



Математична логіка та теорія алгоритмів

Лекція №1. Класична математична логіка.
Алгебра логіки. Логіка висловлювань.

**Логіка - це мистецтво помилятися з
повною достовірністю.**

(Джозеф Вуд Кратч)



**Лектор – Шаповалов С.П.
Кафедра комп'ютерних наук
Сумського державного університету**



Зміст лекції.

- Основні поняття та означення.
- Висловлювання та логічні зв'язки.
- Інтерпретація формул логіки висловлювань.
- Проблема вирішення та функціональна повнота.
- Дедуктивні висновки.





Логіка
висловлювань

Логіка
предикатів

СПОСОБИ
ПОБУДОВИ
ЛОГІКИ

- Алгебра логіки
- Числення логіки

Між основними поняттями цих мов спостерігається взаємно однозначна відповідність, але, строго кажучи, ці терміни не є синонімами.



Логіка висловлювань як алгебра

- **логіка висловлювань** – це наука про міркування, засновки і висновки яких складаються із висловлювань.

Означення 1.1. Висловлюванням називають осмислений вираз звичайної мови, якому можна приписати значення істинності.

Означення 1.2. Значення істинності – це абстрактний об'єкт, що ставиться у відповідність висловлюванню: істина – коли висловлювання відповідає дійсності, хибність – коли висловлювання не відповідає дійсності.



Означення 1.3. Логіка висловлювань – це алгебраїчна структура $\langle \{ X, I \}, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \sim, X, I \rangle$ з носієм – двійковою множиною $\{ X : \text{“Хибність”}, I : \text{“Істина”} \}$, операціями – логічними зв'язками : “ \wedge ” – кон'юнкція, “ \vee ” – диз'юнкція, “ \neg ” – заперечення, “ \rightarrow ” – імплікація, “ \sim ” – еквівалентність і константами : X – хибність та I – істина.

Означення 1. 4. Атомом (елементарним висловлюванням) називається таке висловлювання, яке є простим розповідним реченням, тобто не має складових частин.



Означення 1.5. Правила побудови формул у логіці висловлювань визначають таким:

1. Атом є формулою.
2. Якщо A і B – формули, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$, $\neg A$ – також формули.
3. Ніяких формул, крім породжених зазначеними вище правилами, не існує.

Означення 1.6. Інтерпретацією висловлювань називають приписування значень істинності атомам, із яких побудовані висловлювання.

Якщо висловлювання містить n атомів, то можна скласти 2^n інтерпретацій.



Приклад 1.1. Для висловлювання “*Якщо іде дощ, то щоб не змокнути, я відкриваю парасольку над головою*” записати формулу висловлювань і побудувати таблицю істинності.

Розв’язання. Для цього висловлювання введемо атоми : A – “*іде дощ*”, B – “*щоб не змокнути, я відкриваю парасольку над головою*”.

A	B	$A \rightarrow B$	Результат
X	X	I	<i>залишуся сухим</i>
X	I	I	<i>залишуся сухим</i>
I	X	X	<i>намокну</i>
I	I	I	<i>залишуся сухим</i>



З умовним висловлюванням $A \rightarrow B$ зв'язані ще три висловлювання : **конверсія**, **інверсія** та **контрапозиція**. Вони визначаються таким чином: $B \rightarrow A$ – **конверсія** висловлювання $A \rightarrow B$;
 $\neg A \rightarrow \neg B$ – **інверсія** висловлювання $A \rightarrow B$;
 $\neg B \rightarrow \neg A$ – **контрапозиція** висловлювання $A \rightarrow B$.

Приклад 1.2. Для висловлювання “ *Якщо він добре грає у футбол, то він популярний* ” знайти конверсію, інверсію та контрапозицію.



Приклад 1.3. Речення “ *Оскільки я ліг пізно спати, я проспав і через це не пішов на роботу* ” записати у вигляді формули логіки висловлювань.

Розв’язання. У цьому складному реченні виділимо прості речення та візьмемо їх у дужки – “*Оскільки (я ліг пізно спати), (я проспав) і через це не (пішов на роботу)*”.

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg C$$

Інтерпретація формул логіки

ВИСЛОВЛЮВАНЬ



- **Означення 1.7.** Формулу називають **тотожно істинною (тавтологією, або загальнозначущою)**, якщо вона набуде значення “*Істина*” на всіх інтерпретаціях (наборах значень змінних).

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$



- **Означення 1.8.** Формулу називають **тотожно хибною (суперечною, або нездійсненою)**, якщо вона набуває значення “*Хибність*” на всіх інтерпретаціях (наборах значень змінних).
- $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B) \wedge \neg B$



- **Означення 1.9.** Формулу називають **нейтральною** (не загальнозначущою, або несуперечливою), якщо вона на одних інтерпретаціях набуває значення “*Істина*”, а на інших “*Хибність*”.

$$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B$$



Особлива роль в алгебрі висловлень належить тотожно істинним формулам як способам правильних умовиводів, що від істинних посилянй приводять до істинних висновків. Для доведення, що наведені формули є тавтологіями, достатньо застосувати таблиці істинності.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення;
2. $A \vee \overline{A}$ – закон виключення третього;
3. $\overline{A \wedge \overline{A}}$ – закон заперечення суперечності;
4. $A \Rightarrow A$ – закон тотожності;
5. $A \wedge A \Leftrightarrow A$
6. $A \vee A \Leftrightarrow A$ } – закони ідемпотентності;
7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ – закон контрапозиції;
8. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – закон силогізму;
9. $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
10. $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ } – закони де Моргана;
11. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ – правило Модус поненс (modus ponens).

Проблема вирішення в алгебрі висловлювань. Функціональна повнота множини логічних операцій



- **Проблема вирішення** в логіці висловлювань розглядається як відповідь на питання, чи існує алгоритм, який за скінченне число кроків дає змогу визначити тип будь-якої формули алгебри висловлювань. В алгебрі висловлювань ця проблема розв'язується позитивно. Зокрема можна запропонувати способи : 1) Складанням таблиць істинності формул; 2) Застосуванням методу міркувань від супротивного; 3) Зведенням формул до нормальних форм.



- Таблиця істинності – це табличне визначення істинності складного висловлювання при всіх можливих (інтерпретаціях) значеннях змінних (атомів), що складають дане висловлювання.



Аналіз формул із застосуванням методу міркувань від супротивного базується на таких умовиводах:

А. Якщо припустимо, що для деякого набору значень атомів формула $\alpha(A_1, A_2, \dots, A_n)$ набуває значення “Хибність”, а після аналізу формули прийдемо до суперечності, то відносно формули α робимо висновок, що вона є тавтологією.

Б. Якщо припустимо, що для деякого набору значень атомів формула $\alpha(A_1, A_2, \dots, A_n)$ набуває значення “Істина” і прийдемо до суперечності, то α є суперечною.

В. Якщо не одержимо суперечності ні при припущенні А), ні при припущенні Б), то робимо висновок, що формула α є нейтральною.



Приклад 1. 4. Визначити тип формули

$$\alpha = ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A.$$

Розв'язання. Припустимо, що α не є тотожно істинною формулою. Тоді повинен існувати такий набір значень атомів, на якому вона набуває значення “ Хибність ”. Формула α є імплікацією. Значення “ Хибність ” можливе лише за умови, що $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ набуває на цьому наборі значення “ Істина ”, а A – “ Хибність ”. Тоді випливає, що $A \rightarrow B$ повинне набувати значення “ Хибність ”, що неможливо, оскільки A – “ Хибність ”. Отже, α є тавтологією.



Перед тим як розв'язувати проблему вирішення, інколи корисно спочатку перетворити формулу логіки висловлювань за допомогою рівносильних перетворень до деякої стандартної форми. Такими формами є диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) та кон'юнктивна нормальна форма (КНФ).

Означення 1.10. Елементарною кон'юнкцією (диз'юнкцією) називається кон'юнкція (диз'юнкція) скінченного числа попарно різних логічних змінних, узятих із запереченням або без нього.

Наприклад, ABC , \overline{ABC} , $A_1 A_2 \overline{A_3}$ є елементарними кон'юнкціями, $A \vee B \vee C$, $\overline{A_1} \vee A_2$ є елементарними диз'юнкціями, а $\overline{A \vee B}$ вже такими не будуть.



Означення 1.11. Диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою називається диз'юнкція (кон'юнкція) скінченного числа попарно різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

Наприклад, $AB \vee \bar{A} \vee B\bar{C} \vee BCD$ є ДНФ, $(A \vee B)(\bar{A} \vee C)(B \vee C)$ – КНФ.

Довільну формулу алгебри висловлювань можна перетворити в одну з нормальних форм. Для цього необхідно виконати ряд кроків:

Усунути логічні зв'язки “Імплікація” та “Еквіваленція” за формулами

$$A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B, \quad A \sim B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \quad .$$

Використати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Використати відповідні закони дистрибутивності.



Означення 1.12. Деяка множина операцій алгебри висловлювань називається **функціонально повною**, якщо довільна формула алгебри висловлювань рівносильна формулі, в яку входять лише операції із цієї системи.

Теорема 1.1. Кожна із множин операцій $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ є функціонально повною.

Теорема 1.2. Кожна функція логіки висловлювань є функцією істинності деякої ДНФ (КНФ).