ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Теория вероятностей и математическая статистика
лектор Макеева О.В.

Лекция 4

Дискретные случайные величины

1. Закон распределения случайной величины
2. Биномиальное распределение
3. Распределение Пуассона
4. Геометрическое распределение
5. Гипергеометрическое распределение
6. Операции над случайными величинами

Пролог

Возможности использования понятия «случайное событие» являются ограниченными. Это связано с тем, что элементарные исходы эксперимента в общем случае имеют нечисловую (качественную) природу, а интерес, как правило, представляет их количественная характеристика, отражающая в каждом конкретном случае, например, размер выигрыша.

Для того чтобы качественные результаты эксперимента отобразить количественно, достаточно каждому элементарному исходу эксперимента (событию) ω сопоставить некоторое число, т.е. на множестве всех элементарных исходов эксперимента Ω задать функцию.

§1. Закон распределения СВ

Определение 1. **Случайной величиной** X называется функция f, заданная на множестве Ω элементарных исходов эксперимента, т.е.

$$X = f(\omega), \ \omega \in \Omega. \qquad (1)$$

Итак, случайной величиной называется величина, которая в результате эксперимента в зависимости от случая принимает одно из своих возможных значений.

Определение 2. **Законом распределения** случайной величины X называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

§1. Закон распределения СВ

В зависимости от множества Ω различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Определение 3. **Дискретной** называется случайная величина у которой множество элементарных исходов эксперимента конечное или счётное.

Закон распределения такой величины может быть представлен таблично, аналитически или графически.

Определение 4. Под **непрерывной** понимают случайную величину у которой множество элементарных исходов эксперимента представляет собой интервал (континуальное множество).

Задать закон распределения такой величины представить таблично уже нельзя.

§1. Закон распределения СВ

Простейшей формой закона распределения дискретной случайной величины (**ДСВ**) является таблица, в которой в порядке возрастания перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

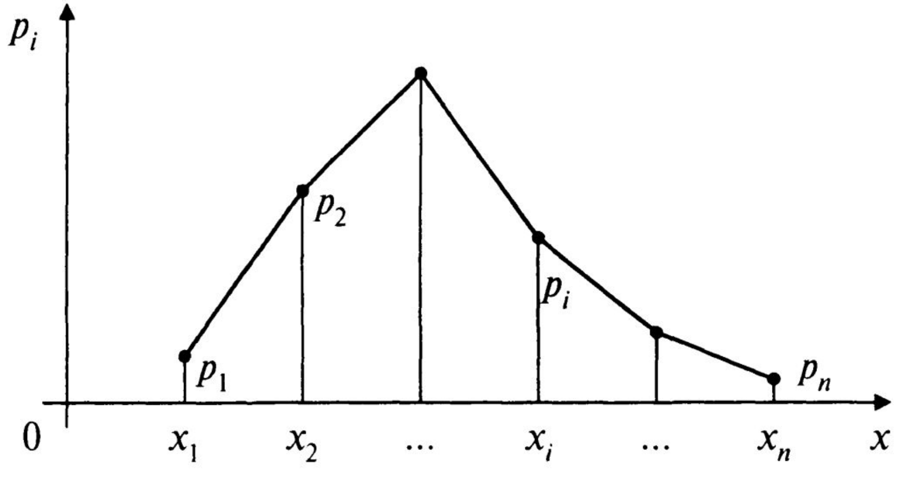
x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Все возможные значения случайной величины X образуют полную группу событий. Поэтому их сумма является достоверным событием, а, значит, вероятность такого события равна единице.

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (2)$$

§1. Закон распределения СВ

Ряд распределения можно представить графически, если ввести прямоугольную систему координат и по горизонтали откладывать возможные значения величины, а по вертикали – соответствующие им вероятности. Если соединить полученные точки отрезками, то получится ломаная, которую называют **многоугольником распределения** вероятностей случайной величины *X*.



§2. Биномиальное распределение

Определение 5. ДСВ имеет **биномиальный закон** распределения с параметрами *n* и *p*, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n, вероятности которых определяются по формуле Бернулли:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \qquad (3)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Введённое определение корректно, так как сумма вероятностей p_i – это сумма коэффициентов бинома:

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$$

Пример 1

Партия содержит 20% бракованных деталей. Для проверки качества наугад выбирают 5 деталей. Составьте закон распределения числа бракованных деталей в выборке.

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A: выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0,2;\ q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0,8.$$

n=5 – число выбранных для проверки деталей (число всех проведённых экспериментов).

Величина X: число бракованных деталей среди отобранных на проверку.

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

§3. Распределение Пуассона

Определение 6. ДСВ распределена по **закону Пуассона** с параметром λ>0, если она принимает счётное множество значений 0,1,2,…,*m*,…, вероятности которых определяются по формуле:

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=P_m(\lambda). \qquad (4)$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Введённое определение корректно, так как:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}+\ldots=$$

$$=e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^m}{m!}+\ldots\right)=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

§4. Геометрическое распределение

Определение 7. ДСВ имеет **геометрическое** распределение с параметром p, если она принимает счётное множество значений 1,2,…,m,… с вероятностями

$$P(X = m) = p \cdot q^{m-1}, \qquad (5)$$

где 0 < p < 1, q = 1 - p.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	1	2	3	…	m	…
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{m-1}	…

Введённое определение корректно, так как:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + pq + \ldots + pq^{m-1} + \ldots = p\left(1 + q + \ldots + q^{m-1} + \ldots\right) = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Величина X есть число испытаний m, проведённых по схеме Бернулли до первого наступления события А и в каждом испытании $P(A) = p$.

Пример 2

Партия содержит 10% бракованных деталей. Для проверки качества наугад выбирают детали до первого появления бракованной. Составьте закон распределения числа проверенных деталей.

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

Событие A: выбрана бракованная деталь.

$$p = P(A) = 0{,}1;\; q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}9.$$

n – число выбранных для проверки деталей – не ограничено.

Величина X: число проверенных деталей до первого обнаружения бракованной детали.

$$P(X = m) = p \cdot q^{m-1}$$

x_i	1	2	3	…	m	…
p_i	0,1	0,09	0,081	…	$0{,}1 \cdot 0{,}9^m$	…

§5. Гипергеометрическое распределение

Определение 8.

ДСВ имеет **гипергеометрическое** распределение с параметрами n, M, N, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, $\min\{n, M\}$ с вероятностями

$$P\left(X = m\right) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad (6)$$

где $M \le N$, $n \le N$; n, M, N – натуральные числа.

Величина X есть число объектов m, обладающих заданным свойством, среди n объектов, случайно отобранных (без повторов) из совокупности N объектов, из которых M обладают этим свойством.

Пример 3

В партии из 10 деталей 4 бракованных. Составьте закон распределения числа бракованных деталей в выборке, содержащей 3 детали.

Эксперимент: выбрать наугад деталь для проверки качества.

N=10 – число всех деталей в партии (объектов);

M=4 – число бракованных деталей в партии (объектов, обладающих заданным свойством);

n=3 – число деталей, отобранных для проверки качества.

Величина X: число бракованных деталей среди отобранных для проверки качества.

$$P(X=m)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	20/120	60/120	36/120	4/120

§6. Математические операции над СВ

Определение 9.

Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной не зависит от того, какие значения принимает другая.

В противном случае случайные величины называют **зависимыми**.

Для случайных величин определены следующие математические операции:

1) умножение на постоянную величину;
2) возведение в степень;
3) сложение величин;
4) вычитание величин;
5) умножение величин.

§6. Математические операции над СВ

Определение 10. **Произведением** случайной величины X и постоянной величины k называется случайная величина $k \cdot X$, которая принимает значения $k \cdot x_i$ с вероятностями p_i.

Пример 4

X:

x_i	0	1	2	3
p_i	20/120	60/120	36/120	4/120

$Y=2X$:

y_i	0	2	4	6
p_i	20/120	60/120	36/120	4/120

§6. Математические операции над СВ

Определение 11. **m-й степенью** случайной величины X называется случайная величина X^m, которая принимает значения x_i^m с вероятностями p_i.

Пример 5

X:

x_i	0	1	2	3
p_i	20/120	60/120	36/120	4/120

$Y=X^2$:

y_i	0	1	4	9
p_i	20/120	60/120	36/120	4/120

§6. Математические операции над СВ

Определение 12. **Суммой** случайных величин X и Y называется случайная величина $X+Y$, которая принимает значения $x_i + y_j$ с вероятностями

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \text{ где } i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, m.$$

Для независимых величин X и Y: $p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$.

Пример 6

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,1	0,6

Y:

y_j	-1	2
p_i	0,8	0,2

$Z=X+Y$:

z_k	-1	0	1	2	3	4
p_k	0,24	0,08	0,48	0,06	0,02	0,12

§6. Математические операции над СВ

Определение 13. **Разностью** случайных величин X и Y называется случайная величина X-Y, которая принимает значения $x_i - y_j$ с вероятностями

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j),\ \text{где } i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m.$$

Для независимых величин X и Y: $p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$.

Пример 7

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,1	0,6

Y:

y_j	-1	2
p_i	0,8	0,2

$Z=X-Y$:

z_k	-2	-1	0	1	2	3
p_k	0,06	0,02	0,12	0,24	0,08	0,48

§6. Математические операции над СВ

Определение 14. **Произведением** случайных величин X и Y называется случайная величина $X \cdot Y$, которая принимает значения $x_i \cdot y_j$ с вероятностями

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j), \text{ где } i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m.$$

Для независимых величин X и Y: $p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$.

Пример 8

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,1	0,6

Y:

y_j	-1	2
p_i	0,8	0,2

$Z = X \cdot Y$:

z_k	-2	-1	0	2	4
p_k	0,48	0,08	0,30	0,02	0,12

Продолжение следует…