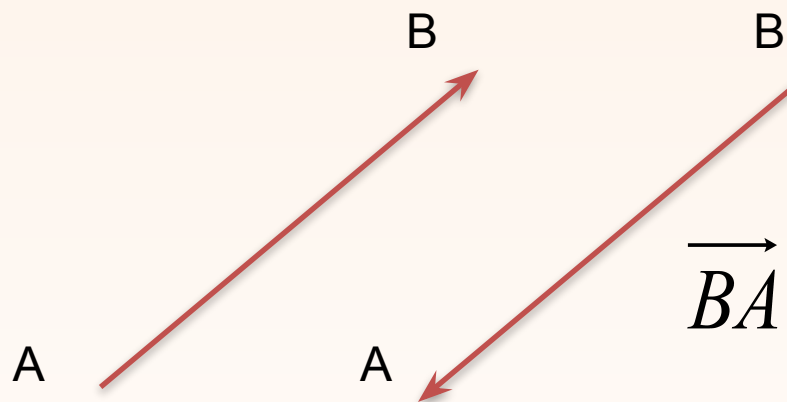


ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Опр. Вектор (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок AB , у которого одна из ограничивающих его точек A принимается за начало, а вторая B – за конец.

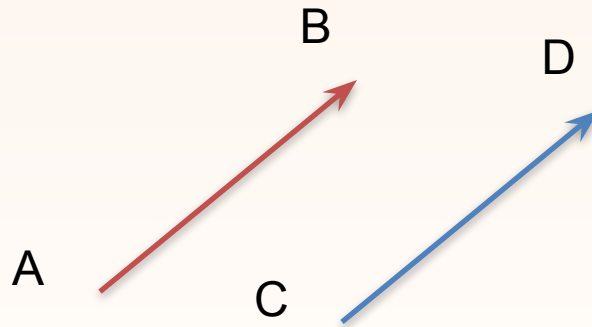
\overrightarrow{AB} или \vec{a}



Опр. Ненулевые векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются ***равными***: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если:

- 1) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;
- 2) имеют одинаковые длины ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$) и одинаково направлены.

Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

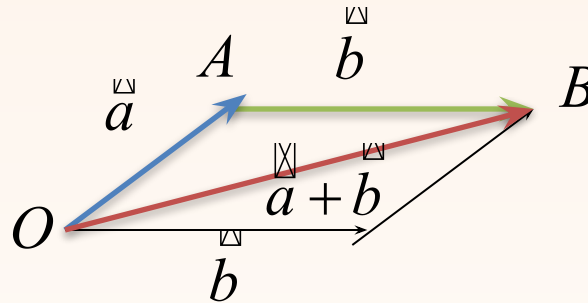
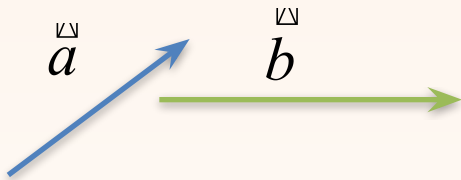


Операции над векторами

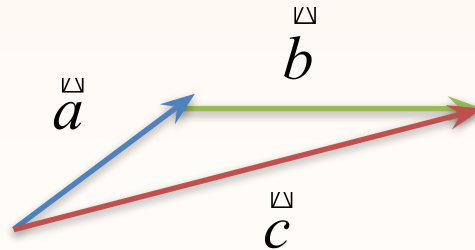
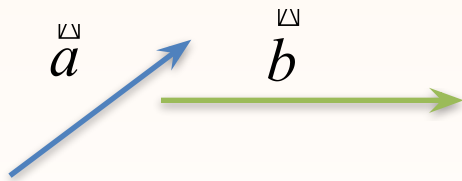
Сложение векторов

- Пусть \vec{a} и \vec{b} - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и приложим вектор к этой точке, получим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
- Затем отложим от точки A вектор \vec{b} , получим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор \overrightarrow{OB} называется **суммой** векторов \vec{a} и \vec{b} .

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$



Правило параллелограмма

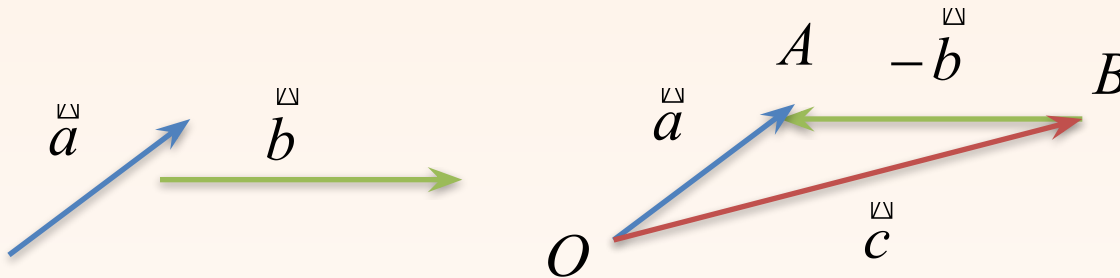


Правило треугольника

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

2. Разность векторов

Опр. *Разность* векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ и определяется как сумма вектора \vec{a} и противоположного вектора $-\vec{b}$.



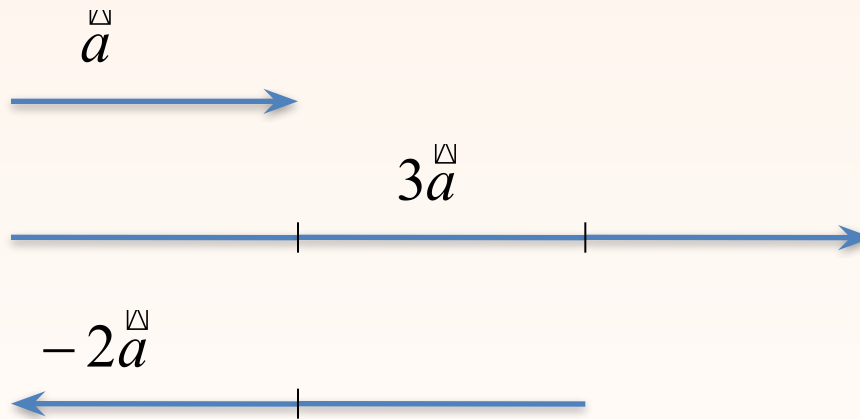
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

3. Умножение вектора на число

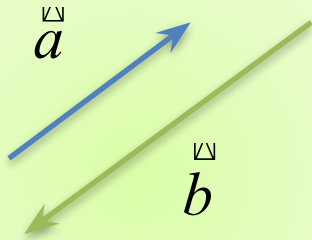
Опр. Произведение вектора \vec{a} на число λ называется вектор, длина которого равна числу $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и который имеет направление вектора \vec{a} , если $\lambda > 0$, и противоположное направление $(-\vec{a})$, если $\lambda < 0$.

Обозначается: $\lambda \vec{a}$.

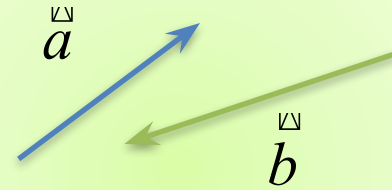
Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.



Опр. Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются **неколлинеарными**.



Коллинеарные векторы

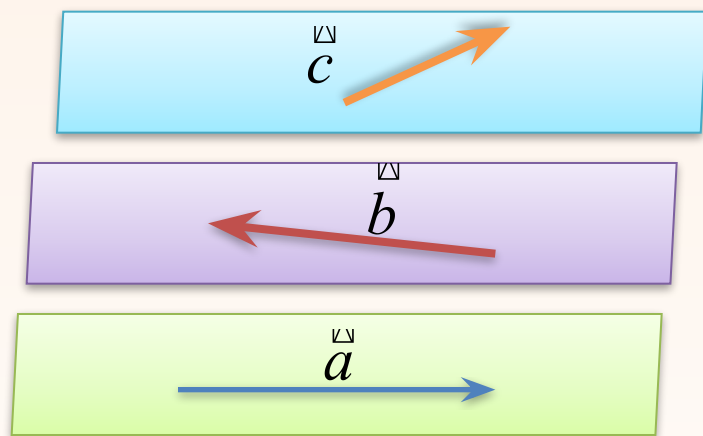


Неколлинеарные векторы

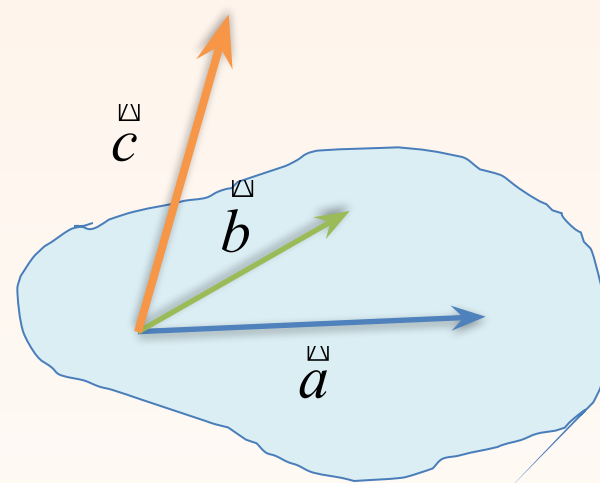
Нулевой вектор **коллинеарен** всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

Опр. Три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называются **компланарными**, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются **некомпланарными**.

Если хоть один из векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} нулевой вектор, то эти векторы компланарны.

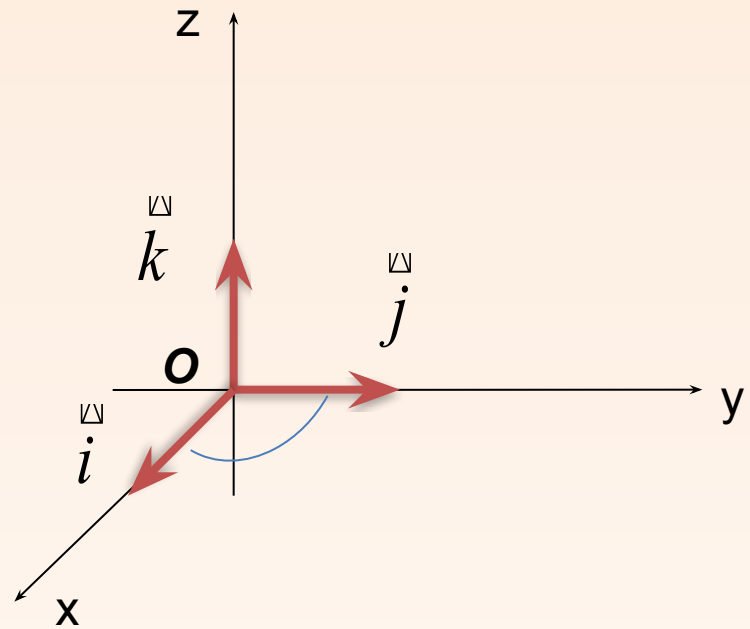
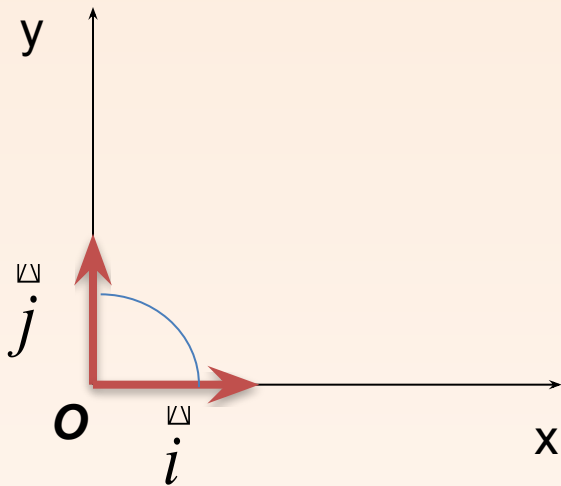


Компланарные векторы

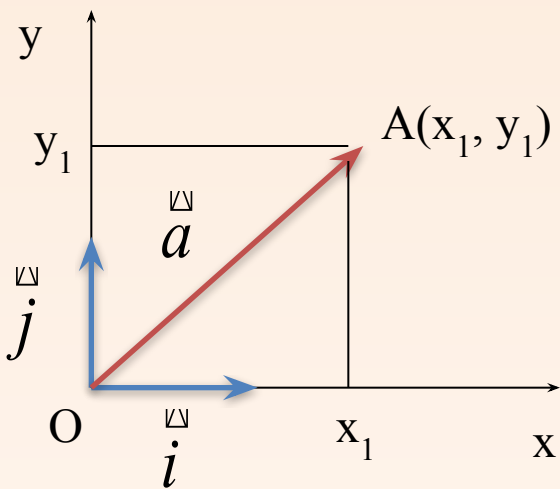


Некомпланарные векторы

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ



- O – произвольная точка
- \vec{i}, \vec{j} ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) единичные взаимно-перпендикулярные векторы плоскости (пространства) – орты
- Oxy – прямоугольная система координат на плоскости
- $Oxyz$ – декартова система координат в пространстве
- x – абсцисса
- y – ордината
- z – аппликата



Вектор \vec{a} заданный на плоскости Oxy , может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

где x_1, y_1 – проекции вектора на соответствующие оси координат называются **прямоугольными координатами вектора**.

$$\vec{a} = \{x_1; y_1\}$$

Если даны координаты его начальной и конечной точек.

$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Условие коллинеарности двух векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ в прямоугольных координатах :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ в декартовых координатах:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Пример

$$\vec{a} = \{2; -6; -5\} \quad \vec{b} = \{-1; 3; 4\} \quad \vec{c} = \{4; 1; -2\}$$

Найти :

$$a) 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$$

СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Опр. **Скалярным произведением** двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется **число**, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равное

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Пример

$$\vec{a} = \{2; -6; -5\} \quad \vec{b} = \{-1; 3; 4\}$$

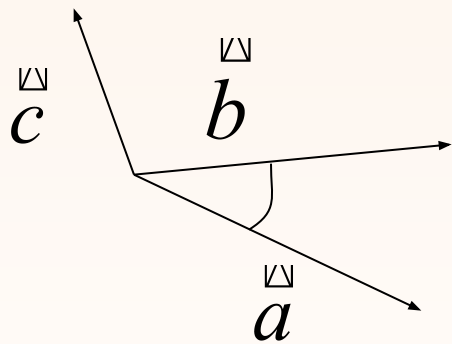
Найти :

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b}$$

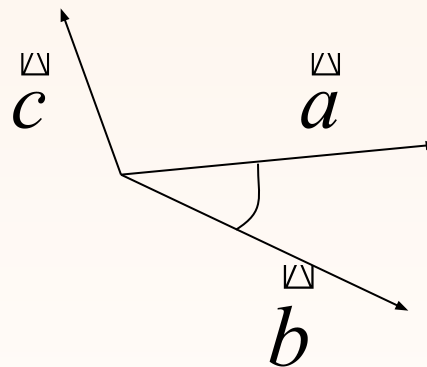
$$б) |\vec{a}|$$

$$в) \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

Три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют **правую тройку** (**левую тройку**) или **положительно ориентированы** (**отрицательно ориентированы**), если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму \vec{b} виден против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Правая тройка



Левая тройка

Векторное произведение векторов

Опр. **Векторным произведением** двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой третий **вектор** \vec{c} , который удовлетворяет следующим трем условиям:

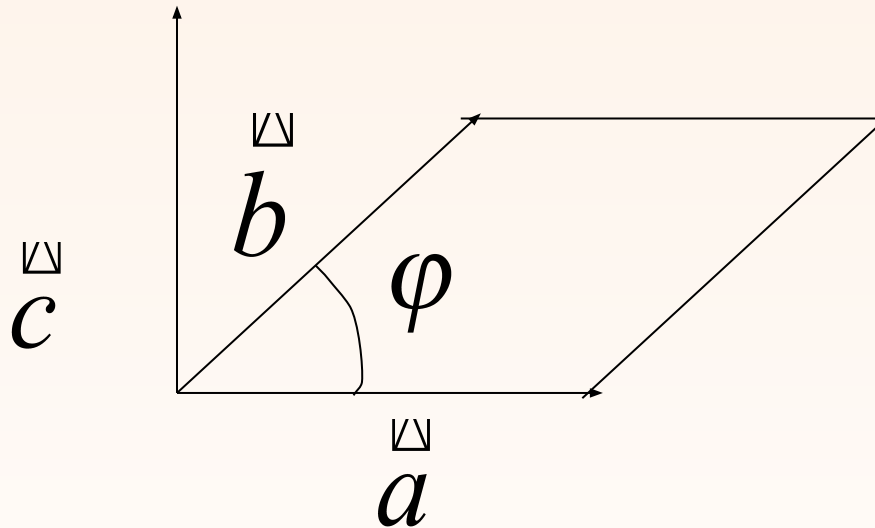
1) вектор ортогонален $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$2) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

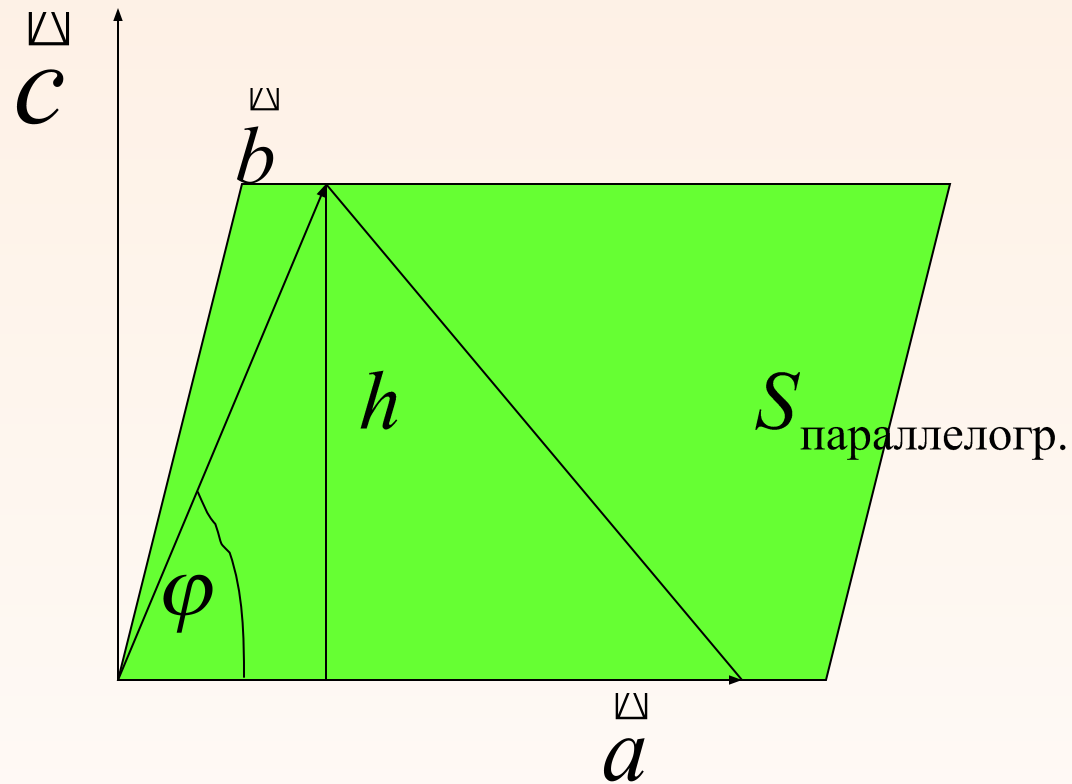
3) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют правую тройку.

Обозначения:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$



Геометрический смысл



$$2S_{\text{треуг.}} = S_{\text{параллелогр.}} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

6. Теорема (запись векторного произведения в координатах)

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (c_1; c_2; c_3)$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Пример

$$\overset{\boxtimes}{a} = \{2; -6; -5\} \quad \overset{\boxtimes}{b} = \{-1; 3; 4\}$$

Найти :

$$a) \overset{\boxtimes}{a} \times \overset{\boxtimes}{b}$$

Смешанное произведение векторов

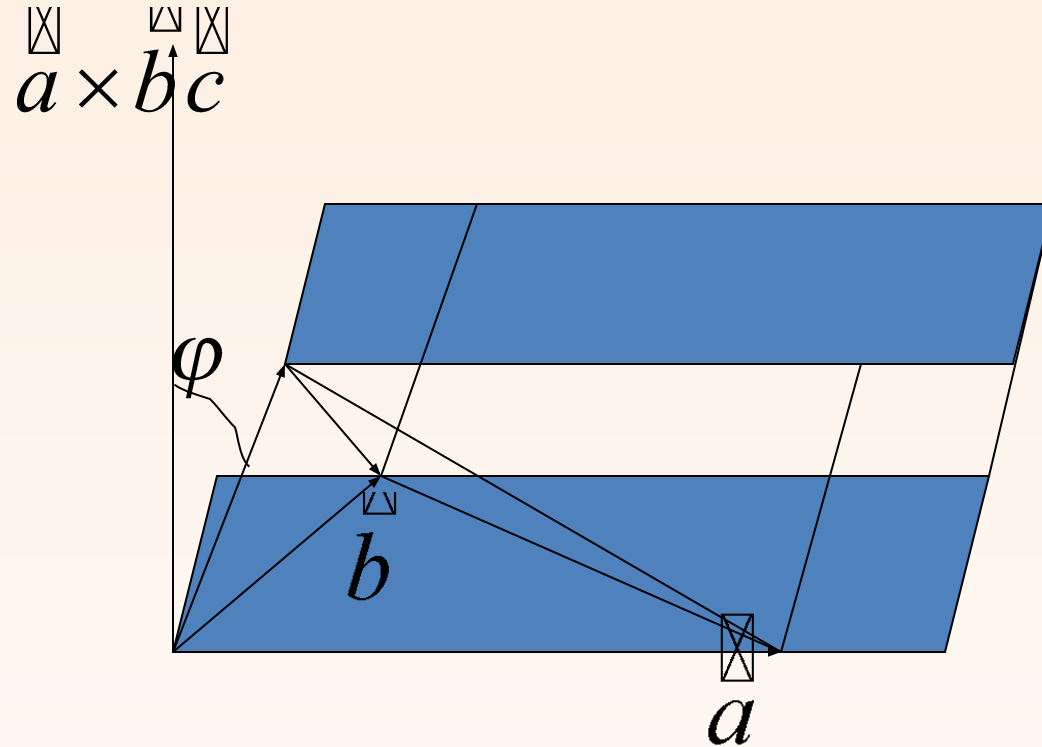
Опр. Смешанным произведением трех векторов a, b, c называется **число**, обозначаемое abc и определяемое следующим образом

$$abc = (a \times b) \cdot c$$

Другие обозначения :

$$(a, b, c), \quad \langle a, b, c \rangle.$$

Геометрический смысл



$$V_{\text{парал.}} = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$$

7. Теорема (запись смешанного произведения в координатах)

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$
$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$
$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

тогда

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

8. Признак компланарности трех векторов (линейной зависимости трех векторов)

Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны (линейно
зависимы)

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$