

# КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Обязательными этапами расчета переходных процессов любым методом в линейной электрической цепи являются:

- расчет мгновенных значений токов через индуктивности и напряжений на емкостях непосредственно до коммутации (расчет независимых начальных условий);
- составление характеристического уравнения и определение его корней;
- определение выражений и расчет искомых токов и напряжений как функции времени.

Расчет независимых начальных условий является обязательным для всех методов расчета переходных процессов. Способ составления характеристического уравнения и алгоритм последнего этапа различается в зависимости от метода.

В классическом методе расчета отдельно рассчитывают принужденные и свободные составляющие токов и напряжений, а общее решение представляет собой сумму принужденной и свободной составляющих. Определение постоянных интегрирования, входящих в выражение для свободного тока (напряжения), производят путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений по известным значениям корней характеристического уравнения, а также по известным значениям свободной составляющей тока (напряжения) и их производных, взятых при  $t = 0+$ .

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В КЛАССИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Для любой схемы с помощью уравнений Кирхгофа и законов коммутации можно найти:

числовое значение искомого свободного тока при  $t = 0+$ , обозначим его  $i_{св}(0+)$ ;

числовое значение первой, а если понадобится, то и высших производных от свободного тока, взятых при  $t = 0+$ . Числовое значение первой производной от свободного тока при  $t = 0+$  обозначим  $i'_{св}(0+)$ ; второй –  $i''_{св}(0+)$ ; и т. д.

Рассмотрим способ определения постоянных интегрирования  $A_1, A_2, \dots$ , полагая известными  $i_{св}(0+)$ ,  $i'_{св}(0+)$ ,  $i''_{св}(0+)$  и значения корней  $p_1, p_2, \dots$

Если характеристическое уравнение цепи представляет собой уравнение первой степени, то  $i_{св} = A e^{pt}$ . Постоянную интегрирования  $A$  определяют по значению свободного тока  $i_{св}(0+)$ :

$$A = i_{св}(0+). \quad (18)$$

Если дано характеристическое уравнение второй степени и его корни действительны и не равны, то

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (19)$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$i'_{св} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \quad (20)$$

Запишем уравнения (19) и (20) для момента коммутации  $t = 0+$  с учетом, того, что при  $t = 0+$

$$e^{p_1 t} = e^{p_2 t} = 1.$$

В результате получим

$$i_{cb}(0+) = A_1 + A_2; \quad (21)$$

$$i'_{cb}(0+) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (22)$$

В этой системе уравнений известными являются его  $i_{cb}(0+)$ ,  $i'_{cb}(0+)$ ,  $p_1$  и  $p_2$ , неизвестными –  $A_1$  и  $A_2$

Совместное решение (21) и (22) дает

$$A_1 = \frac{i'_{cb}(0+) - p_2 i_{cb}(0+)}{p_1 - p_2}, \quad (23)$$

$$A_2 = i_{cb}(0+) - A_1.$$

Для цепи, имеющей характеристическое уравнение третьей степени, свободный ток

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}. \quad (24)$$

Найдем первую и вторую производные от обеих частей уравнения (20):

$$i'_{\text{св}} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + p_3 A_3 e^{p_3 t}; \quad (25)$$

$$i''_{\text{св}} = p_1^2 A_1 e^{p_1 t} + p_2^2 A_2 e^{p_2 t} + p_3^2 A_3 e^{p_3 t}. \quad (26)$$

Запишем (24) – (26) при  $t = 0+$ :

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{св}}(0+) &= A_1 + A_2 + A_3; \\ i'_{\text{св}}(0+) &= p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3; \\ i''_{\text{св}}(0+) &= p_1^2 A_1 + p_2^2 A_2 + p_3^2 A_3. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Система уравнений (27) представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ . Все остальные входящие в нее величины  $[p_1, p_2, p_3, i_{св}(0+), i'_{св}(0+), i''_{св}(0+)]$  известны.

При двух корнях характеристического уравнения для определения постоянных интегрирования достаточно, чтобы были известны величины свободных токов и напряжений и их производных. Величины свободных составляющих определяются как разность начальных условий и принужденных составляющих при  $t = 0+$ . Согласно (8)

$$i(0+) = i_{\text{ПР}}(0+) + i_{\text{СВ}}(0+),$$

откуда

$$i_{\text{СВ}}(0+) = i(0+) - i_{\text{ПР}}(0+) = A_1 + A_2$$

Производные токов и напряжений найдем из выражений напряжения на индуктивности и тока через емкость.

$$u_{L_{CB}}(0+) = L \frac{di_{L_{CB}}(0+)}{dt}; \quad i_{C_{CB}}(0+) = C \frac{du_{C_{CB}}(0+)}{dt},$$

откуда

$$\frac{di_{L_{CB}}(0+)}{dt} = \frac{u_{L_{CB}}(0+)}{L}; \quad \frac{du_{C_{CB}}(0+)}{dt} = \frac{i_{C_{CB}}(0+)}{C}$$

Определение третьих производных токов и напряжений и выше достаточно сложно, поэтому классический метод расчета переходных процессов в электрических цепях применения не нашел.

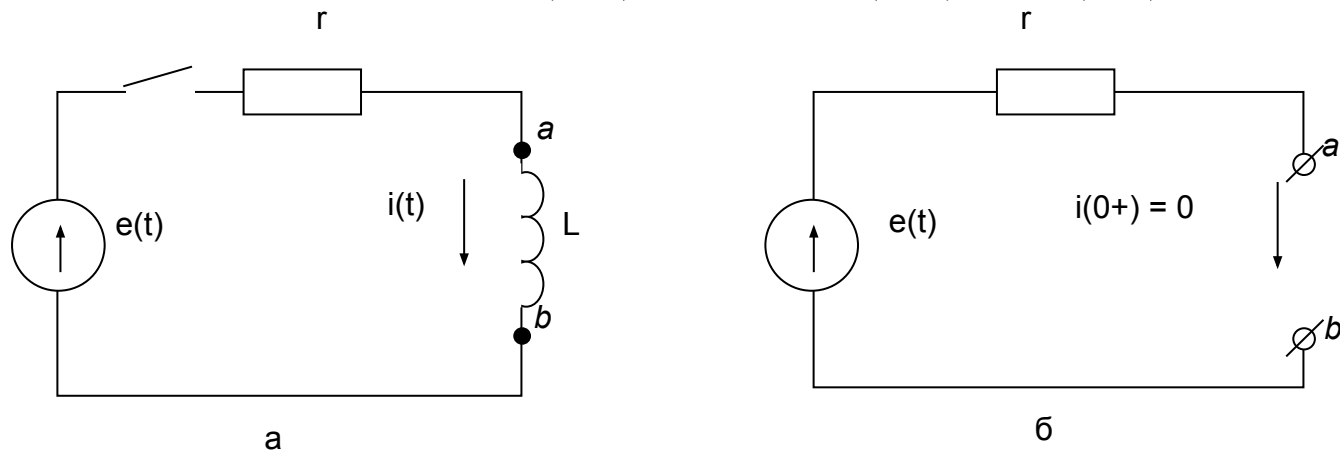


# ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В RL-ЦЕПИ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ЭДС

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 12.

Так как ток через индуктивность не может измениться скачком, то в момент времени  $t(0+)$  тока в цепи нет.

Поэтому в схеме для определения начальных условий индуктивность можно заменить разрывом. Начальными условиями являются:  $i(0+) = 0$ ;  $u_L(0+) = e(0-)$ .



**Рис. 12.** Включение RL-цепи. а – исходная схема; б – схема для расчета начальных условий

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\mathbf{r} + \mathbf{pL} = \mathbf{0},$$

и соответственно корень характеристического уравнения  $\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{L}}$

Переходный ток в цепи равен сумме принужденной и свободной составляющей, которые определяются через  $\mathbf{e(t)}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{L}$ .

$$\mathbf{i(t)} = \mathbf{i}_{\text{пр}}(\mathbf{t}) + \mathbf{i}_{\text{св}}(\mathbf{t})$$

где  $\mathbf{i}_{\text{св}}(\mathbf{t}) = \mathbf{Ae}^{-\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{L}}\mathbf{t}}$ .

Рассмотрим случаи, когда ЭДС постоянная и равна  $\mathbf{E}$  и когда она синусоидальная  $\mathbf{e(t)} = \mathbf{E}_m \sin(\omega\mathbf{t} + \Psi)$ .

При включении цепи к постоянной ЭДС принужденная

составляющая тока равна  $\mathbf{i}_{\text{пр}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{r}}$ ,

поскольку сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю.

Постоянная интегрирования  $\Lambda$  находится из начальных условий при  $t = 0(+)$ .

$$i(0+) = i_{\text{ПР}}(0+) + i_{\text{СВ}}(0+) = i_{\text{ПР}}(0+) + \Lambda$$

откуда  $\Lambda = -\frac{E}{r}$ .

Таким образом, переходный ток в цепи равен

$$i(t) = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$

Переходное напряжение на индуктивности выразится как

$$u_L(t) = u_{\text{ПР}}(t) + u_{\text{СВ}}(t)$$

При постоянной ЭДС в цепи принужденная составляющая напряжения равна нулю, поэтому

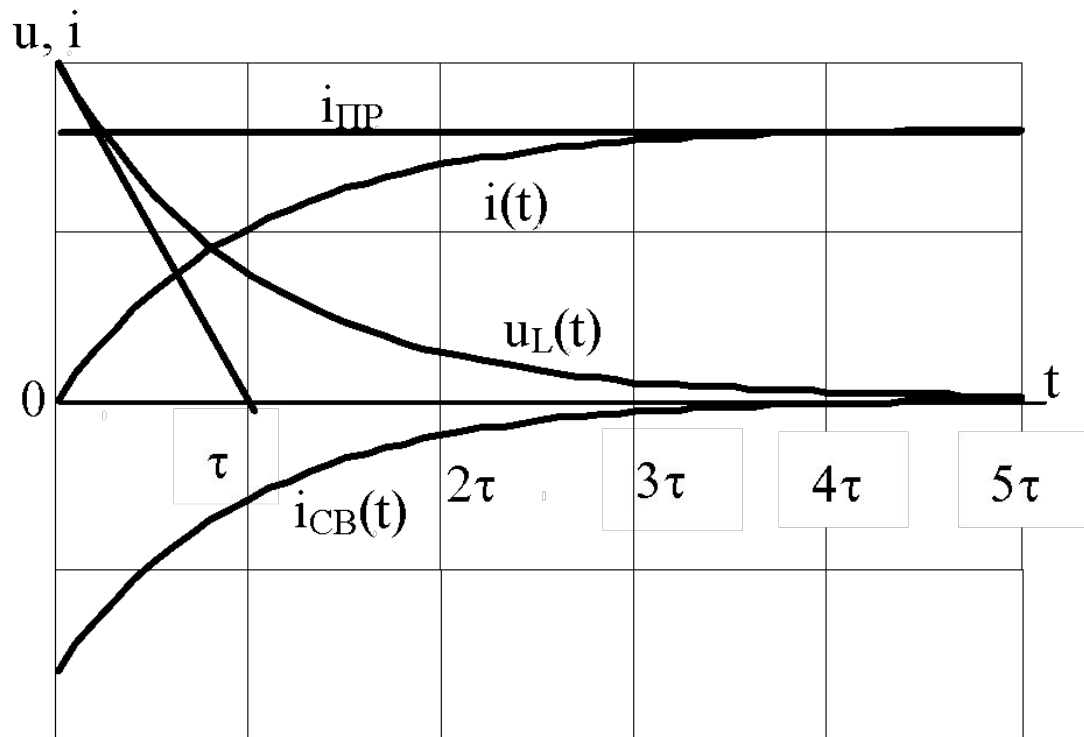
$$u_L(0+) = u_{\text{пр}}(0+) + u_{\text{св}}(0+) = u_{\text{св}}(0+) = A$$

откуда  $A = E$ .

Таким образом, переходное напряжение на индуктивности выражается как

$$u(t) = E \cdot e^{-\frac{r}{L}t}$$

Графики принужденной составляющей тока, свободных и полных составляющих тока и напряжения приведены на рис. 13.



**Рис. 13.** Принужденный, свободный и переходный токи при включении в  $RL$ -цепь постоянной ЭДС

При включении синусоидальной ЭДС  $e = E_m \sin(\omega t + \Psi)$  характеристическое уравнение остается тем же, так как определяется только параметрами цепи и не зависит от величин и фаз источников электрической энергии. Не изменяется также схема цепи для определения начальных условий (рис. 12, б).

Определим начальные условия.

$$i(0+) = i(0-) = 0; \quad u_L(0+) = E_m \sin(\omega \cdot 0 + \Psi) = E_m \sin \Psi .$$

Принужденные составляющие определяются символическим методом через комплексные величины

$$\dot{I}_{\text{пр max}} = \frac{\dot{E}_m}{r + j\omega L} = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j(\Psi - \varphi)}$$

где

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\omega L}{r}\right)$$

Комплексному значению принужденного тока соответствует  
мгновенное:

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\omega t + \Psi - \varphi)$$

Постоянная интегрирования определяется из уравнения

$$i(0+) = i_{\text{пр}}(0+) + A = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\Psi - \varphi) + A$$

При нулевом значении  $i(0+)$

$$A = -\frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\Psi - \varphi)$$

Переходной ток

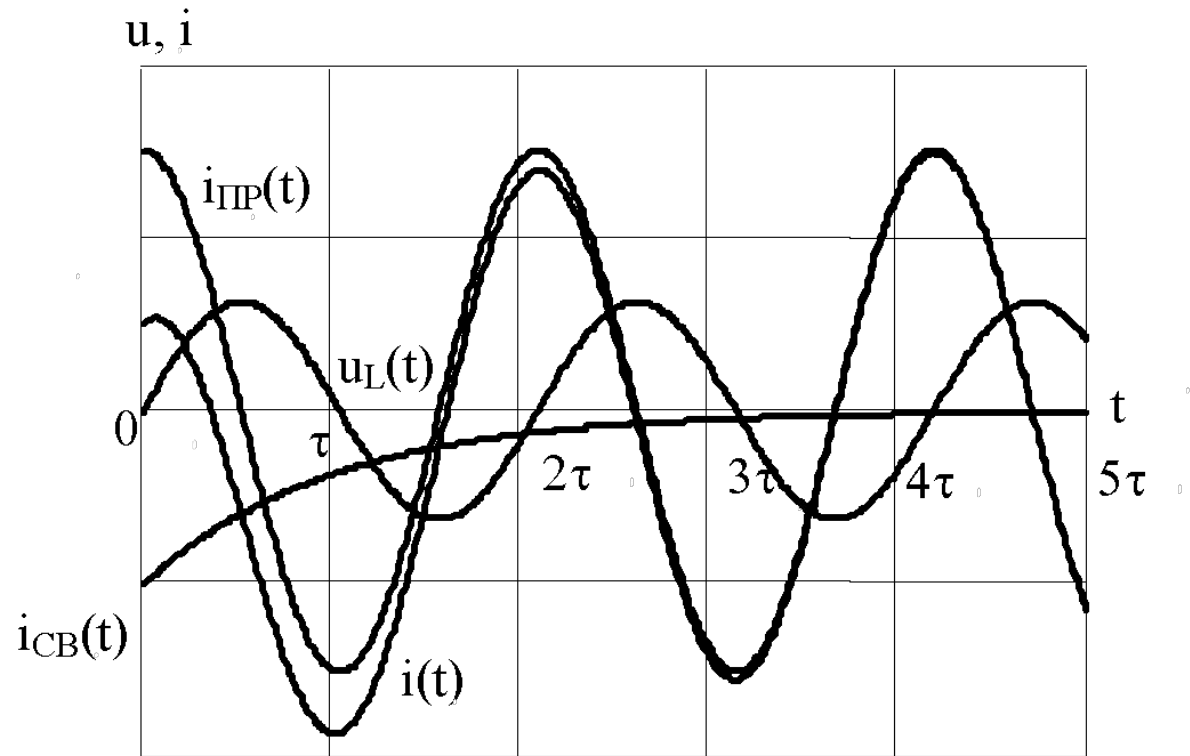
$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t) = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \cdot (\sin(\omega t + \Psi - \varphi) - \sin(\Psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{r}{L} \cdot t})$$

Свободная составляющая напряжения на индуктивности будет изменяться по экспоненциальному закону как

$$u_L(t) = E_m \sin \Psi \cdot e^{-\frac{r}{L} \cdot t}$$

Графики принужденной составляющей тока, свободных и полных составляющих тока и напряжения приведены на рис. 14.





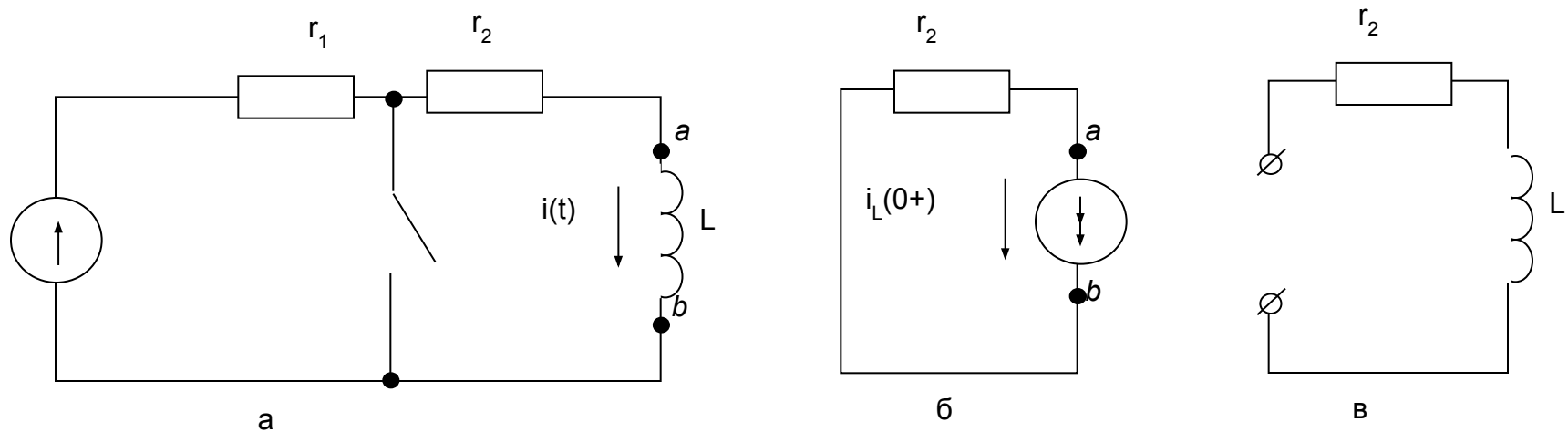
**Рис. 14.** Принужденный, свободный и переходный токи при включении в  $RL$ -цепь синусоидальной ЭДС

Анализ уравнения для свободного тока показывает, что его начальное значение зависит от соотношения активного и реактивного сопротивлений и от начальной фазы ЭДС. Начальное значение свободного тока тем меньше, чем меньше разность  $\Psi - \phi$ . Если эта разность равна нулю или  $\pi$ , будет равна нулю и свободная составляющая тока, т.е., переходного тока при подключении синусоидальной ЭДС не будет. А так как напряжение на индуктивности равно произведению индуктивности на производную тока, не будет и переходного напряжения, т.е., переходного процесса в цепи не будет.

**В цепях синусоидального тока при коммутациях могут быть случаи, когда переходного процесса не будет.**

# КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ RL-ЦЕПИ

Рассмотрим переходный процесс при закорачивании RL-цепи, изображенной на рис. 15.



**Рис. 15.** Короткое замыкание RL-цепи. а – исходная схема; б – схема для расчета начальных условий; в – схема для составления характеристического уравнения

В отличие от предыдущей задачи в этой независимые начальные условия ненулевые. Через индуктивность протекает ток, определяемый суммой активных сопротивлений, если в цепи включена ЭДС постоянного тока, и комплексным сопротивлением, если ЭДС синусоидальная. Рассмотрим оба случая.

При постоянной ЭДС ток через индуктивность до коммутации

$$i(0+) = \frac{E}{r_1 + r_2},$$

при синусоидальной комплексное значение докоммутационного тока

$$\underline{I}_{\max} = \frac{\underline{E}_{\max}}{r_1 + r_2 + j\omega L} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j(\Psi - \varphi)}$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{r_1 + r_2}\right)$$

Мгновенное значение тока при  $t = 0+$  получается как

$$i(0+) = \frac{E_m}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\Psi - \varphi)$$

Коммутацией ключа цепь делится на две, между собой не связанные: левая состоит из ЭДС и сопротивления  $r_1$ ; правая из сопротивления  $r_2$  и индуктивности  $L$ .  
Переходный процесс имеет место только в правой части, где имеется индуктивность. Так как в этой части цепи отсутствуют источники электрической энергии, то принужденные составляющие токов и напряжений равны нулю. Следовательно, переходные ток и напряжение равны соответственно свободному току и свободному напряжению.

Характеристическое уравнение получаем через операторное сопротивление, разомкнутой послекоммутиционной схемы (рис.15, в):

$$Z(p) = r_2 + pL,$$

откуда  $p = -\frac{r_2}{L}$ .

Переходный ток при постоянной ЭДС

$$i(t) = \frac{E}{r_1 + r_2} \cdot e^{pt},$$

при синусоидальной

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\Psi - \varphi) \cdot e^{pt}$$

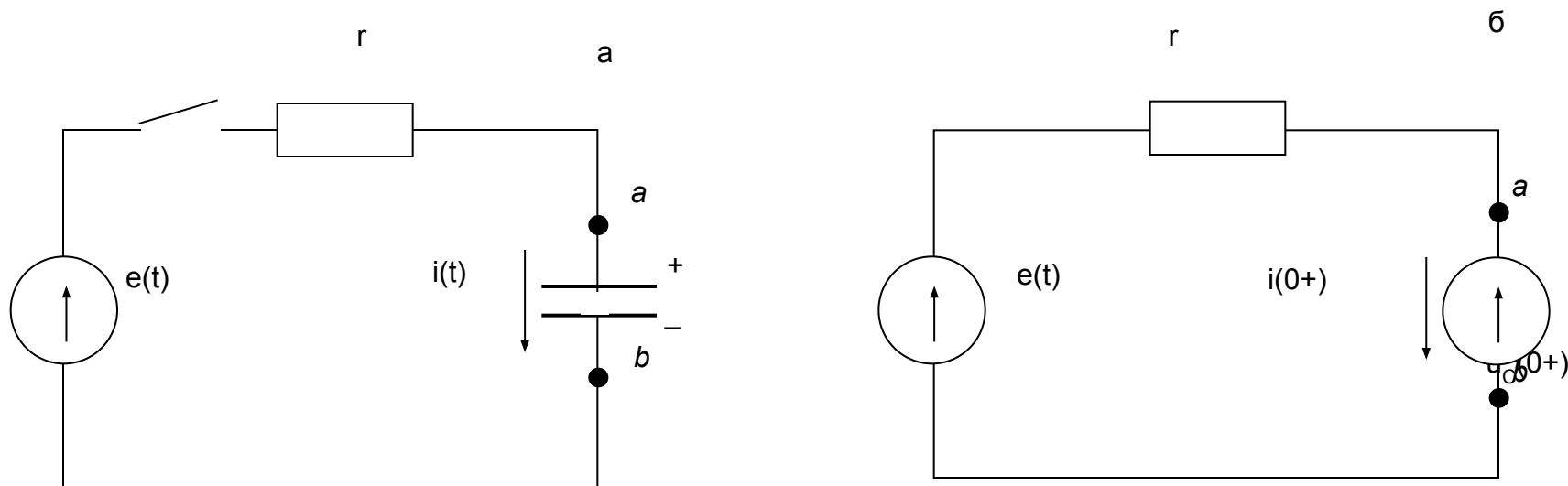
Напряжение на индуктивности равно напряжению на сопротивлении  $r$  Оно выражается соответственно при постоянной и синусоидальной ЭДС как

$$u_L(t) = -\frac{E \cdot r_2}{r_1 + r_2} \cdot e^{pt}$$

$$u_L(t) = \frac{-E_m \cdot r_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\Psi - \varphi) \cdot e^{pt}$$

# ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В RC-ЦЕПИ

Обратимся к схеме, изображенной на рис. 16, а. RC-цепь в общем случае с заряженной емкостью подключается к источнику ЭДС.



**Рис. 16.** Включение RC-цепи. а – исходная схема; б – схема для расчета начальных условий



Согласно второму закону коммутации напряжение на емкости до коммутации, равное при заданном заряде  $u_c(0-) = \frac{q}{C}$ , остается тем же после коммутации. Если емкость не заряжена (подавляющее большинство цепей) напряжение на ней равно нулю. Этот параметр является независимым начальным условием. Зависимым начальным условием является ток в цепи:

$$i(0+) = \frac{e(0+) - u_c(0+)}{r}$$

$$r + \frac{1}{pC} = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

откуда  $p = -\frac{1}{rC}$ . Постоянная времени  $t = rC$ .

Принужденное напряжение на незаряженной емкости при постоянной ЭДС

$$u_{C \text{ пр}} = E - i_{\text{пр}} \cdot r = E - 0 \cdot r = E$$

Если включена синусоидальная ЭДС, принужденные составляющие тока и напряжения на емкости вычислим сначала в комплексной форме записи, из которых получим мгновенные значения:

$$i_{C \text{ пр}}(t) = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin(\omega t + \Psi - \varphi)$$

$$u_{C \text{ пр}}(t) = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \Psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Постоянная интегрирования  $A$  равна разности начального условия и принужденной составляющей в момент времени  $t(0+)$ . При постоянной ЭДС в цепи с незаряженной емкостью постоянная интегрирования напряжения на емкости

$$A = -E,$$

при синусоидальной ЭДС

$$A = -\frac{E_m}{\omega C} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin\left(\Psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Соответственно постоянные интегрирования токов:

$$A = -\frac{E}{r} \quad A = -\frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin(\Psi - \varphi)$$

Переходные напряжение и ток при включении постоянной ЭДС:

$$u(t) = E_m \cdot e^{-\frac{1}{rC}} \quad i(t) = \frac{E_m}{r} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{rC}})$$

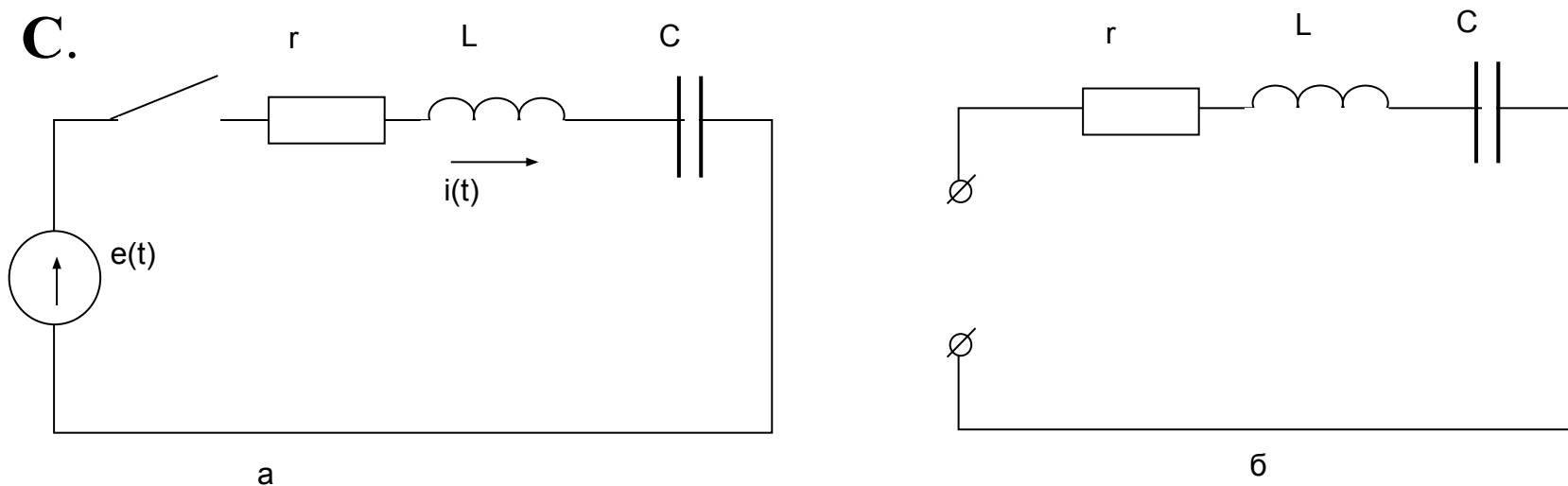
Если включается синусоидальная ЭДС, получаем:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega C} \cdot \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \left( \sin\left(\Psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\Psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{rC}} \right)$$

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \left( \sin(\omega t + \Psi - \varphi) - \sin(\Psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{1}{rC}} \right)$$

# ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В RLC-ЦЕПИ

Обратимся к схеме, изображенной на рис. 18. ЭДС  $e(t)$  включается в цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления  $r$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$ .



**Рис. 18.** Включение ЭДС  $e(t)$  в последовательную RLC-цепь. а – исходная схема; б – схема для составления характеристического уравнения

Характеристическое уравнение  $L \cdot p^2 + r \cdot p + \frac{1}{C} = 0$   
имеет корни:

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

где  $\delta = -\frac{r}{2L}$ ;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная частота.

Поскольку имеем два корня характеристического уравнения,

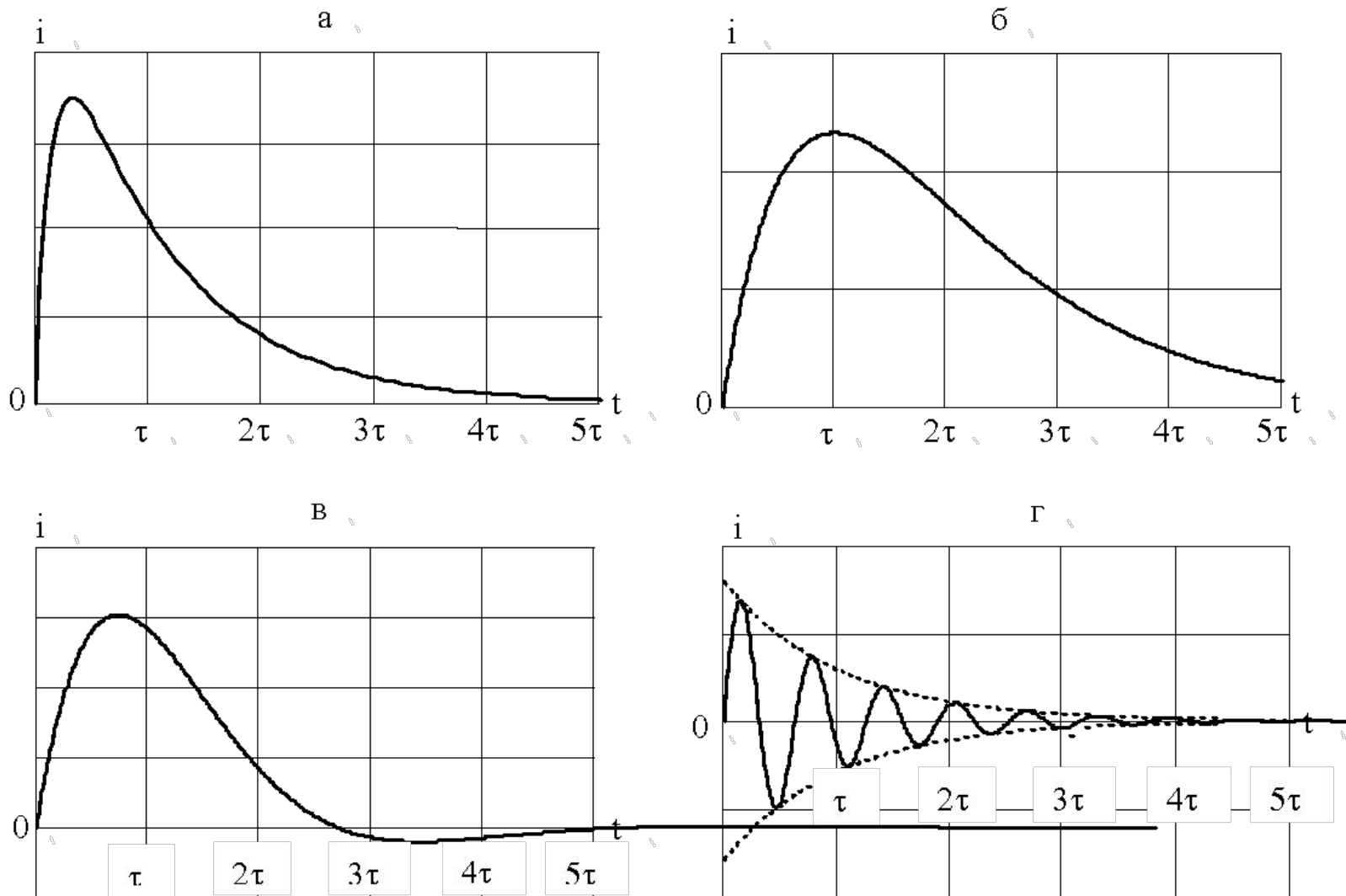
свободный ток  $i_{св}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$

а ток в цепи

$$i(t) = i_{пр}(t) + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$$

Принужденный ток определяется через заданную ЭДС и параметры пассивных элементов.

В зависимости от соотношения  $\delta$  и  $\omega_0$  свободные токи и напряжения будут затухать либо апериодически, либо колебательно. Если  $\delta > \omega_0$ , корни характеристического уравнения будут отрицательными действительными, если  $\delta < \omega_0$  – комплексно сопряженными с отрицательной действительной частью, В первом случае процесс затухания свободных токов и напряжений апериодический, во втором – колебательный. Примеры затухания свободных составляющих приведены на рис. 19.



**Рис. 19.** Затухание свободного тока в RLC-цепь. а –  $\delta > \omega_0$ ; б –  $\delta = \omega_0$ ;  
 в –  $\delta < \omega_0$ ; г –  $\delta \ll \omega_0$ ;



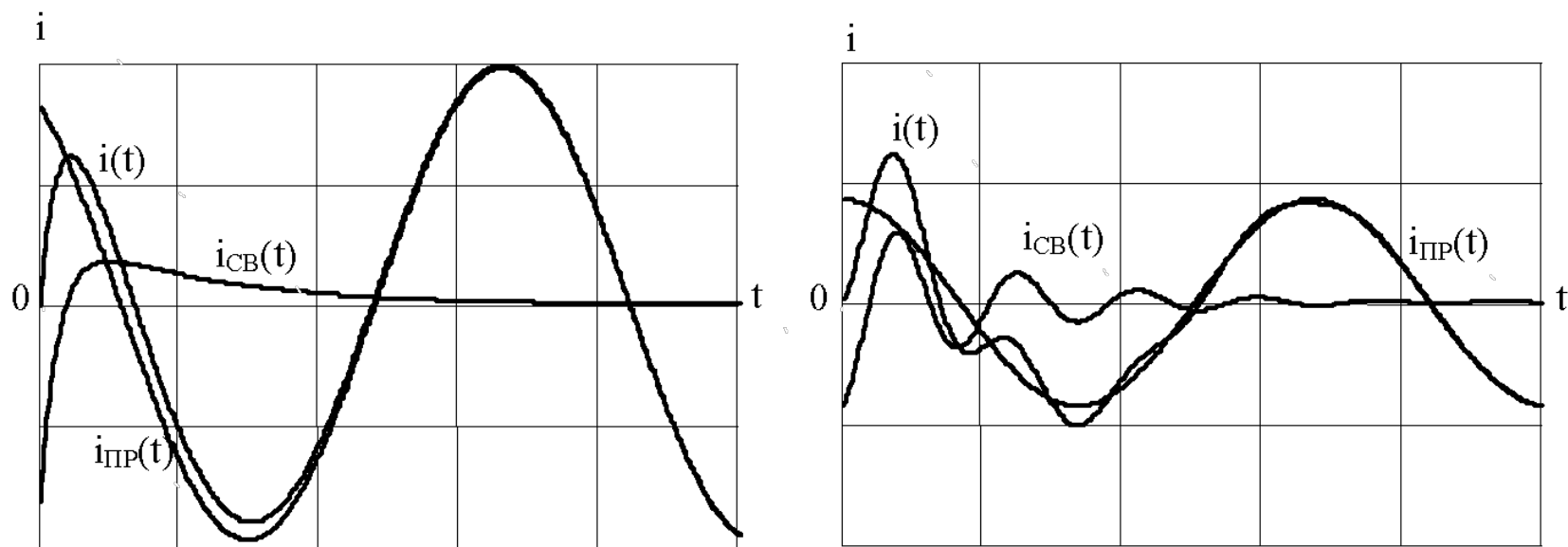
Если RLC – цепь подключается к источнику синусоидальной ЭДС, то принужденный ток

$$i_{\text{пр}}(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi - \phi),$$

а полный

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi - \phi) + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$$

Характер переходного процесса зависит только от параметров пассивных элементов, но не от вида и величины ЭДС. Переходные токи и напряжения могут стремиться к принужденным либо апериодически, либо колебательно. При этом свободная частота может быть больше принужденной, или меньше. На рис 20 показаны случаи апериодического и колебательного переходного процесса.



**Рис. 20.** Переходные токи при включении ЭДС в RLC – цепь.

а –  $\delta > \omega_0$ ;

б –  $\delta \ll \omega_0$ .

# РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В РАЗВВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ

В классическом методе расчета переходных процессов отдельно рассчитываются принужденные составляющие токов и напряжений, отдельно – свободные.

Принужденные составляющие определяются через величины источников тока и ЭДС и параметры пассивных элементов цепи. Если источники электрической энергии синусоидальны, расчет производится символическим методом с последующим переводом комплексных величин в мгновенные синусоидальные.

Постоянные интегрирования свободных составляющих токов и напряжений определяются через разности начальных значений в момент времени  $t = 0+$  и принужденных составляющих в этот же момент времени.

Таким образом, для вычисления переходных токов и напряжений необходимо определить:

- начальные значения токов и напряжений, для чего необходимо рассчитать докоммутационный режим и получить независимые начальные условия;
- принужденные составляющие токов и напряжений;
- найти корни характеристического уравнения;
- рассчитать постоянные интегрирования. Для определения постоянных интегрирования при двух корнях характеристического уравнения требуется найти производные свободных составляющих токов и напряжений.