СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение: ***Случайной*** называют такую величину, которая принимает значения в зависимости от стечения случайных обстоятельств.

Например: число очков, выпадающее при бросании игрального кубика, число студентов на лекции, продолжительность жизни человека, рост людей и т. д.

Случайные величины обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита X, Y, а их возможные значения - строчными буквами x_1, x_2, y_1, y_2, ...

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ДИСКРЕТНЫЕ	НЕПРЕРЫВНЫЕ
- величины, принимающие счетное множество значений.	- величины, принимающие любые значения внутри некоторого интервала.
Например : число пациентов на приеме у врача, число букв на странице, число молекул в заданном объеме и т.д.	*Например: температура воздуха, масса тела, рост человека и т.д.*

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Законом распределения случайной величины называется совокупность всех возможных значений этой величины и, соответствующих этим значениям, вероятностей (или частот встречаемости).

Например:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
p	p_1	p_2	p_3	p_4	…	p_n

или

x	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
m	m_1	m_2	m_3	m_4	…	m_n

- Закон распределения может быть представлен также в виде формулы или графика (т.е. графически).

Основные особенности закона распределения случайной величины можно описать несколькими числами, определяемыми соответствующими формулами. Эти числа называются ***числовыми характеристиками случайной величины:***

1. ***Математическое ожидание*** **-** (среднее значение) случайной величины есть сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i-1}^{n} x_i p_i$$

Модой распределения дискретной случайной величины называют такое значение случайной величины x_m, вероятность которого больше вероятности предыдущего и последующего значений, т. е. вероятность имеет максимум в точке x_m.

В законе распределения могут быть один, два и более максимумов вероятности. Каждое значение случайной величины, соответствующее максимуму вероятности, называется *модой*. Распределения, имеющие одну моду, называются *одномодальными,* а распределения, имеющие две или более мод, называются *двухмодальными* или *многомодальными*.

2. Дисперсия случайной величины - это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(x)=(x_1-M(X))^2p_1+(x_2-M(X))^2p_2+\ldots+(x_i-M(X))^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(M(X)-x_i)^2p_i$$

3. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma=\sqrt{D(x)}$$

ЗАДАЧИ

1. При исследовании скорости распространения механической волны на поражённых участках кожи у больных псориазом в регрессирующей стадии были получены следующие результаты, м/с: 38, 39, 41,41, 38, 43, 40, 40, 42, 38, 38, 39, 38, 41, 42, 41, 42, 41, 39, 43, 42, 43, 40, 39, 40, 38, 43, 42, 39, 42. Составить закон распределения случайной величины, которой является скорость распространения механической волны. Найти его моду.

Решение: всего 30 элементов. Значение 38 встречается 6 раз, 39-5 раз, 40-4 раза, 41- 5 раз, 42 – 6 раз, 43 – 4 раза. Вычислим вероятности и составим таблицу.

X_i	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**
p_i	0,2	0,17	0,13	0,17	0,2	0,13

Модой являются значения 38 и 42.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Число девушек в двадцати учебных группах равно соответственно 8, 5, 7, 8, 4, 6, 7, 5, 8, 6, 9, 6, 7, 5, 7, 4, 8, 4, 5, 7. Число девушек в группе, выбранной наугад, является случайной величиной. Составить ее закон распределения. Найти его моду.

2. На экзамене по математике студенты получили 13 пятерок, 38 четверок, 33 тройки. Составить закон распределения случайной величины, которой является оценка, полученная на экзамене наугад выбранным студентом. Найти его моду.

3. Игральный кубик имеет 6 одинаковых граней с числом очков от 1 до 6. Составить закон распределения для случайной величины, представляющей собой число очков, выпадающих при бросании кубика.

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В случае непрерывной случайной величины нельзя написать закон распределения в виде таблицы, поскольку непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого промежутка. Для характеристики распределения непрерывной случайной величины используют ***функцию распределения*** и ***плотность распределения вероятностей.***

Функцией распределения непрерывной случайной величины *X* называется функция F(x), равная вероятности того, что в результате испытания случайная величина примет значение, меньшее *x*:

$$F(x) = P(X < x),$$

где *F(x)* - функция аргумент функции распределения; *X* - случайная величина; *P(X* < x) - вероятность того, что случайная величина *X* примет какое-либо значение, меньшее *x*.

- *Каждая непрерывная случайная величина имеет свою функцию распределения.*
- *Функция распределения F(x) неубывающая и принимает значения в пределах от 0 до 1.*

__Плотностью распределения вероятностей (плотностью вероятности) f(x)__ непрерывной случайной величины *X* называется производная функции распределения *F(x)* этой случайной величины:

$$\underline{f(x) = F'(x).}$$

f(x) - плотность вероятности;

F(x) - функция распределения.

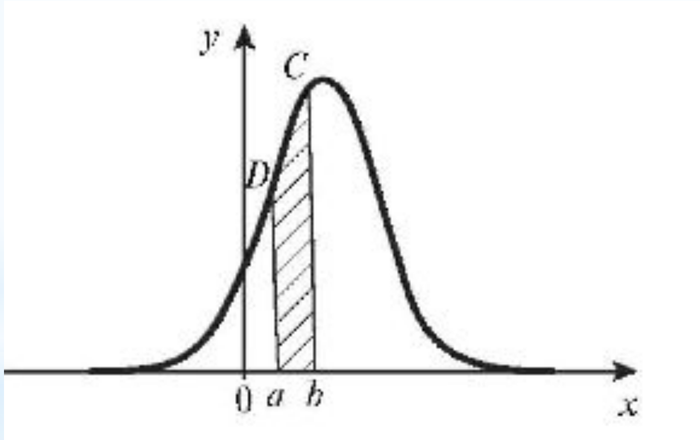


График плотности вероятности f (x) непрерывной случайной величины

Плотность вероятности (функция распределения) показывает, как меняется вероятность, отнесенная к интервалу ***dx*** случайной величины, в зависимости от значения самой величины:

$$f(x) = \frac{dP}{dx}$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины:

1. Математическое ожидание;
2. Дисперсия;
3. СКО.

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Закон распределения непрерывной случайной величины X называется *нормальным,* если плотность вероятности описывается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

где μ - математическое ожидание;

σ - среднее квадратическое отклонение.

Нормальный закон распределения называется также законом Гаусса по имени великого немецкого математика и физика Карла Гаусса, подробно исследовавшего этот закон. Многие случайные величины, встречающиеся в природе (в том числе в медицине и фармации), распределены приблизительно по нормальному закону с различными значениями μ и σ.

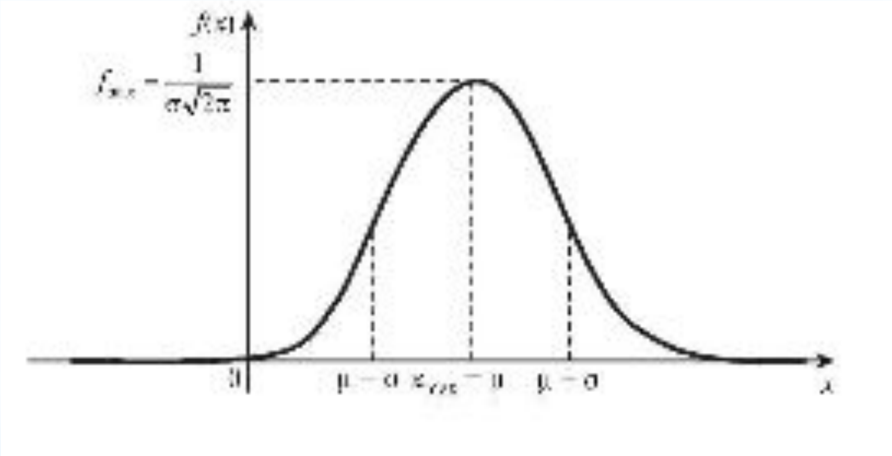
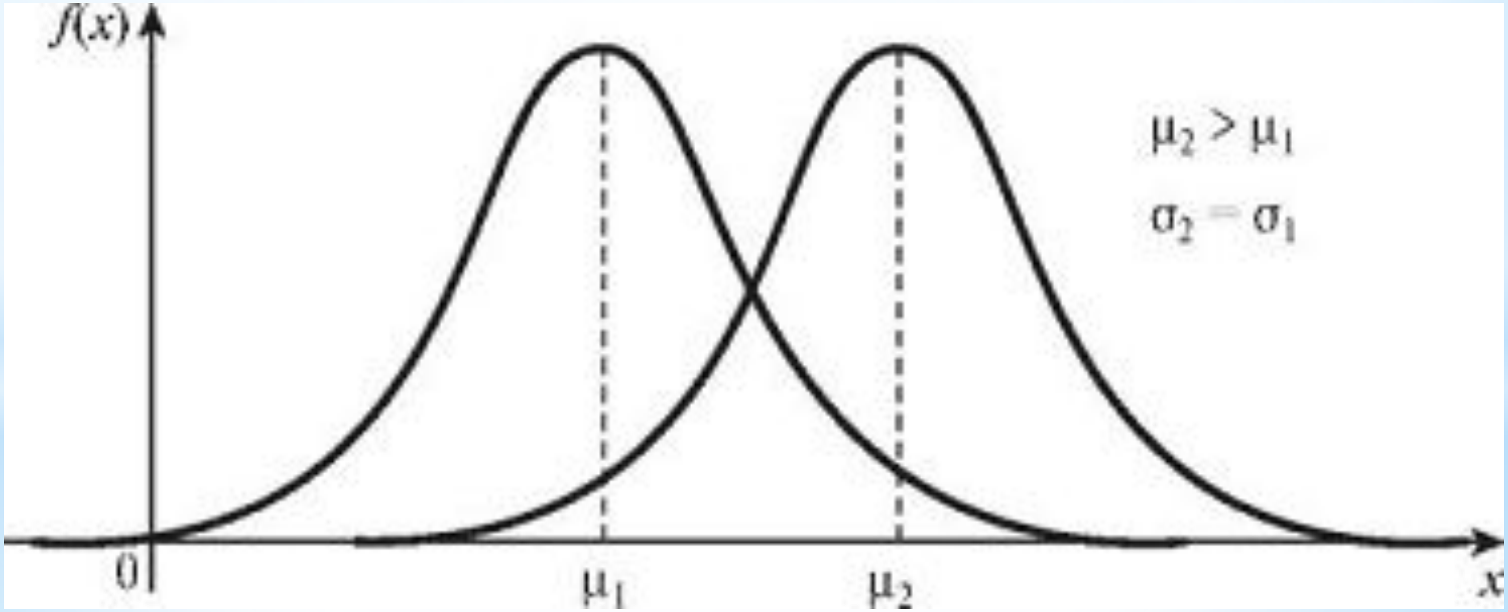
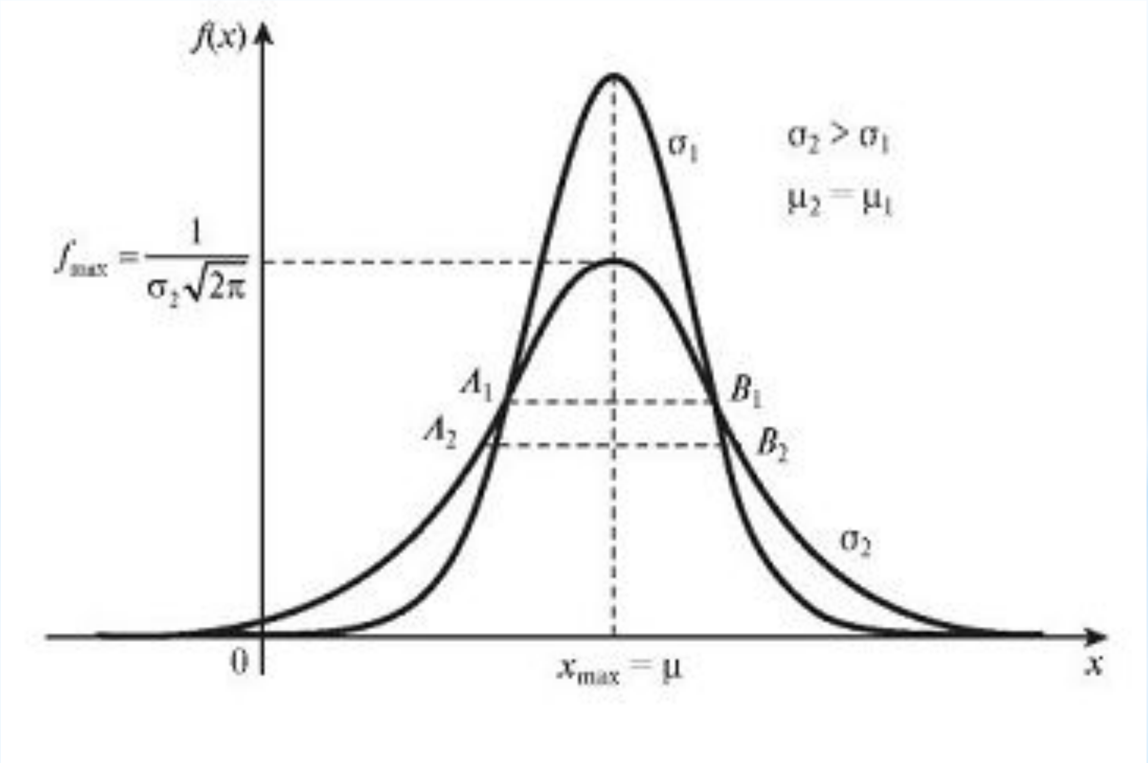


График кривой нормального распределения (кривая Гаусса). Он симметричен относительно точки x = μ.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами - математическим ожиданием μ и средним квадратическим отклонением σ. Различные случайные величины, распределенные по нормальному закону, имеют разные μ и σ. При изменении математического ожидания μ и неизменном σ кривая нормального распределения, не изменяя своей формы, смещается вдоль оси ox.



Среднее квадратическое отклонение σ определяет среднее отклонение возможных значений случайной величины относительно математического ожидания. Таким образом, более широкая форма кривой при больших значениях σ наглядно показывает увеличение среднего отклонения значений случайной величины.



Правило “ТРЕХ СИГМ” - если случайная величина распределена по нормальному закону, то отклонение этой величины от среднего значения по абсолютной величине не превосходит утроенного среднего квадратичного отклонения :

$$M(X) \pm 3\sigma$$