|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|\,x\,|}>M\quad\Leftrightarrow|\,x\,|=|\,x-0\,|<\frac{1}{M}$$

$$\delta=\frac{1}{M}\qquad\forall x\neq 0\qquad|\,x-0\,|=|\,x\,|<\frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow|\,f(x)\,|=\frac{1}{|\,x\,|}>M$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{x}-\text{б.б. при }x\to 0$$

Теорема о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций

Если $\alpha(x) - б.м.ф.\ \ при\ x \to a$ и в некоторой окрестности точки ***a***, кроме, быть может самой точки ***a***, $\alpha(x) \neq 0$, то функция

$$F(x) = \frac{1}{\alpha(x)} - б.б.ф.\ при\ \ x \to a.$$

И, наоборот, если $F(x) - б.б.ф.\ \ при\ x \to a,$

то

$$\alpha(x) = \frac{1}{F(x)} - б.м.ф.\ при\ \ x \to a.$$

Доказательство.

Пусть $\alpha(x) - б.м.ф.\ \ при\ x \to a.$

Следовательно, $\exists \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

$$\Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow\ |\alpha(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Обозначим $\frac{1}{\varepsilon} = M \quad F(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$

$$\forall M > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x, 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow\ |F(x)| > M \quad \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{x \to a} F(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\alpha(x)} - б.б.ф.\ при\ x \to a.$$

Обратное утверждение доказывается аналогично.

Односторонние пределы

Пусть функция ***f(x)*** определена только слева (или только справа) от ***a***, т.е. в интервале ***x*** < ***a*** (***x*** > ***a***).

Определение 1.

Число ***а*** называется *левосторонним пределом* функции ***f(x)*** при $x \to a_{-}$ (***x*** < ***a***), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : a - \delta < x < a \quad \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

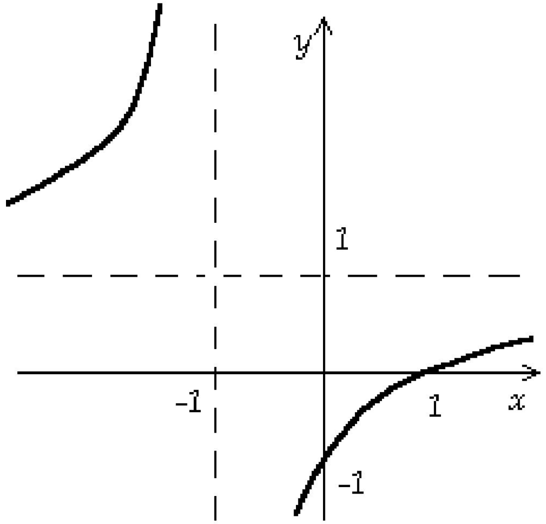
Определение 2.

Число ***а*** называется *правосторонним пределом* функции ***f(x)*** при $x \to a_{+}$ (***x*** >***a***), если

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = A$$

Примеры.

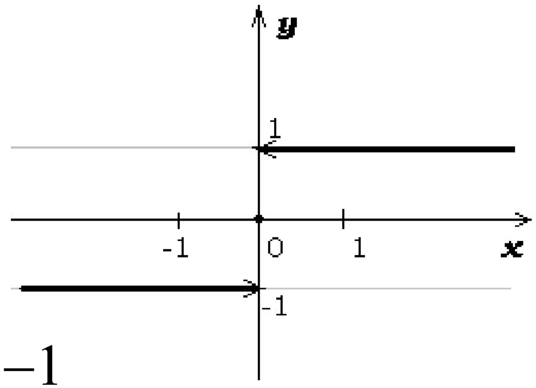
$$1.\; y=\frac{x-1}{x+1}$$ дробно-линейная функция



$$\lim_{x\to -1-} f(x)=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=-\infty$$

$$2.\; f(x)=\operatorname{sgn} x$$



$$\exists \lim_{x\to 0+}(\operatorname{sgn} x)=1, \quad \exists \lim_{x\to 0-}(\operatorname{sgn} x)=-1$$

Теорема

Для того, чтобы функция ***f(x)*** имела предел в точке ***a***, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы функции ***f(x)*** в точке ***a*** справа и слева и они были равны между собой.

$$\exists \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = A \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) = A$$

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta),\ x \neq a \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in (a-\delta, a),\ x \neq a \quad \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

$$\Rightarrow \forall x \in (a, a+\delta),\ x \neq a \quad \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

Обратно, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A \qquad \lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_1, \delta_2 > 0: \quad a-\delta < x < a \qquad a < x < a+\delta$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Предел функции (продолжение)

- Бесконечно малые функции.
- Сумма б.м.ф., произведение б.м.ф. на ограниченную, частное б.м.ф. и функции, имеющей предел в точке.
- Связь функции, имеющей предел, с её пределом и б.м.ф.
- Арифметические операции над пределами.
- Бесконечно большие функции.
- Связь между б.м.ф. и б.б.ф.
- Односторонние пределы.