

# ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

## ЛЕКЦІЯ 2

# ПЛАН

1. Динаміка. Пряма та зворотна задачі динаміки. Основні закони та динамічні характеристики поступального руху (сила, маса та імпульс тіла)
2. Закон збереження імпульсу замкненої механічної системи.
3. Види сил.
4. Робота, енергія, потужність при поступальному русі.
5. Закон збереження повної механічної енергії. Дисипація.

# Динаміка -

розділ механіки, що вивчає рух і взаємодію механічних об'єктів, зміну характеристик їх руху під дією сил.

## Пряма задача динаміки:

за відомими силами, що діють на тіло, визначити закон його руху - координати і швидкість у будь-який момент часу

## Зворотна задача динаміки:

на основі знань про рух тіла визначити діючі на це тіло сили

# Динамічні характеристики

**МАСА** - скалярна фізична величина, що є мірою його інертних (інертна маса) та гравітаційних (гравітаційна маса) властивостей.

Інертність - властивість, яка полягає в тому, що для зміни швидкості тіла (як за модулем, так і за напрямом) необхідний час.

Нині доведено, що числові значення інертної та гравітаційної маси співпадають (з точністю не меншою  $10^{-12}$  їх значень).

$$[m] = 1 \text{ кг}$$

# Динамічні характеристики

**СИЛА** - це векторна ФВ, яка є мірою механічної дії на тіло зі сторони інших тіл або полів, в результаті якої отримує прискорення саме тіло або його частини (при деформації). В кожний момент часу сила характеризується числовим значенням, напрямом у просторі і точкою прикладання.

$$[F] = 1\text{Н}$$

**ІМПУЛЬС** (кількість руху) - це векторна ФВ, яка чисельно дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.

$$\vec{p} = m\vec{v}; [p] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

# Перший закон Ньютона (закон інерції)

Матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, доки дія з боку інших тіл не примусить її змінити цей стан

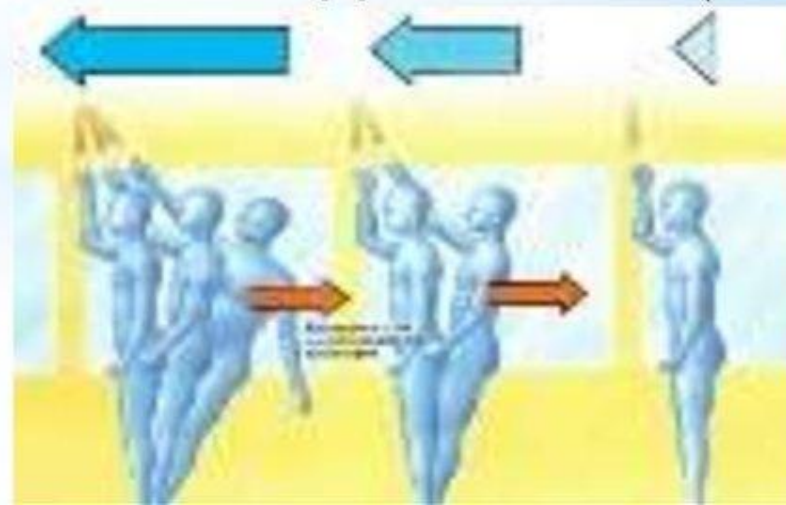
АБО

Існують такі системи відліку, відносно яких тіла, що рухаються поступально, зберігають свою швидкість незмінною якщо на них не діють інші тіла або дія інших тіл скомпенсована

При  $F = 0$  і  $a = 0$  ( $v = const$ )

# Інерціальна система відліку -

Система відліку, відносно якої вільна МТ, на яку не діють інші тіла, рухається рівномірно і прямолінійно, тобто за інерцією. (Інерція - явище збереження швидкості тіла незмінною за умови відсутності дії на нього інших тіл). Система відліку, що рухається відносно інерціальної системи зі сталою швидкістю - інерціальна, зі змінною швидкістю (з прискоренням) - неінерціальна



# Другий закон Ньютона:

прискорення, якого набуває тіло, прямо пропорційне силі, яка на нього діє і обернено пропорційне масі цього тіла. Напрямок прискорення завжди співпадає з напрямком сили.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Другий закон Ньютона у загальному вигляді (для тіла змінної маси) формулюється наступним чином: швидкість зміни імпульсу  $M\vec{v}$  (тіла) дорівнює силі, яка діє на  $M\vec{v}$  (тіло).

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

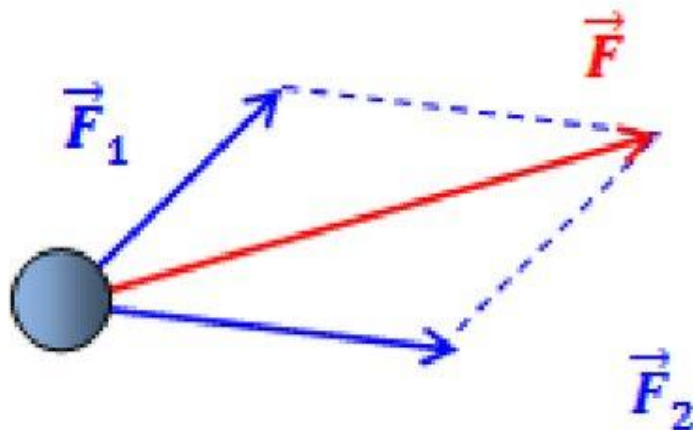


# Принцип незалежності дії сил

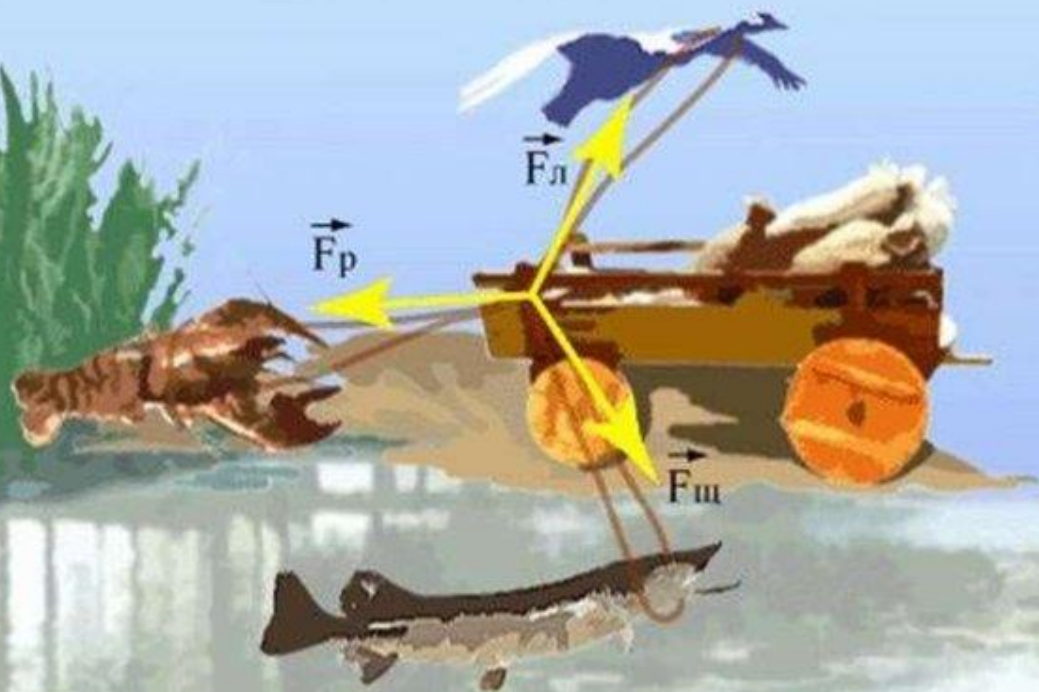
Якщо на матеріальну точку діє одночасно декілька сил, то кожна з цих сил надає матеріальній точці такого прискорення (згідно з другим законом Ньютона), наче інших сил не існує.

Якщо на матеріальну точку одночасно діють декілька сил, то їх можливо замінити **рівнодією** силою, яка дорівнює геометричній сумі цих сил.

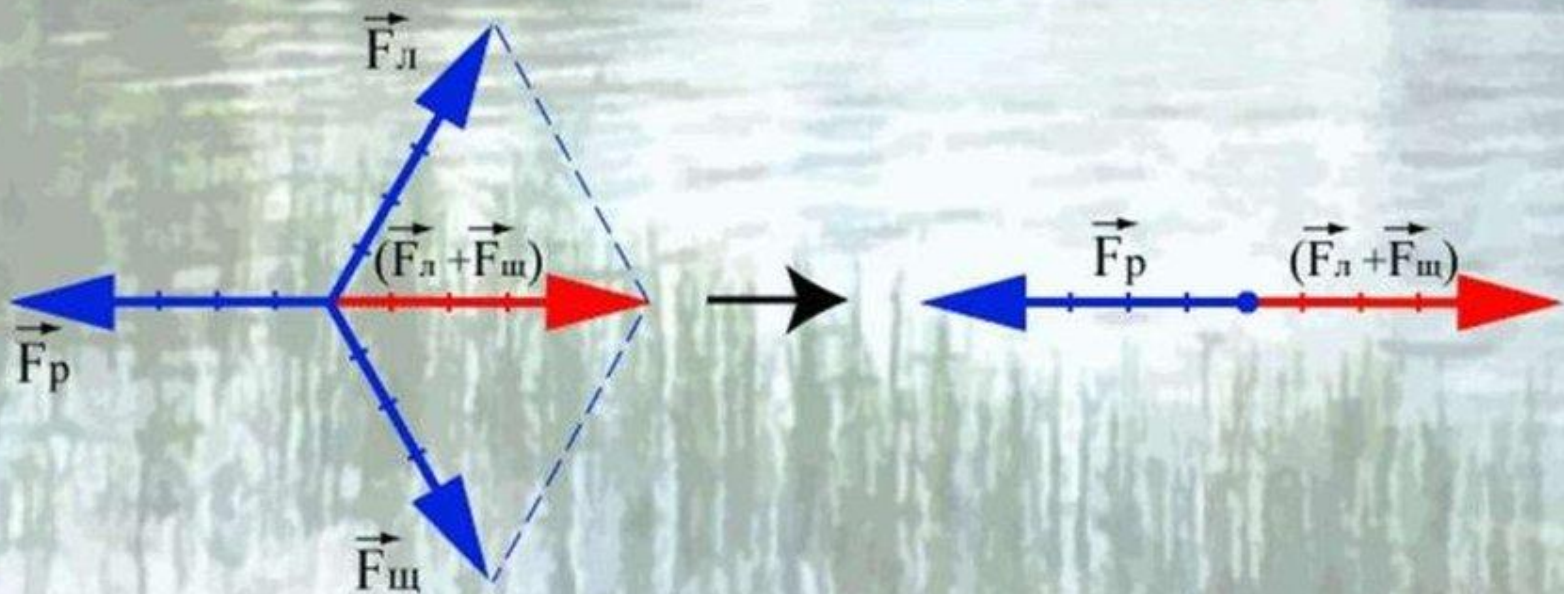
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

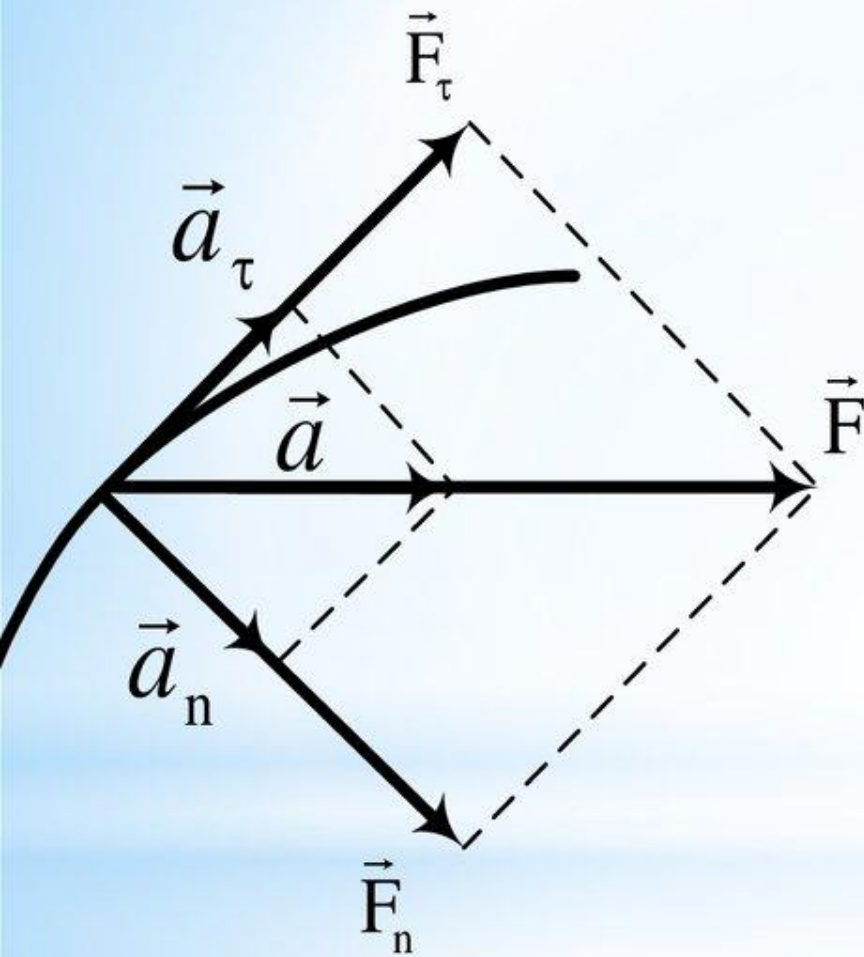


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



$$\vec{R} = \vec{F}_p + \vec{F}_m + \vec{F}_l = 0$$



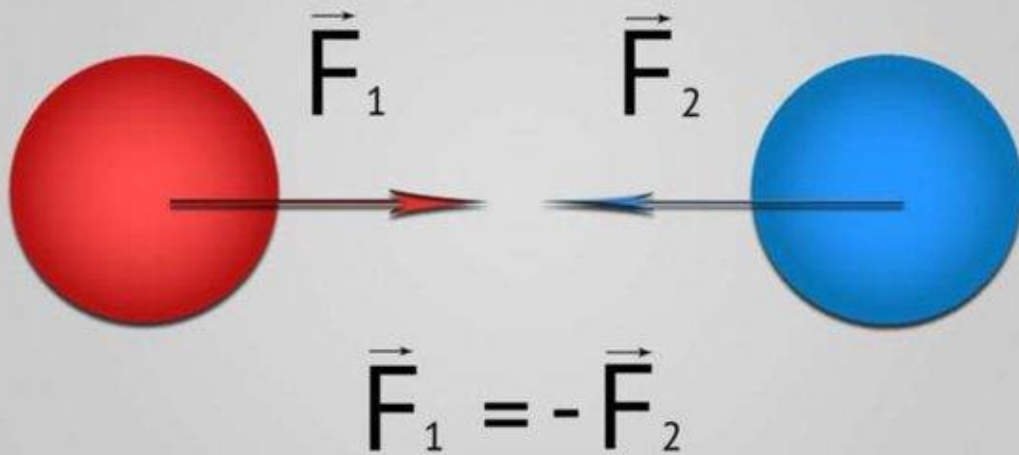


Як і прискорення, сили можна розкласти на **тангенціальну** (напрявлену по дотичній до траєкторії) та **нормальну** (напрявлену вздовж нормалі до центру кривизни) складові

$$\begin{aligned}\vec{F}_\tau &= m\vec{a}_\tau = m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{F}_n &= m\vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} = \\ &= m\omega^2 R\end{aligned}$$

# Третій закон Ньютона

Сили, з якими діють одна на одну МТ, завжди рівні за модулем, протилежно напрямлені та діють вздовж прямої, що з'єднує ці точки.



Сили, що виникають при взаємодії двох тіл, прикладені до різних тіл, виникають парами та мають однакову природу.

# Закон збереження імпульсу

Загальна форму запису другого закону Ньютона отримується з II закону Ньютона у звичному вигляді та означення миттєвого прискорення:

$$\vec{F} = m\vec{a}; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Отже, сила дорівнює швидкості зміни імпульсу.

Механічною системою називається сукупність МТ(тіл), що розглядається як єдине ціле.

Сили у цьому випадку можуть бути *внутрішніми та зовнішніми*.

Якщо на систему не діють зовнішні сили, її називають *замкненою*.

# Закон збереження імпульсу

У випадку замкненої системи всі її тіла взаємодіють тільки одне з одним, а векторна сума сил, які виникають при цих взаємодіях, за III законом Ньютона буде рівна нулю, а отже якщо

$$\vec{F} = \mathbf{0}, \text{ то } \frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ а отже } \vec{p} = \textit{const}.$$

Тут під  $\vec{p}$  мається на увазі векторна сума імпульсів всіх тіл, що входять до цієї замкненої системи:

$$\sum_{i=0}^0 \vec{p}_i = \textit{const}$$

**Імпульс замкненої системи матеріальних точок є величиною сталою**

**В механіці розглядаються три  
види сил:**

**1. Сили тертя**

**2. Сили пружності**

**3. Сили тяжіння (гравітаційні  
сили)**

# Сили тяжіння

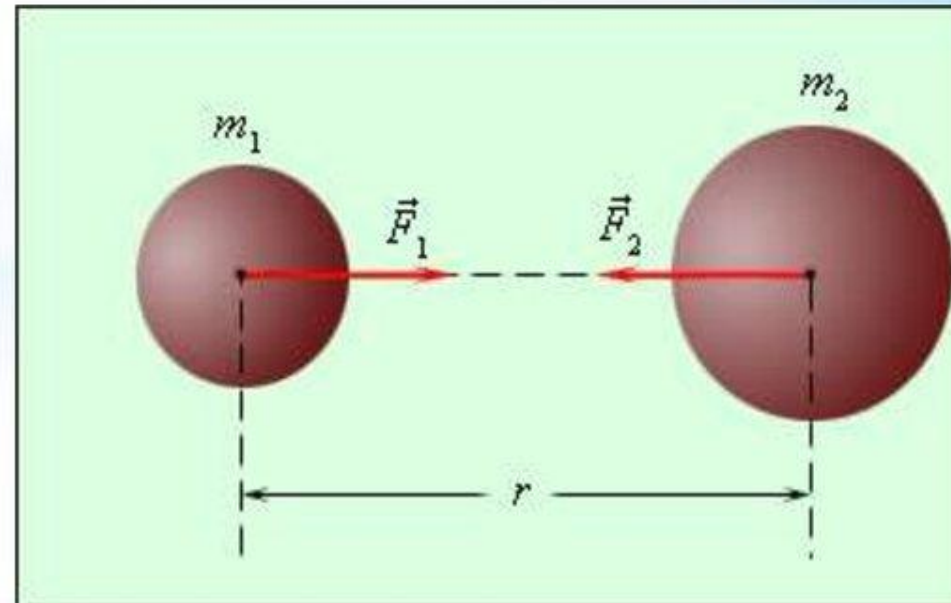
## Закон всесвітнього тяжіння :

між будь-якими двома матеріальними точками діє сила взаємного тяжіння, прямо пропорційна їх масам та обернено пропорційна квадрату відстані між ними

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \frac{\text{М}^2}{\text{КГ}^2}$$

гравітаційна стала





## Назва питання

Сила земного тяжіння - сила, що діє на будь-яке тіло, що знаходиться поблизу земної поверхні, і напрямлена вертикально вниз

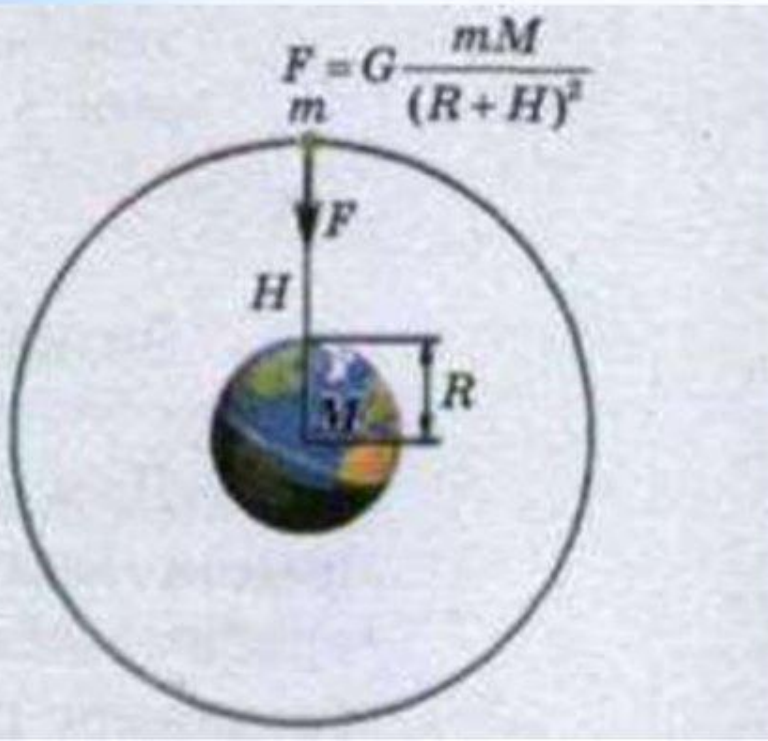
$$F = mg$$

За законом всесвітнього тяжіння

$$F = G \frac{Mm}{(R_3 + H)^2}$$

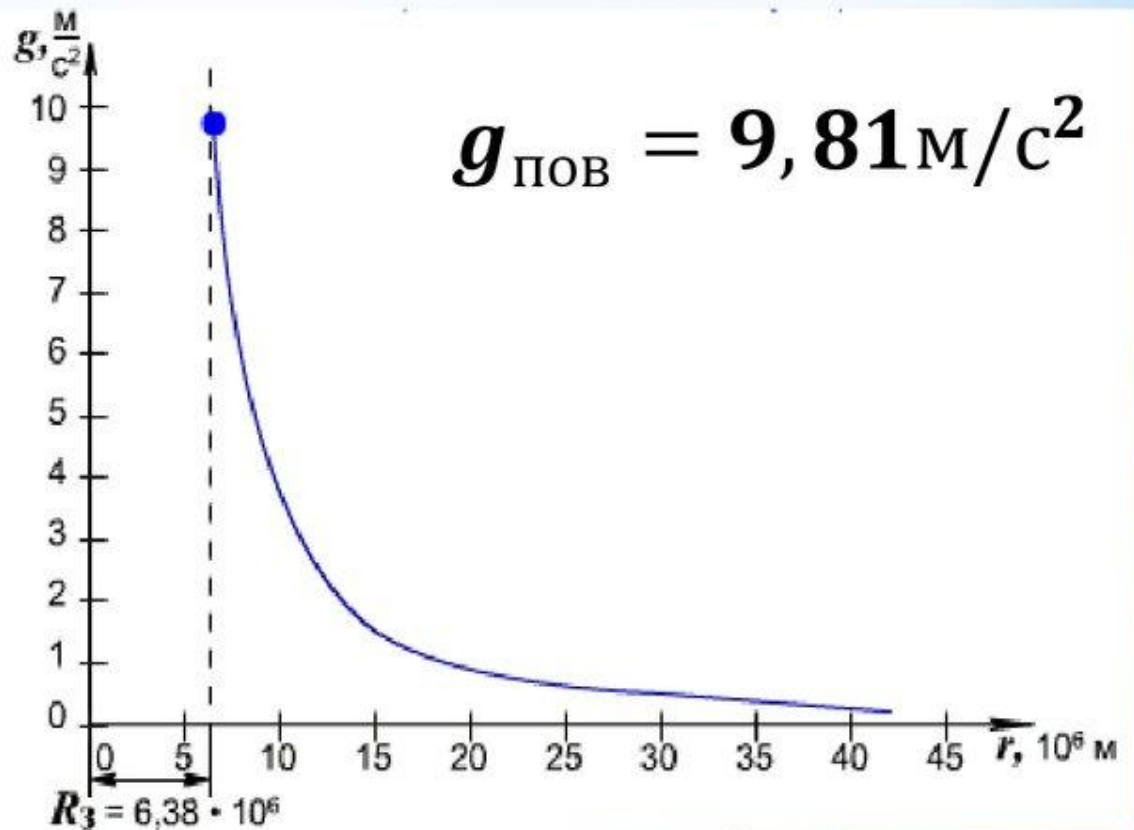
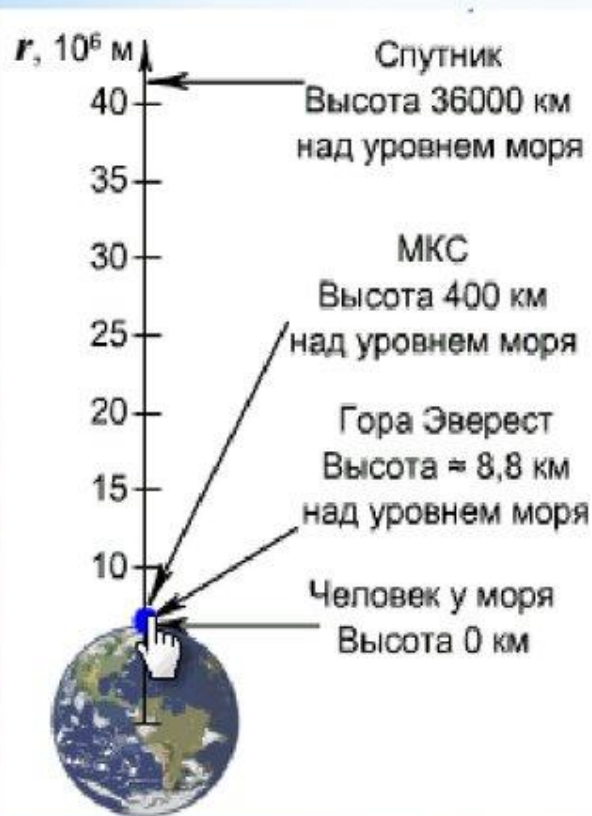
Отже, для прискорення вільного падіння отримаємо формулу

$$g = G \frac{M}{(R_3 + H)^2}$$



# Залежність прискорення вільного падіння від висоти

$$g_H = G \frac{M}{(R_3 + H)^2}$$



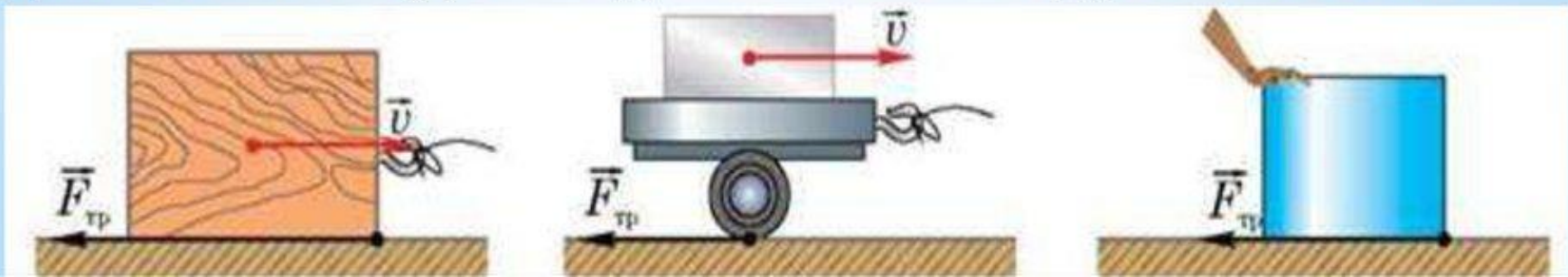
# Сили тертя -

тангенціальні сили, що виникають при дотиканні поверхонь тіл та перешкоджають їх відносному переміщенню

Сили тертя можуть бути різної природи, але в результаті їх дії механічна енергія завжди перетворюється на внутрішню енергію тіл, що дотикаються

**Зовнішнє (сухе)** - тертя, що виникає в площині дотику тіл при їх відносному переміщенні

**Внутрішнє (рідке)** - тертя між різними шарами рідини або газу, швидкості яких відрізняються



# Тертя спокою -

це тертя за відсутності відносного переміщення дотичних тіл.

Сила тертя спокою перешкоджає виникненню руху одного тіла по поверхні іншого.

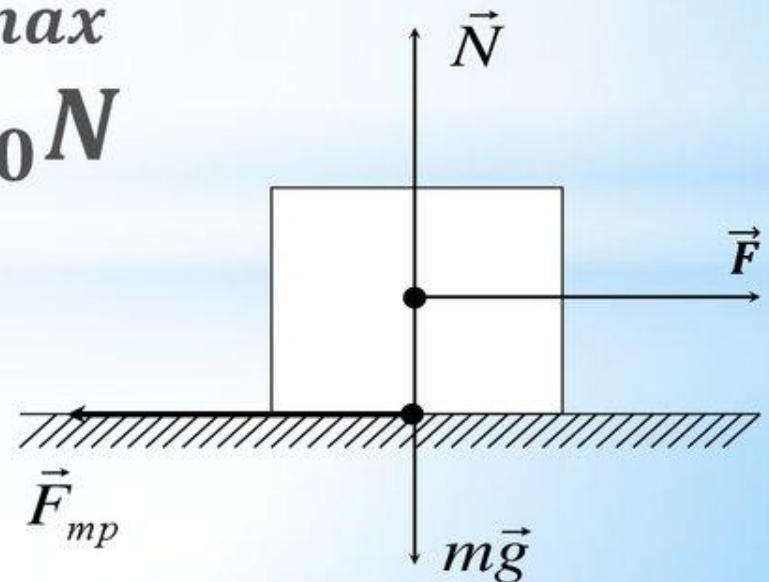
Відносний рух тіл виникає, якщо зовнішня сила більша граничної сили тертя спокою  $F_{max}$

$$F_{\text{зовн}} > F_{\text{max}}$$

$$F_{\text{max}} = \mu_0 N$$

$\mu_0$  - коефіцієнт тертя спокою

$N$  - сила нормального тиску

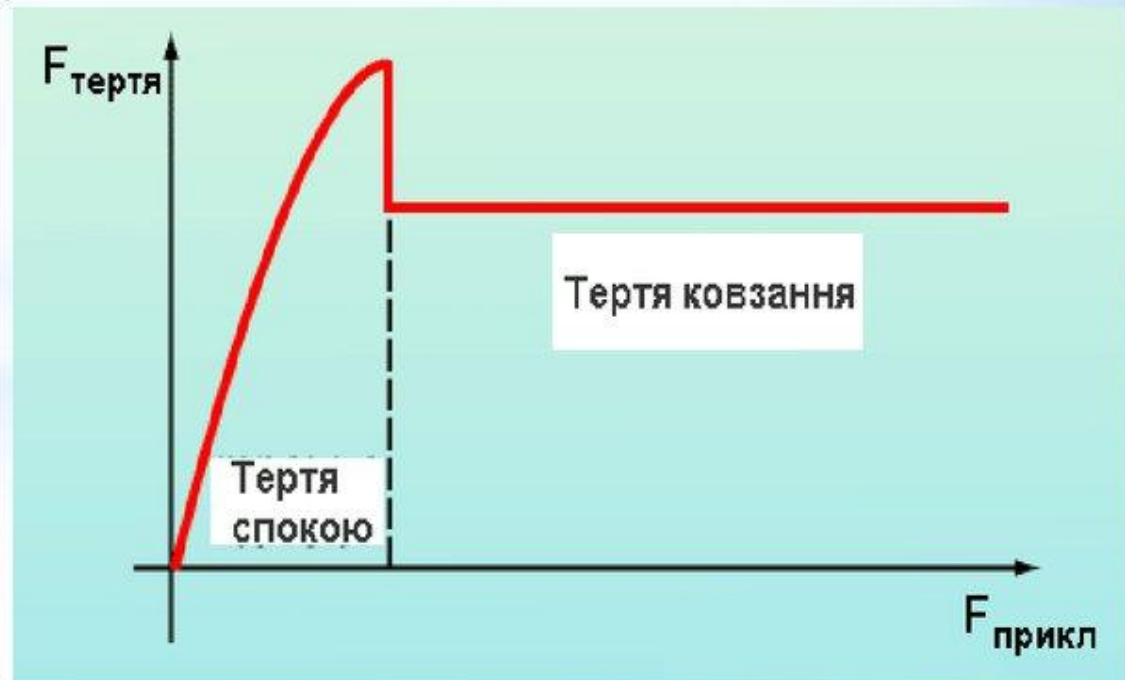


# Тертя ковзання -

це тертя при відносному переміщенні тіл, що дотикаються.

Сила тертя ковзання  $F_{\text{тер}}$  пропорційна силі  $N$  нормального тиску, з якою одне тіло діє на інше (силі реакції опори)

$$F_{\text{тер}} = \mu N$$



# Тертя кочення

виникає у випадку, якщо одне тіло котиться по поверхні іншого.

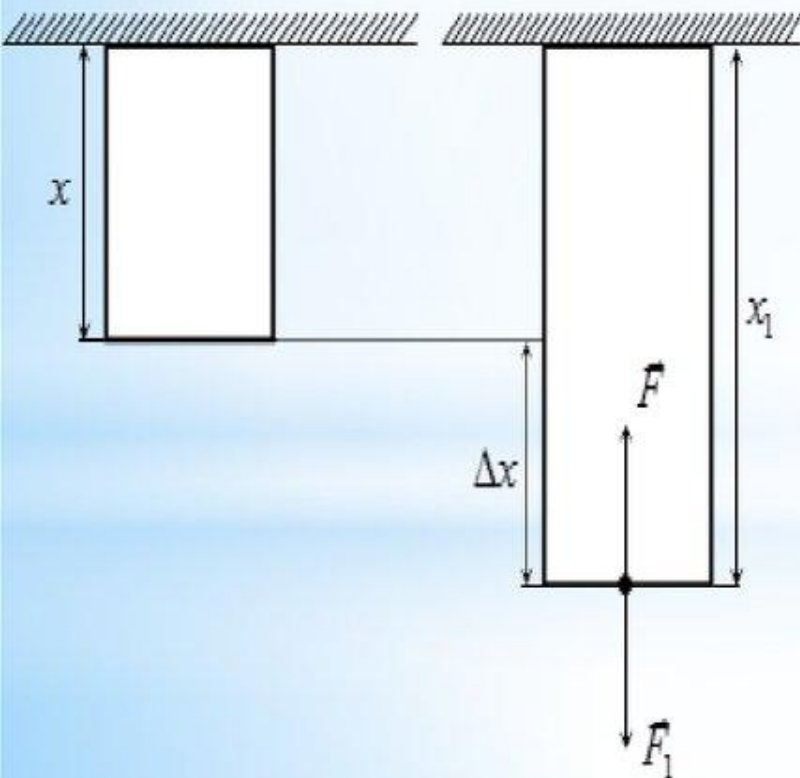
Формулу, за допомогою якої можна визначити тертя кочення, дослідним шляхом встановив Ньютон. Він показав, що сила тертя кочення пропорційна силі нормального тиску і обернено пропорційна радіусу тіла:

$$F_{\text{тер}} = \mu_{\text{к}} \frac{N}{R}$$

$\mu_{\text{к}}$  - коефіцієнт тертя кочення, він має розмірність довжини, не залежить від швидкості кочення і радіуса тіла, а залежить від матеріалу і стану поверхні тіл.

# Сили пружності

При будь-якій деформації виникають сили, які залежать як від величини, так і від типу деформації. Ці сили і називаються **силами пружності**.



Якщо до незакріпленого кінця стержня прикласти силу  $F$ , то він видовжиться під дією цієї сили. Величина

$$\Delta x = x_1 - x$$

називається **абсолютним видовженням** стержня. Величина

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$$

називається **відносним видовженням** стержня.

# Сили пружності

В розтягнутому стержні виникає сила пружності, яка за третім законом Ньютона дорівнює зовнішній силі. Фізична величина, яка визначається відношенням сили пружності до поперечного перерізу, у якому вона виникла, називається механічною напругою

$$\sigma = \frac{F}{S}; \quad [\sigma] = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Як показують досліди, для невеликих деформацій механічна напруга пропорційна видовженню

$$\sigma = -E\varepsilon$$

$E$  - модуль пружності (модуль Юнга)



$$\sigma = -E\varepsilon$$

## Закон Гука

Цей емпіричний вираз є математичною формою запису закону Гука: механічна напруга, що виникає при пружній деформації тіла, прямо пропорційна його відносному видовженню.

Інше формулювання закону Гука: сила пружності пропорційна величині деформації і має протилежний до деформації напрям.

$$F = -k\Delta x$$

$k$  - жорсткість тіла. Математичний вираз для жорсткості отримується з порівняння цих виразів:

$$k = E \frac{S}{x}$$

## Вага тіла -

це сила, з якою тіло внаслідок тяжіння до Землі діє на опору чи підвіс, що утримують тіло від вільного падіння.

Вага виникає внаслідок дії сили тяжіння, але за фізичною природою вона є силою пружності.

Сила тяжіння діє на тіло завжди, а вага з'являється у випадку дії на тіло ще й інших сил, внаслідок чого тіло набуває вертикальної складової прискорення  $\vec{a}$ . В загальному випадку вага визначається формулою

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

При  $\vec{g} = \vec{a}$   $\vec{P} = \mathbf{0}$  - настає стан невагомості.

# Енергія

це фізична величина, що є мірою різних форм руху.

Енергія механічної системи кількісно характеризує цю систему з точки зору кількісних та якісних перетворень руху в ній. Ці перетворення зумовлені взаємодією тіл системи як одне з одним, так із зовнішніми тілами.

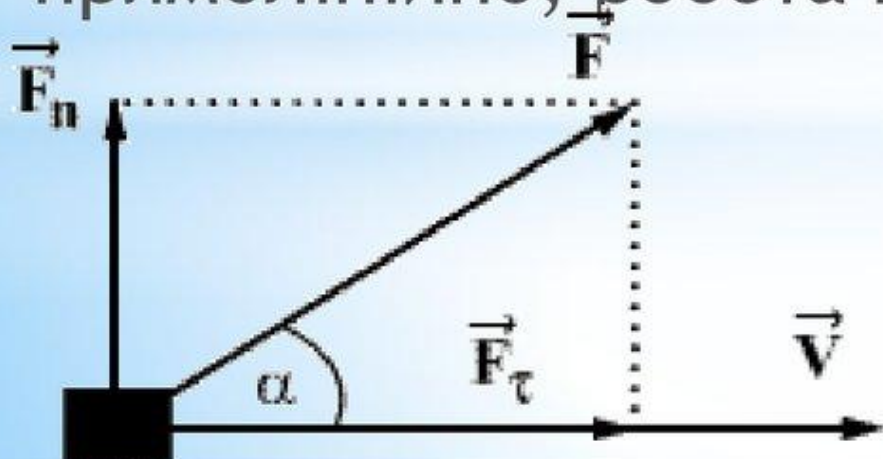
Рух є невід'ємною властивістю матерії, тому кожне тіло має енергію або, як іноді говорять, запас енергії, що є мірою його руху.

Для кількісної характеристики різних форм руху вводяться відповідні види (форми) енергії, - механічна, внутрішня, електромагнітна та інші.

# Механічна робота

Зміна механічного руху та енергії тіла відбувається в процесі силової взаємодії цього тіла з іншими. Для кількісної характеристики цього процесу в механіці вводиться поняття механічної роботи.

У випадку дії на тіло сталої сили, в результаті чого тіло рухається поступально та прямолінійно, робота визначається формулою



$$A = F S \cos \alpha = F_\tau S$$
$$[A] = 1 \text{ Дж}$$

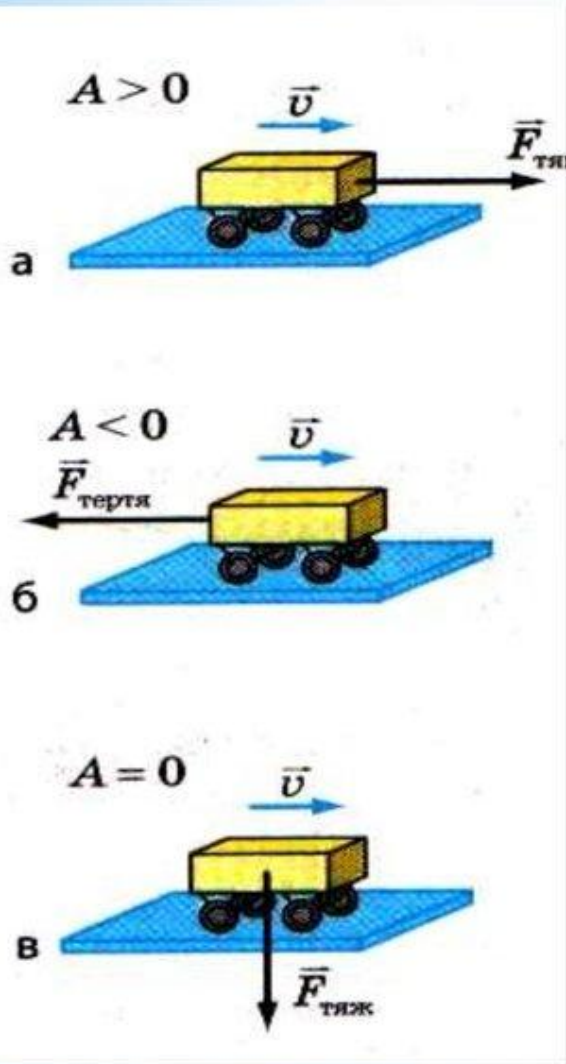
# Механічна робота

Робота - скалярна фізична величина, тому вона може набувати різних за знаком значень:

а) Якщо кут між напрямком сили та прискорення  $\alpha$  гострий, то  $\cos\alpha > 0$  і  $A > 0$ ;

б) Якщо  $\alpha$  - тупий, то  $\cos\alpha < 0$  і  $A < 0$ ;

в) Якщо  $\alpha = 90^\circ$ , тобто  $\vec{F} \perp \vec{S}$ , то  $A = 0$  - сила роботу не виконує



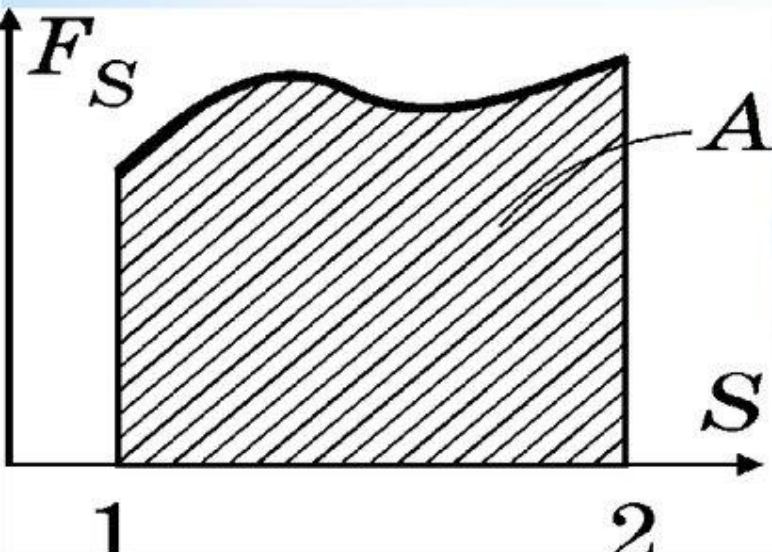
$$dA = FdS\cos\alpha$$

## Механічна робота

У випадку дії на тіло змінної сили або більш складного його руху, спочатку знаходиться елементарна робота на ділянці, де силу можна вважати сталою, а рух - прямолінійним

$$dA = FdS\cos\alpha$$

Повна робота на ділянці визначається інтегралом



$$A = \int_{S_1}^{S_2} FdS\cos\alpha$$

# Потужність -

це фізична величина, яка характеризує швидкість виконання роботи.

Якщо за час  $\Delta t$  виконується робота  $\Delta A$ , то потужність визначається формулою

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}; [N] = 1\text{Вт}$$

Або у загальному випадку

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Підставимо у цей вираз формулу  $dA$ :

$$N = \frac{FdScos\alpha}{dt} = F \frac{dS}{dt} cos\alpha = Fv cos\alpha$$

# Кінетична енергія поступального руху

Кінетична енергія - енергія руху.

Нехай тіло пройшло шлях  $S$  у напрямі сили  $F$ , а його швидкість при цьому змінилася від  $v_1$  до  $v_2$ . Тоді робота дорівнюватиме

$$dA = FdS = madS = m \frac{dv}{dt} dS = m \frac{dS}{dt} dv$$
$$dA = mv dv$$

Ця робота витрачається на збільшення кінетичної енергії тіла

$$dA = dE_k$$



# Кінетична енергія поступального руху

$$dA = dE_k; dA = mv dv$$

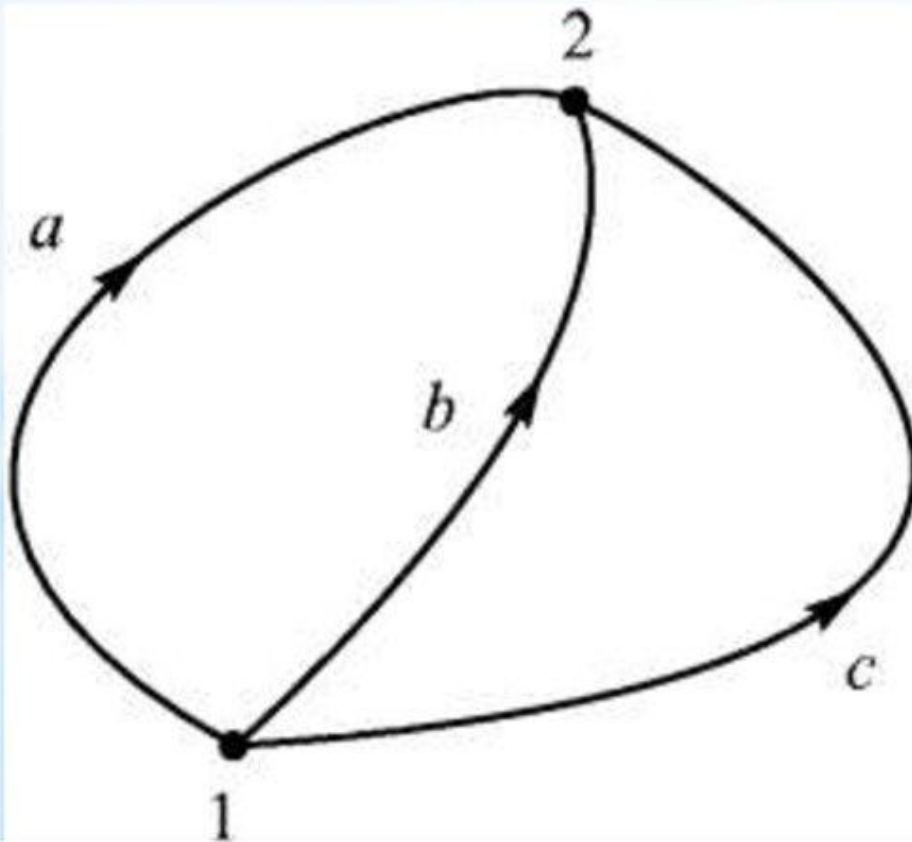
$$A = \int_{s_1}^{s_2} dA = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \\ = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$

Отже, *робота дорівнює зміні кінетичної енергії тіла* (теорема про кінетичну енергію), а кінетична енергія тіла обчислюється за формулою

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

# Поняття консервативної сили

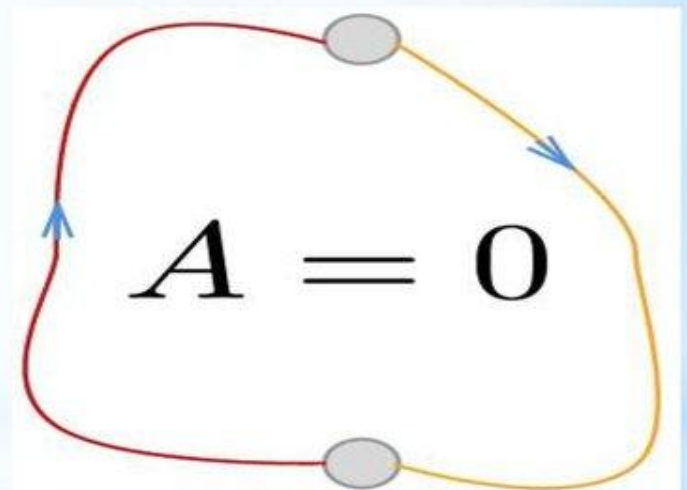
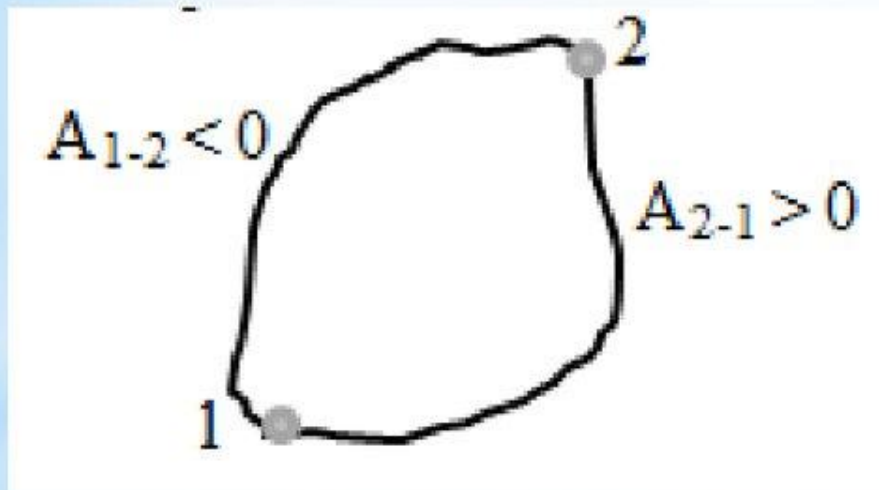
Силу, що діє на матеріальну точку, називають **консервативною** (або **потенціальною**), якщо робота, яку здійснює ця сила, не залежить від форми траєкторії.



$$A_{12}(a) = A_{12}(b) = A_{12}(c)$$

# Консервативні сили

Зміна напрямку руху точки вздовж траєкторії змінює знак консервативної сили, тому при переміщенні МТ вздовж замкненої траєкторії робота консервативної сили дорівнює нулю.



Прикладом консервативних сил є сили всесвітнього тяжіння, сили пружності, сили електростатичної взаємодії заряджених тіл.

# Потенціальна енергія

Поле, робота сил якого по переміщенню МТ вздовж довільної замкненої траєкторії дорівнює нулю, називається *потенціальним*.

*Потенціальна енергія* - це фізична характеристика механічної системи, яка визначається взаємним розташуванням тіл та характером взаємодії між ними.

1) Потенціальна енергія в гравітаційному полі:

$$E_p = G \frac{Mm}{r}$$

У випадку земного тяжіння  $E_p = mgh$

# Потенціальна енергія

2) Потенціальна енергія пружно деформованого тіла:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Робота консервативних сил над системою дорівнює зміні потенціальної енергії, взятій з протилежним знаком (*теорема про потенціальну енергію*):

$$A = \Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

# Закон збереження механічної енергії

Використаємо теорему про потенціальну та кінетичну енергії:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} \\ A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} \\ E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1} \\ E_{p1} + E_{k1} = E_{k2} + E_{p2} \end{array} \right.$$

Суму кінетичної та потенціальної енергії називають повною механічною енергією системи

$$E = E_p + E_k$$

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{k2} + E_{p2}$$

## Закон збереження механічної енергії

Таким чином, енергія замкненої консервативної системи залишається незмінною при всіх процесах та перетвореннях, що в ній відбуваються - це закон збереження механічної енергії.

В загальному випадку енергія може переходити з одних видів у інші (механічні, теплові), але загальна її кількість залишається незмінною - це загальний закон збереження і перетворення енергії.

# Дисипативні сили

## *Дисипація - розсіювання*

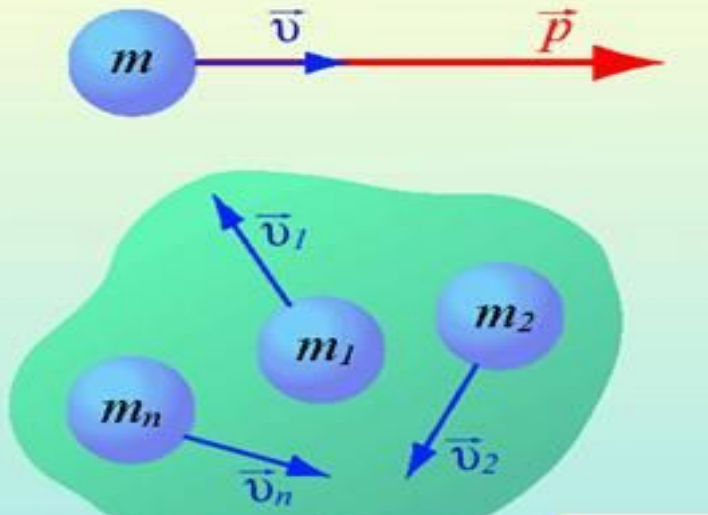
Дисипативними силами називають сили, робота яких при довільних переміщеннях замкненої системи завжди від'ємна. В результаті дії цих сил механічна енергія переходить в інші види енергії.

До дисипативних відносяться сили тертя ковзання, кочення та сили опору руху в рідинах та газах.

В дисипативних системах закон збереження механічної енергії не виконується, оскільки механічна енергія перетворюється в інші види.



# Імпульс замкнутої системи тіл зберігається



$$\sum_{i=1}^n p_i = \text{const}$$

**Системою** називається сукупність тіл, об'єднаних певними зв'язками. **Замкнутою (ізолюваною) системою** називається система, яка не обмінюється з навколишнім середовищем ні енергією, ні речовиною, ні інформацією. Закони збереження є справедливими тільки для замкнутих систем.

Закон збереження імпульсу дозволяє легко пояснити **принцип реактивного руху.**

# ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ СИСТЕМИ

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \right) = 0$$

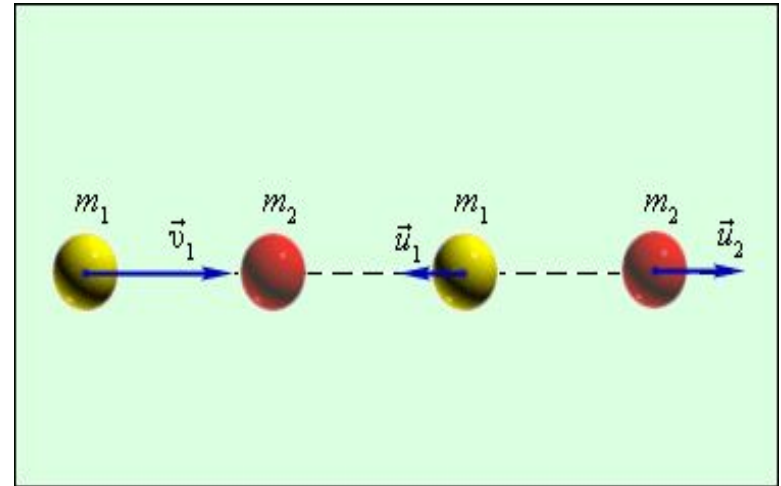


$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \left( m_i \vec{v}_i \right) = \text{const}$$



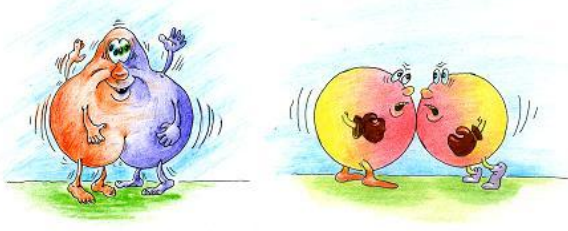
# Пружне зіткнення двох тіл

**Абсолютно пружним зіткненням** називають зіткнення при якому енергія не переходить у внутрішню, тобто сумарна механічна енергія залишається сталою.



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

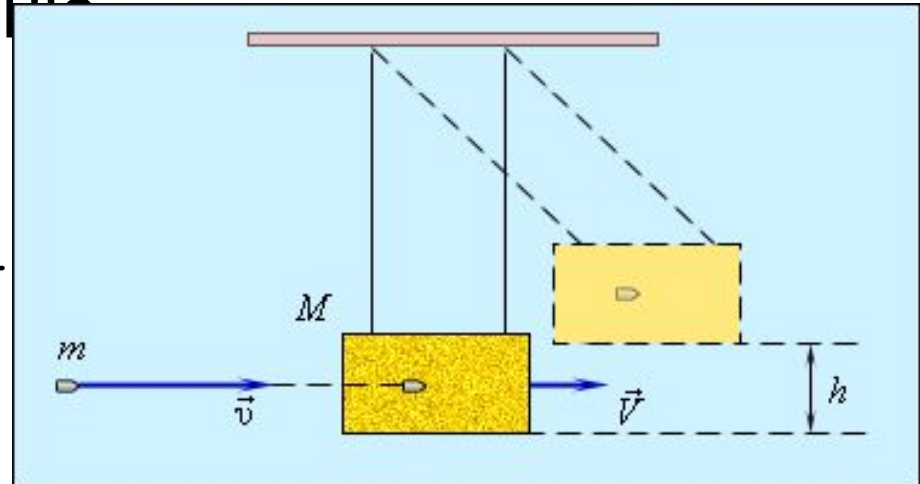
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$



# ПРУЖНЕ ТА НЕПРУЖНЕ ЗІТКНЕННЯ ДВОХ ТІЛ

**□ Абсолютно непружне зіткнення** - зіткнення після якого тіла рухаються як єдине ціле, а частина механічної енергії переходить у внутрішню

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + Q$$