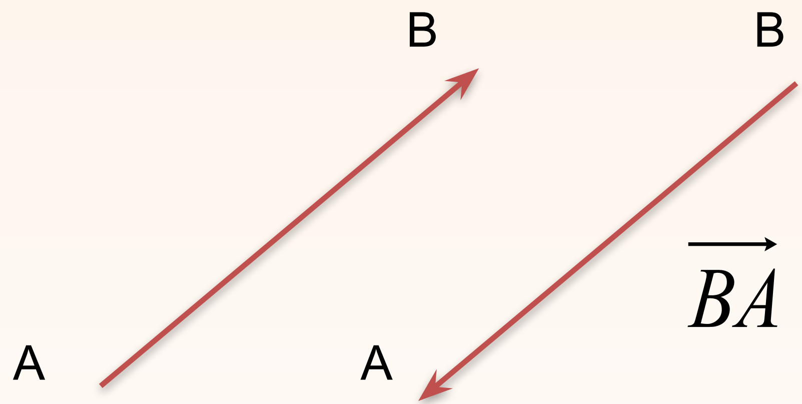
ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Опр. ***Вектор*** (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок ***AB***, у которого одна из ограничивающих его точек ***A*** принимается за начало, а вторая ***B*** – за конец.

$\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$

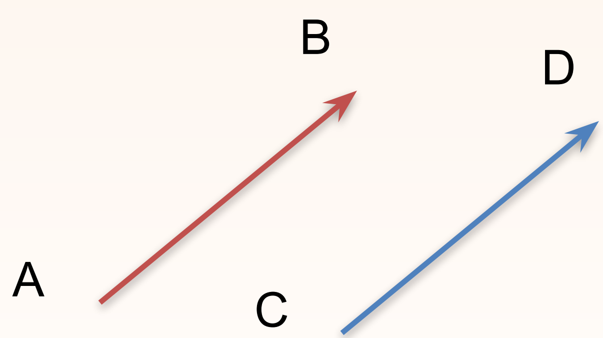


$\overrightarrow{BA}$

Опр. Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***равными***: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если:

1) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;
2) имеют одинаковые длины ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$) и одинаково направлены.

Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

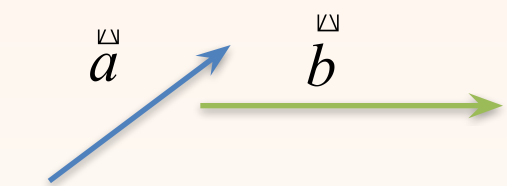


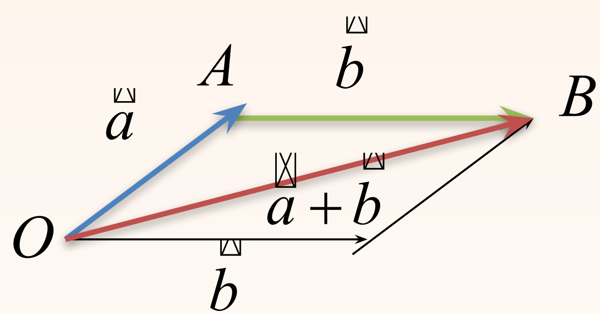
Операции над векторами

Сложение векторов

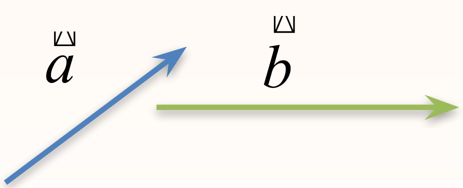
- Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и приложим вектор к этой точке, получим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
- Затем отложим от точки A вектор $\vec{b}$, получим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется ***сумой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

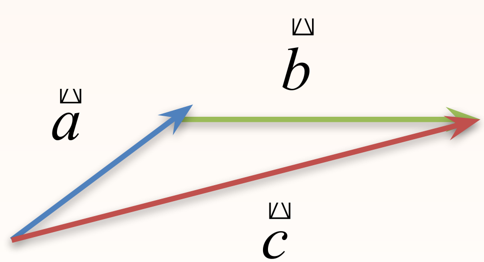
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$





Правило параллелограмма



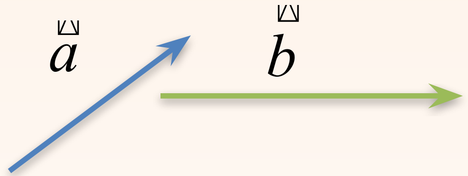


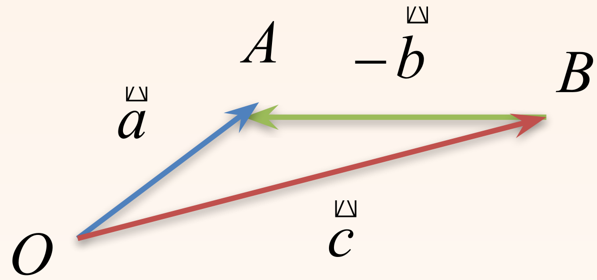
Правило треугольника

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

2. Разность векторов

Опр. ***Разность*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ и определяется как сумма вектора $\vec{a}$ и противоположного вектора $-\vec{b}$.





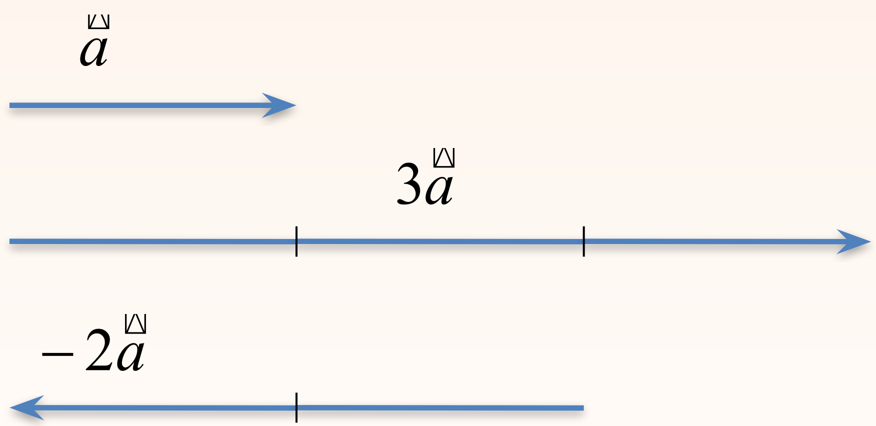
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

3. Умножение вектора на число

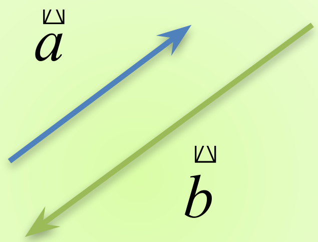
Опр. ***Произведение*** вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, длина которого равна числу $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление $(-\vec{a})$, если $\lambda < 0$.

Обозначается: $\lambda\vec{a}$.

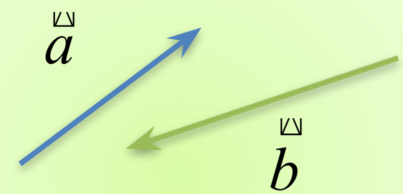
Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.



Опр. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются ***неколлинеарными***.



Коллинеарные векторы

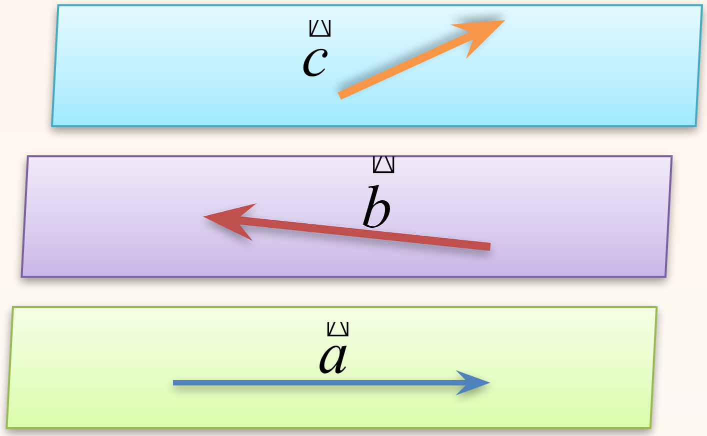


Неколлинеарные векторы

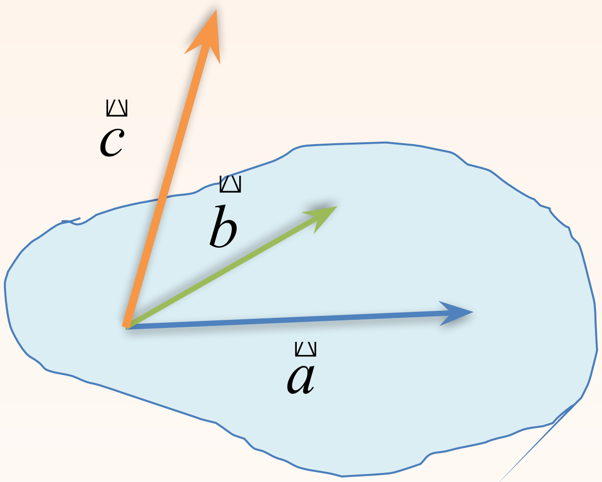
Нулевой вектор ***коллинеарен*** всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

Опр. Три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются ***некомпланарными***.

Если хоть один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ нулевой вектор, то эти векторы компланарны.

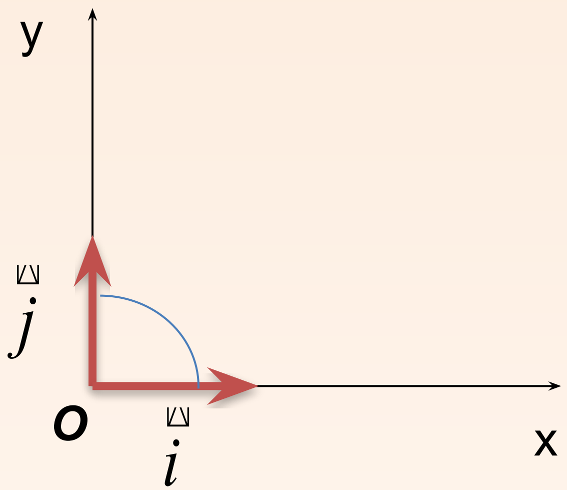


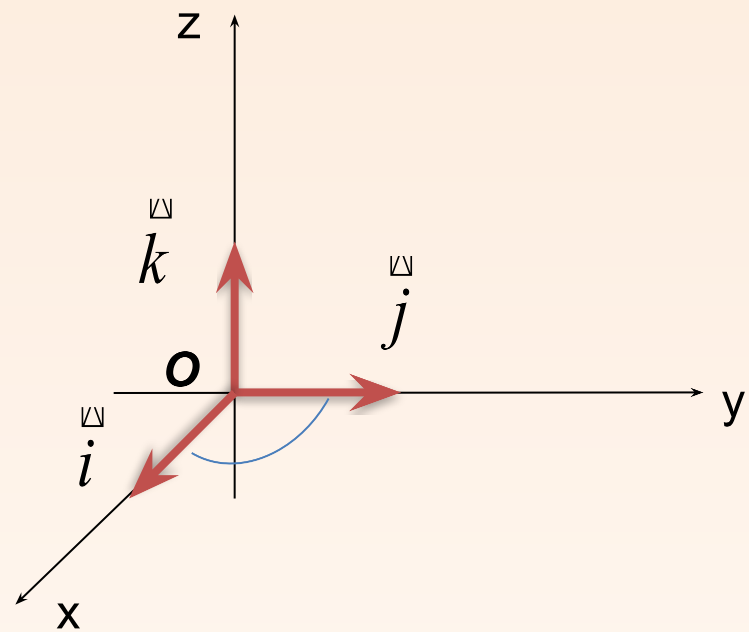
Компланарные векторы



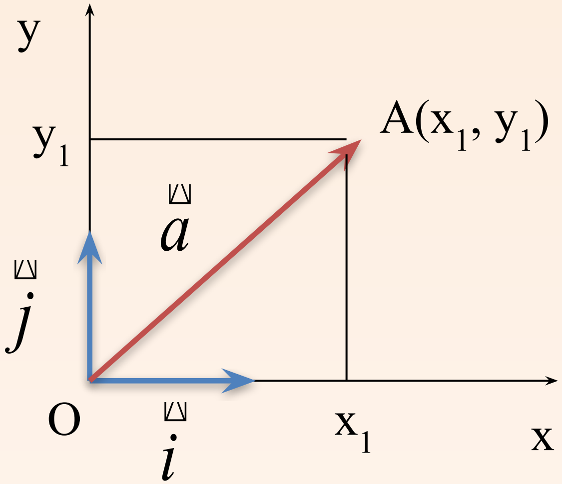
Некомпланарные векторы

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ





- ***O*** – произвольная точка
- $\vec{i}, \vec{j}\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ единичные взаимно-перпендикулярные векторы плоскости (пространства) – орты
- ***Oxy*** – прямоугольная система координат на плоскости
- ***Oxyz*** – декартовая система координат в пространстве
- ***x*** – абсцисса
- ***y*** – ордината
- ***z*** – аппликата



Вектор $\vec{a}$ заданный на плоскости ***Oxy***, может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

где $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}$ – проекции вектора на соответствующие оси координат называются ***прямоугольными координатами вектора***.

$$\boxed{\vec{a} = \{x_1; y_1\}}$$

Если даны координаты его начальной и конечной точек.

$$A(x_1; y_1; z_1) \text{ и } B(x_2; y_2; z_2).$$

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Условие коллинеарности двух векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ***коллинеарны*** тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ в прямоугольных координатах :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^{\;2} + y_1^{\;2}}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ в декартовых координатах:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Пример

$$\vec{a} = \{2; -6; -5\} \quad \vec{b} = \{-1; 3; 4\} \quad \vec{c} = \{4; 1; -2\}$$

$$Найти:$$

$$a)\, 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$$

СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Опр. ***Скалярным произведением*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **<u>число</u>**, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и равное

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

Если $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}$$

Пример

$$\vec{a} = \{2; -6; -5\} \quad \vec{b} = \{-1; 3; 4\}$$

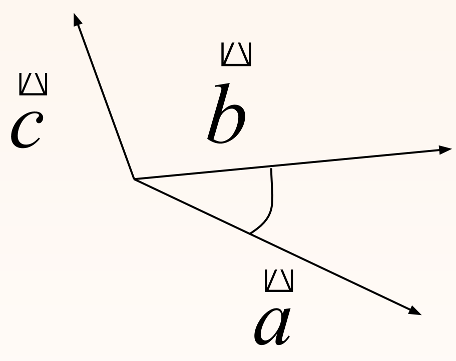
$$\textit{Найти}:$$

$$a)\, \vec{a} \cdot \vec{b}$$

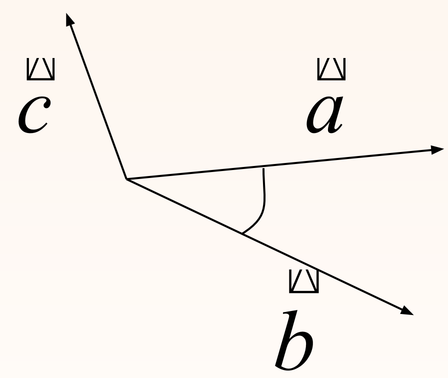
$$б)\, |\vec{a}|$$

$$в)\, \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют ***правую тройку*** (***левую тройку***) или ***положительно ориентированы*** (***отрицательно ориентированы***), если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Правая тройка



Левая тройка

Векторное произведение векторов

Опр. ***Векторным произведением*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий **вектор** $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

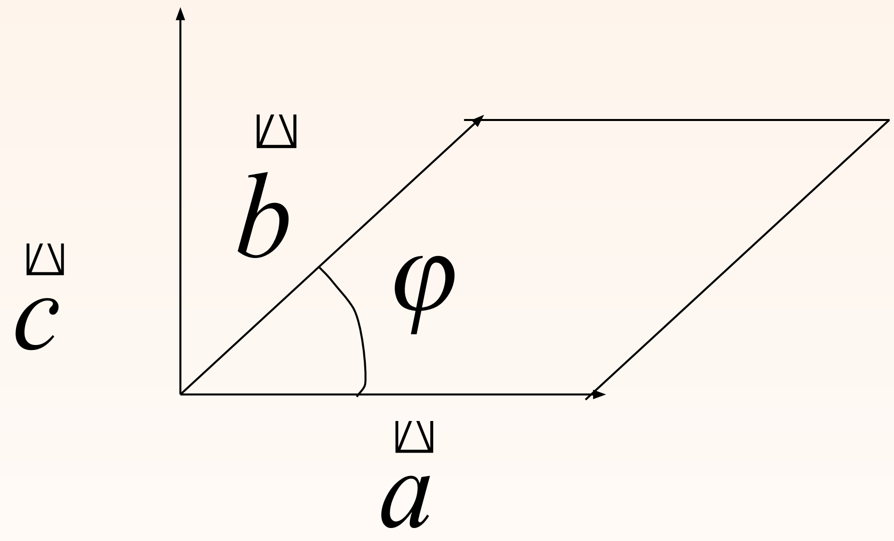
1) вектор ортогонален $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

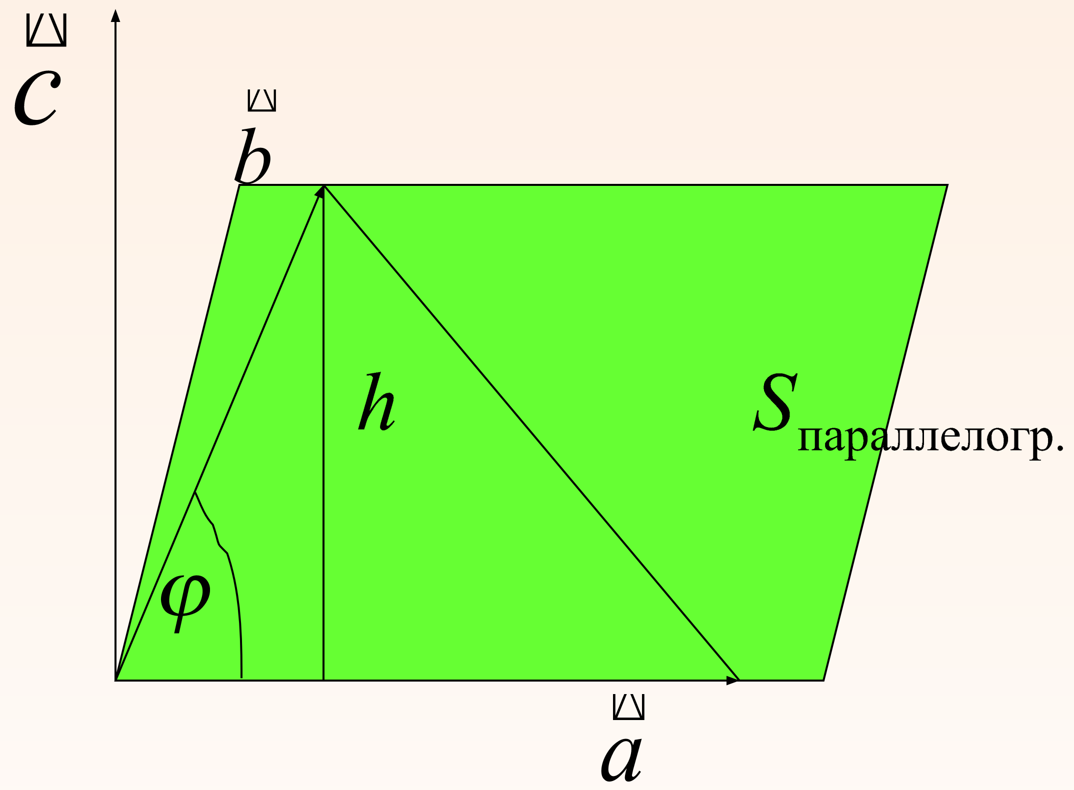
3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначения:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$



Геометрический смысл



$$2S_{\text{треуг.}} = S_{\text{параллелогр.}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

6. **Теорема** (запись векторного произведения в координатах)

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (c_1; c_2; c_3)$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Пример

$$\vec{a} = \{2; -6; -5\} \quad \vec{b} = \{-1; 3; 4\}$$

$$\text{Найти}:$$

$$a)\, \vec{a} \times \vec{b}$$

Смешанное произведение векторов

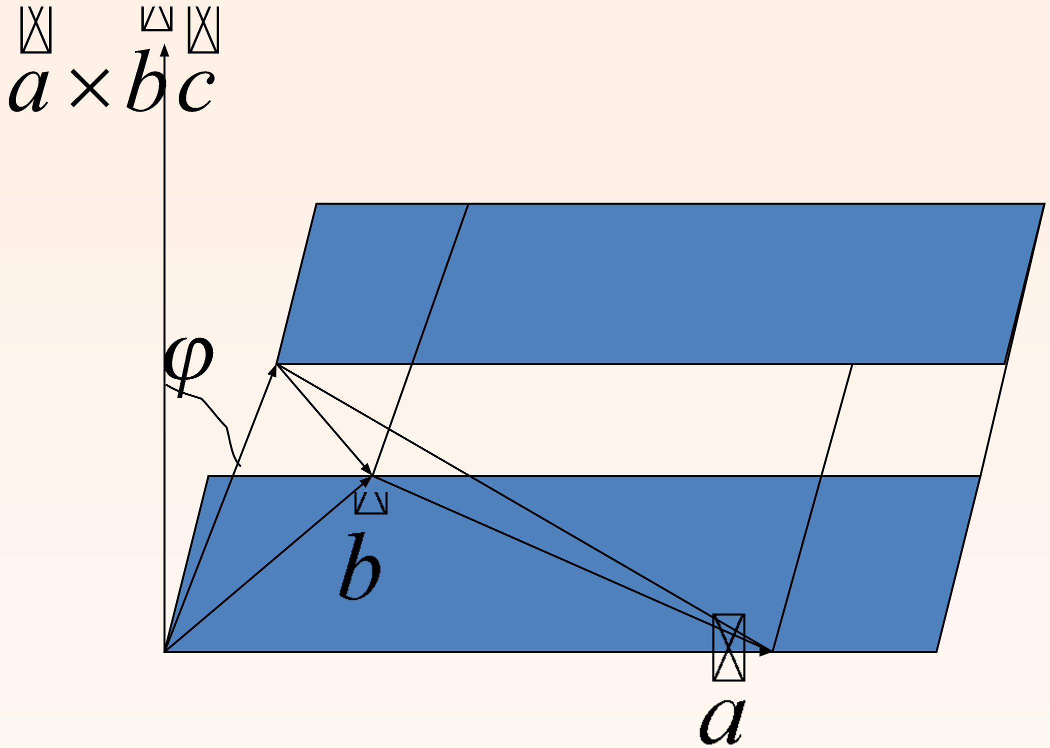
Опр. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется ***число***, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и определяемое следующим образом

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \vec{c}$$

Другие обозначения :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \quad \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

Геометрический смысл



$$V_{\text{парал.}} = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$$

7. Теорема (запись смешанного произведения в координатах)

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

8. Признак компланарности трех векторов (линейной зависимости трех векторов)

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны (линейно зависимы)

$$\Leftrightarrow$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$