МОДУЛЬ 1

Математична логіка та теорія алгоритмів

Лекція №1. Класична математична логіка. Алгебра логіки. Логіка висловлювань.

Логіка - це мистецтво помилятися з повною достовірністю.

(Джозеф Вуд Кратч)

Лектор – Шаповалов С.П.
Кафедра комп'ютерних наук
Сумського державного університету

Зміст лекції.

- Основні поняття та означення.
- Висловлювання та логічні зв'язки.
- Інтерпретація формул логіки висловлювань.
- Проблема вирішення та функціональна повнота.
- Дедуктивні висновки.

Логіка висловлювань

Логіка предикатів

СПОСОБИ ПОБУДОВИ ЛОГІКИ

- Алгебра логіки
- Числення логіки

Між основними поняттями цих мов спостерігається взаємно однозначна відповідність, але, строго кажучи, ці терміни не є синонімами.

Логіка висловлювань як алгебра

- **логіка висловлювань** – це наука про міркування, засновки і висновки яких складаються із висловлювань.

Означення 1.1. **Висловлюванням** називають осмислений вираз звичайної мови, якому можна приписати значення істинності.

Означення 1. 2. **Значення істинності** – це абстрактний об'єкт, що ставиться у відповід-ність висловлюванню: істина – коли висловлювання відповідає дійсності, хибність – коли висловлювання не відповідає дійсності.

Означення 1.3. Логіка висловлювань – це алгебраїчна структура $\langle\{ X,\ I \}, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \sim, X, I \rangle$ з носієм – двійковою множиною { X : “*Хибність*”, I : “*Істина*”}, операціями – логічними зв’язками : “ $\wedge$ ” - кон’юнкція, “ $\vee$ ” - диз’юнкція, “ $\neg$ ”– заперечення, “ $\rightarrow$ ” – імплікація, “ $\sim$ ” – еквівалентність і константами : X – хибність та I – істина.

Означення 1. 4. Атомом (елементарним висловлюванням) називається таке висловлювання, яке є простим розповідним реченням, тобто не має складових частин.

Означення 1.5. Правила побудови формул у логіці висловлювань визначають таким:

1. Атом є формулою.
2. Якщо *A* і *B* – формули, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$, $\neg A$ – також формули.
3. Ніяких формул, крім породжених зазначеними вище правилами, не існує.

Означення 1.6. Інтерпретацією висловлювань називають приписування значень істинності атомам, із яких побудовані висловлювання.

Якщо висловлювання містить *n* атомів, то можна скласти $\mathbf{2^n}$ інтерпретацій.

Приклад 1.1. Для висловлювання "*Якщо іде дощ, то щоб не змокнути, я відкриваю парасольку над головою*" записати формулу висловлювань і побудувати таблицю істинності.

Розв'язання. Для цього висловлювання введемо атоми : *A* – " *йде дощ* ", *B* – " *щоб не змокнути, я відкриваю парасольку над головою* ".

A	B	A→B	Результат
Х	Х	І	*залишуся сухим*
Х	І	І	*залишуся сухим*
І	Х	Х	*намокну*
І	І	І	*залишуся сухим*

З умовним висловлюванням $A \to B$ зв'язані ще три висловлювання : **конверсія**, **інверсія** та **контрапозиція.** Вони визначаються таким чином: $B \to A$ –**конверсія** висловлювання $A \to B$;

$\neg A \to \neg B$ – **інверсія** висловлювання $A \to B$;

$\neg B \to \neg A$ – контрапозиція висловлювання $A \to B$.

Приклад 1.2. Для висловлювання " *Якщо він добре грає у футбол, то він популярний* " знайти конверсію, інверсію та контрапозицію.

Приклад 1.3. Речення “ *Оскільки я ліг пізно спати, я проспав і через це не пішов на роботу* ” записати у вигляді формули логіки висловлювань.

Розв’язання. У цьому складному реченні виділимо прості речення та візьмемо їх у дужки – “*Оскільки (я ліг пізно спати), (я проспав) і через це не (пішов на роботу)* ”.

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg C$$

Інтерпретація формул логіки висловлювань

- **Означення 1. 7.** Формулу називають **тотожно істинною (тавтологією**, або загальнозначущою**),** якщо вона набуде значення “ *Істина* ” на всіх інтерпретаціях (наборах значень змінних).

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

- **Означення 1.8.** Формулу називають **тотожно хибною (суперечною**, або нездійсненною **)**, якщо вона набуває значення “ *Хибність* ” на всіх інтерпретаціях (наборах значень змінних).
- $(A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B) \wedge \neg B$

- **Означення 1.9.** Формулу називають **нейтральною (не загальнозначущою**, або несуперечливою**)**, якщо вона на одних інтерпретаціях набуває значення "*Істина*", а на інших " *Хибність* ".

$$((A \to B) \to B) \to B$$

Особлива роль в алгебрі висловлень належить тотожно істинним формулам як способам правильних умовиводів, що від істинних посилань приводять до істинних висновків. Для доведення, що наведені формули є тавтологіями, достатньо застосувати таблиці істинності.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – *закон подвійного заперечення*;

2. $A \vee \overline{A}$ – *закон виключення третього*;

3. $\overline{A \wedge \overline{A}}$ – *закон заперечення суперечності*;

4. $A \Rightarrow A$ – *закон тотожності*;

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ A \wedge A \Leftrightarrow A \\ 6.\ A \vee A \Leftrightarrow A \end{array}\right\} \text{– закони ідемпотентності;}$$

7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ – *закон контрапозиції*;

8. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – *закон силогізму*;

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ \overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \\ 10.\ \overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \end{array}\right\} \text{– закони де Моргана;}$$

11. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ – *првило Модус поненс* (modus *ponens*).

Проблема вирішення в алгебрі висловлювань. Функціональна повнота множини логічних операцій

- **Проблема вирішення** в логіці висловлювань розглядається як відповідь на питання, чи існує алгоритм, який за скінченне число кроків дає змогу визначити тип будь-якої формули алгебри висловлювань. В алгебрі висловлювань ця проблема розв'язується позитивно. Зокрема можна запропонувати способи : 1) Складанням таблиць істинності формул; 2) Застосуванням методу міркувань від супротивного; 3) Зведенням формул до нормальних форм.

- Таблиця істинності – це табличне визначення істинності складного висловлювання при всіх можливих (інтерпретаціях) значеннях змінних (атомів), що складають дане висловлювання.

Аналіз формул із застосуванням методу міркувань від супротивного базується на таких умовиводах:

А. Якщо припустимо, що для деякого набору значень атомів формула $\alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ набуває значення " Хибність ", а після аналізу формули прийдемо до суперечності, то відносно формули α робимо висновок, що вона є тавтологією.

Б. Якщо припустимо, що для деякого набору значень атомів формула $\alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ набуває значення "Істина" і прийдемо до суперечності, то α є суперечною.

В. Якщо не одержимо суперечності ні при припущенні А) , ні при припущенні Б), то робимо висновок, що формула α є нейтральною.

Приклад 1. 4. Визначити тип формули $\alpha = ((A \to B) \to A) \to A$.

Розв'язання. Припустимо, що α не є тотожно істинною формулою. Тоді повинен існувати такий набір значень атомів, на якому вона набуває значення “ Хибність ”. Формула α є імплікацією. Значення “ Хибність ” можливе лише за умови, що $(A \to B) \to A$ набуває на цьому наборі значення “ Істина ”, а A – “ Хибність ”. Тоді випливає, що $A \to B$ повинне набувати значення “ Хибність ”, що неможливо, оскільки A – “ Хибність ”. Отже, α є тавтологією.

Перед тим як розв’язувати проблему вирішення, інколи корисно спочатку перетворити формулу логіки висловлювань за допомогою рівносильних перетворень до деякої стандартної форми. Такими формами є диз’юнктивна нормальна форма (ДНФ) та кон’юнктивна нормальна форма (КНФ).

Означення 1.10. Елементарною **кон’юнкцією** (**диз’юнкцією**) називається кон’юнкція (диз’юнкція) скінченного числа попарно різних логічних змінних, узятих із запереченням або без нього.

Наприклад, ABC, $\overline{A}B\overline{C}$, $A_1 A_2 \overline{A_3}$ є елементарними кон’юнкціями, $A \vee B \vee C$, $\overline{A_1} \vee A_2 \vee A_3 \vee \overline{A_4}$ є елементарними диз’юнкціями, а $A\overline{A}B$ або $A_1 \vee \overline{A_1} \vee A_2$ вже такими не будуть.

Означення 1.11. Диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою називається диз'юнкція (кон'юнкція) скінченного числа попарно різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

Наприклад, $AB \vee \overline{A} \vee B\overline{C} \vee BCD$ є ДНФ, $(A \vee B)(\overline{A} \vee C)(B \vee C)$ – КНФ.

Довільну формулу алгебри висловлювань можна перетворити в одну з нормальних форм. Для цього необхідно виконати ряд кроків:
Усунути логічні зв'язки "Імплікація" та "Еквіваленція" за формулами $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}} \vee B, \quad A \sim \mathrm{B} = (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A})$.
Використати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.
Використати відповідні закони дистрибутивності.

Означення 1.12. Деяка множина операцій алгебри висловлювань називається **функціонально повною**, якщо довільна формула алгебри висловлювань рівносильна формулі, в яку входять лише операції із цієї системи.

Теорема 1.1. Кожна із множин операцій $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ є функціонально повною.

Теорема 1.2. Кожна функція логіки висловлювань є функцією істинності деякої ДНФ (КНФ).