Тема 3. Электрические колебания.

Переменный электрический ток.

Основные вопросы темы:

3.1.1. Свободные незатухающие электрические колебания
3.1.2. Затухающие электрические колебания
3.1.3. Вынужденные электрические колебания. Резонанс
3.1.4. Переменный электрический ток.

Повторение

Гармонические колебания

$$\xi = A \cdot sin(\omega t + \varphi_0)$$

A – амплитуда колебания; ω – круговая частота
(ω*t*+φ0)– фаза колебания;φ0 – начальная фаза колебания.

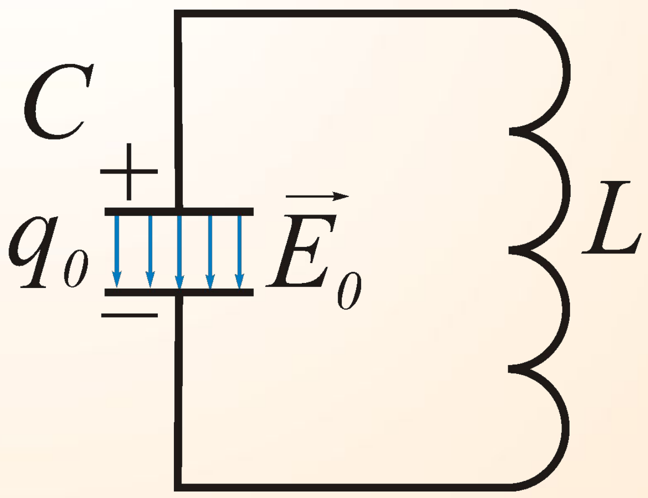
Дифференциальное уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний:

$$\boxed{\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0}$$

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси X:

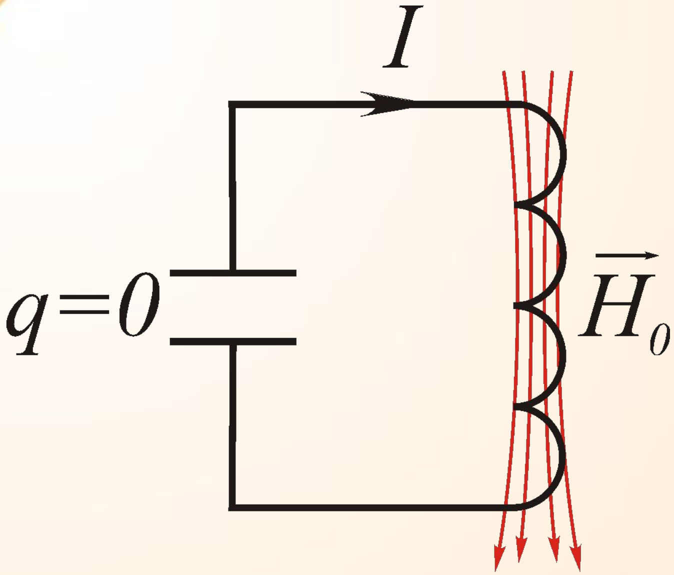
$$\xi(x, t) = A \cdot cos(\omega t - kx + \alpha)$$

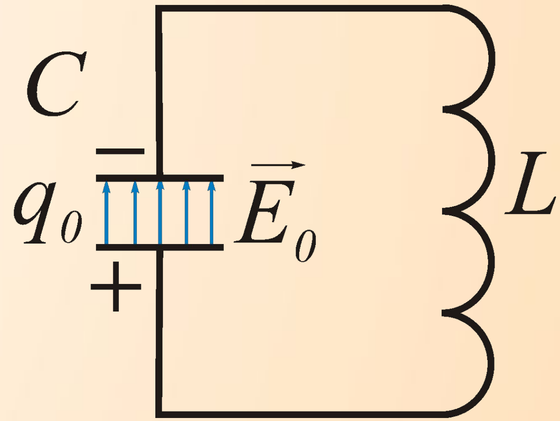
3.1. Свободные незатухающие электрические колебания

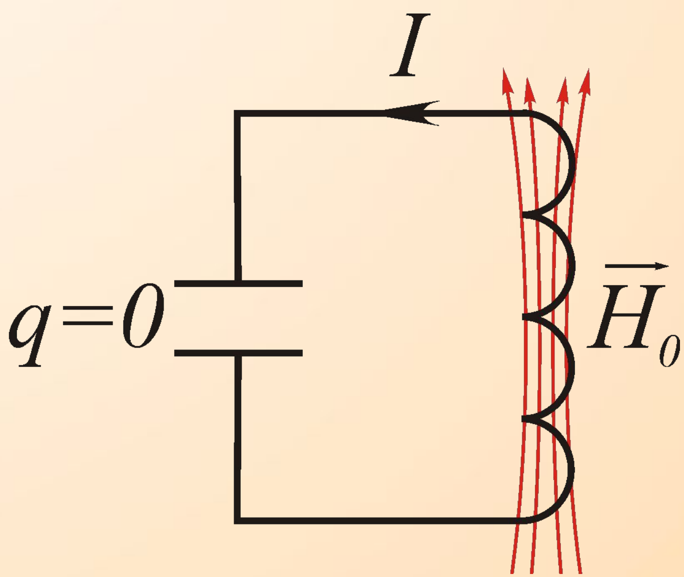


Колебательный контур – цепь, состоящая из конденсатора и катушки.

E –напряженность электрического поля;
H – напряженность магнитного поля;
q – заряд; C –емкость конденсатора;
L – индуктивность катушки,
I – сила тока в контуре


I
q=0
$\vec{H}_0$


C
−
q_0
$\vec{E}_0$
+
L


I
q=0
$\vec{H}_0$

Энергия заряженного конденсатора – энергия электрического поля:

$$W_e = \frac{q^2}{2C}$$

Энергия магнитного поля: $$W_m = \frac{LI^2}{2}$$

В любой момент времени: $$W = W_e + W_m$$

Для квазистационарных токов можно использовать законы Ома.

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с

$$\tau = \frac{l}{c}$$

Условие квазистационарности:

$$\tau = \frac{l}{c} << T$$

$$\nu = 50\text{Гц} \quad \Rightarrow \quad l \leq 100\text{км}$$

Сила тока: $$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

Закон Ома: $$I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{E}_{12}$$

$$R = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}, \quad \mathrm{E}_{12} = \mathrm{E}_C = -L\frac{dI}{dt}$$

E_C - Э.Д.С самоиндукции

$$0 = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d(\dot{q})}{dt} = \ddot{q} \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{q}{C} - L \cdot \ddot{q}$$

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих электрических колебаний

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0} \qquad (1)$$

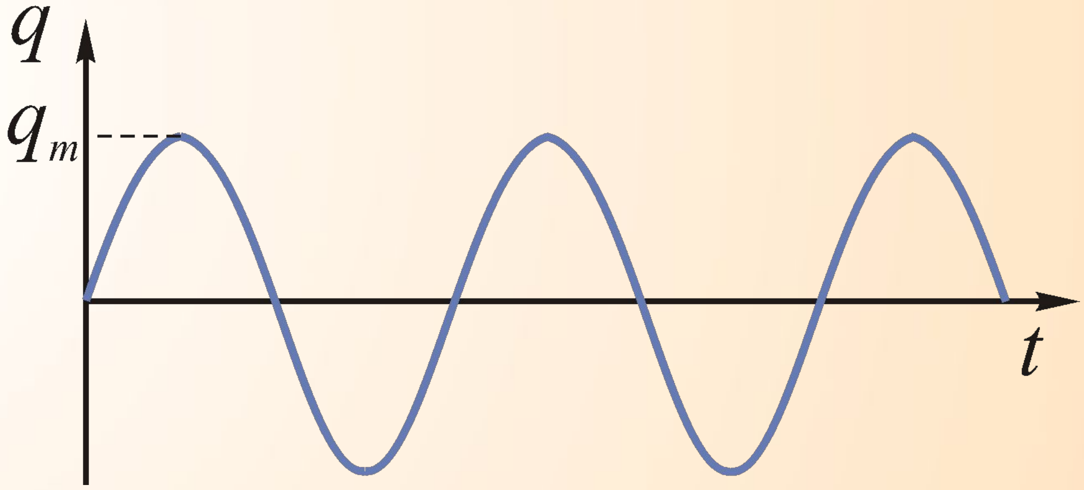
$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (2)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ ***- собственная круговая частота колебаний***

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (3)$$

T – период собственных колебаний в колебательном контуре



Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$U_m = q_m / C$$

Ток через контур:

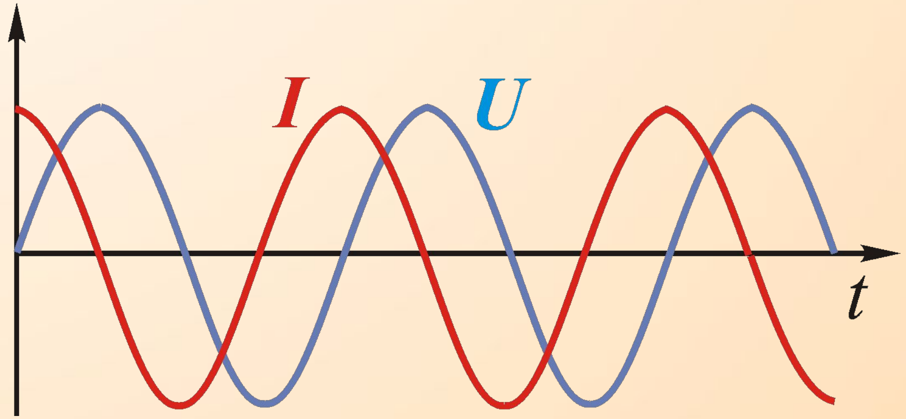
$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$I_m = \omega_0 q_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}}$$

$$-\sin\alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$$

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2) \qquad (4)$$

Ток опережает напряжение на π/2



Найдем соотношение между амплитудными значениями тока и напряжения:

$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} I_m = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m$$

Из закона Ома: $U=IR$

$$\rho = \sqrt{L/C}$$ ***- волновое сопротивление.***

Энергия электрического поля (энергия заряженного конденсатора) в любой момент времени:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Энергия магнитного кого поля (энергия катушки индуктивности) в любой момент времени:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Максимальное (амплитудное) значение энергии магнитного поля:

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2} = \frac{Lq_m^2}{2LC} = \frac{q_m^2}{2C}$$

- максимальное значение энергии электрического поля

Полная энергия колебательного контура в любой момент времени:

$$W = W_e + W_m = \frac{q_m^2}{2C}\left(\cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \sin^2(\omega_0 t + \alpha)\right) =$$

$$= \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

Полная энергия контура сохраняется постоянной

Задача 3.1

Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Определить частоту колебаний, возникающих в контуре, если максимальная сила тока в катушке индуктивности 1,2 А, максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 1200 В, полная энергия контура 1,1 мДж.

Дано:

$I_m = 1{,}2$ А

$U_{Cm} = 1200$ В

$W = 1{,}1$ мДж $= 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ Дж

ν - ?

$$W = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow L = \frac{2W}{I_m^2}$$

$$W = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{(CU_{Cm})^2}{2C} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \Rightarrow C = \frac{2W}{U_{Cm}^2}$$

$$LC = \frac{2W}{I_m^2} \cdot \frac{2W}{U_{Cm}^2} = \frac{4W^2}{I_m^2 U_{Cm}^2}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{I_m U_{Cm}}{4\pi W} = \frac{1{,}2\ \text{А} \cdot 1200\ \text{В}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж}} =$$

$$= 1{,}04 \cdot 10^5\ \frac{\text{Вт}}{\text{Вт} \cdot \text{с}} = 1{,}04 \cdot 10^5\ \frac{1}{\text{с}} = 1{,}04 \cdot 10^5\ \text{Гц}$$

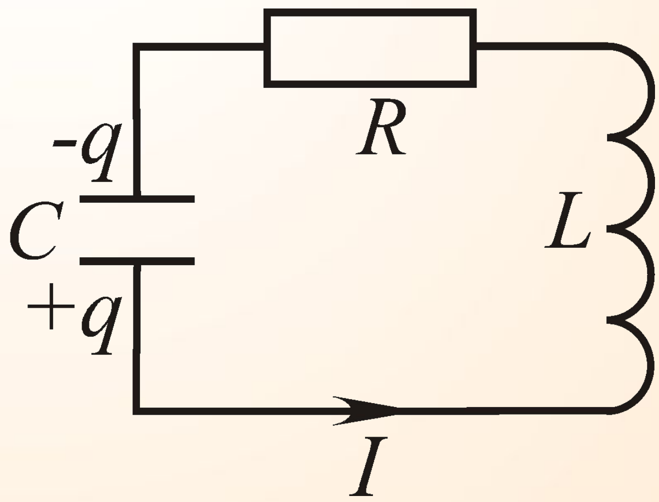
Задание

В колебательном контуре емкость возросла в 8 раз, а индуктивность уменьшилась в два раза.

Как изменится период собственных колебаний контура?

а) уменьшится в 2 раза;
б) увеличится в 2 раза;
в) уменьшится в 4 раз;
г) увеличится в 4 раз.

3.2. Затухающие электрические колебания



Закон Ома:

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}$$

$$I = \dot{q} \qquad dI/dt = \ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \beta = \frac{R}{2L}$$ - коэффициент затухания

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0} \qquad (5)$$

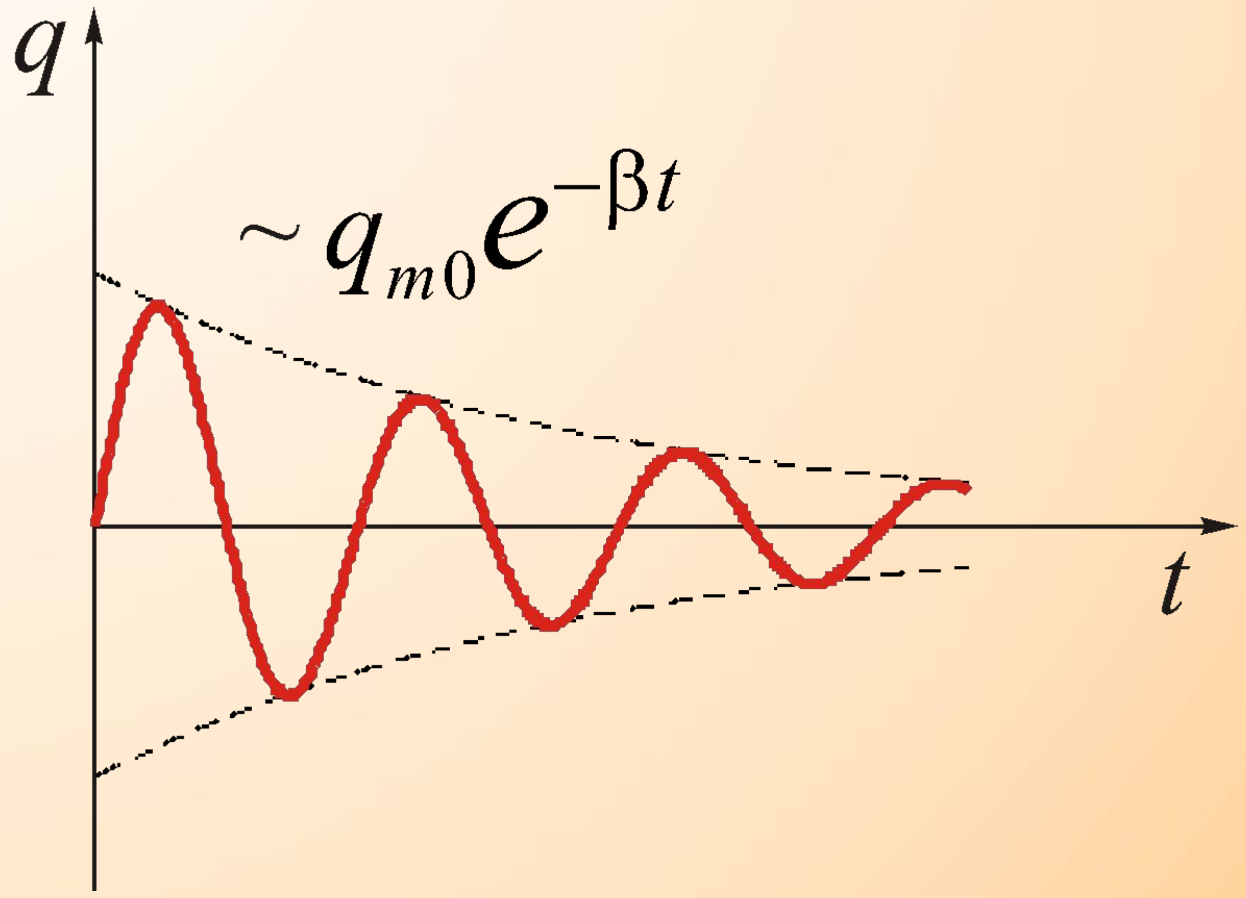
Слабое затухание:

$$\beta^2 << \omega_0^2, \quad \text{т.е.} \quad R^2/4L^2 << 1/LC$$

Решение уравнения (5) :

$$q = q_{m0}e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \qquad (6)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (7)$$



Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = U_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \qquad (8)$$

$$U_{m0} = q_{m0}/C$$

Ток через контур:

$$I = dq/dt$$

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$I = -\beta q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \omega q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

$$-\beta/\omega_0 = cos\psi \qquad \omega/\omega_0 = sin\psi$$

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t}\left(cos\psi \cdot cos(\omega t + \alpha) - sin\psi \cdot sin(\omega t + \alpha)\right)$$

$$I = I_{m0} e^{-\beta t} \cdot cos(\omega t + \alpha + \psi) \qquad (9)$$

Ψ – сдвиг фаз между током и напряжением

$$sin\psi > 0, cos\psi < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi/2 < \psi < \pi$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

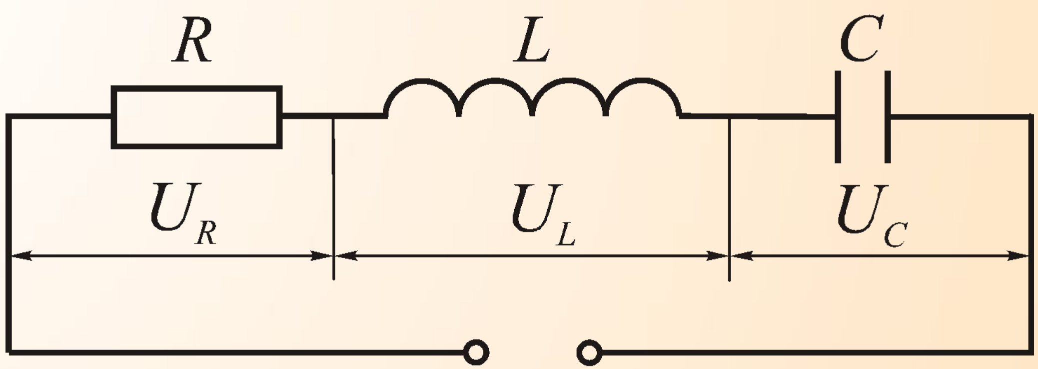
$$\lambda = \frac{R}{2L}\cdot\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}$$

$$\beta^2 << \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \omega_0 \qquad \boxed{\lambda = \pi R\sqrt{C/L}} \qquad (10)$$

Добротность: $Q = \dfrac{\pi}{\lambda}$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}} \qquad (11)$$

3.3. Вынужденные электрические колебания



$$U = U_m \cdot \cos \omega t$$

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + U_m \cdot \cos \omega t$$

$$I = \dot{q} \qquad dI/dt = \ddot{q} \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \beta = \frac{R}{2L}$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t} \qquad (12)$$

Решение (12) :

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi) \qquad (13)$$

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad (14)$$

$$tg\psi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L} \qquad (15)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = (\psi - \pi/2)$ - сдвиг фаз между током и напряжением

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi) \qquad (16)$$

$$tg\varphi = tg(\psi - \pi/2) = -\frac{1}{tg\psi} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (17)$$

$\omega L > 1/\omega C \quad \Rightarrow \quad \varphi > 0$, ток отстает от напряжени

$\omega L < 1/\omega C \quad \Rightarrow \quad \varphi < 0$, ток опережает напряжени

Найдем связь между амплитудными значениями тока и напряжения:

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} \qquad (18)$$

$$U_R = IR, \qquad U_C = q/C, \qquad U_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cdot \cos\omega t \qquad (19)$$

$$U_R = IR = U_{Rm} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

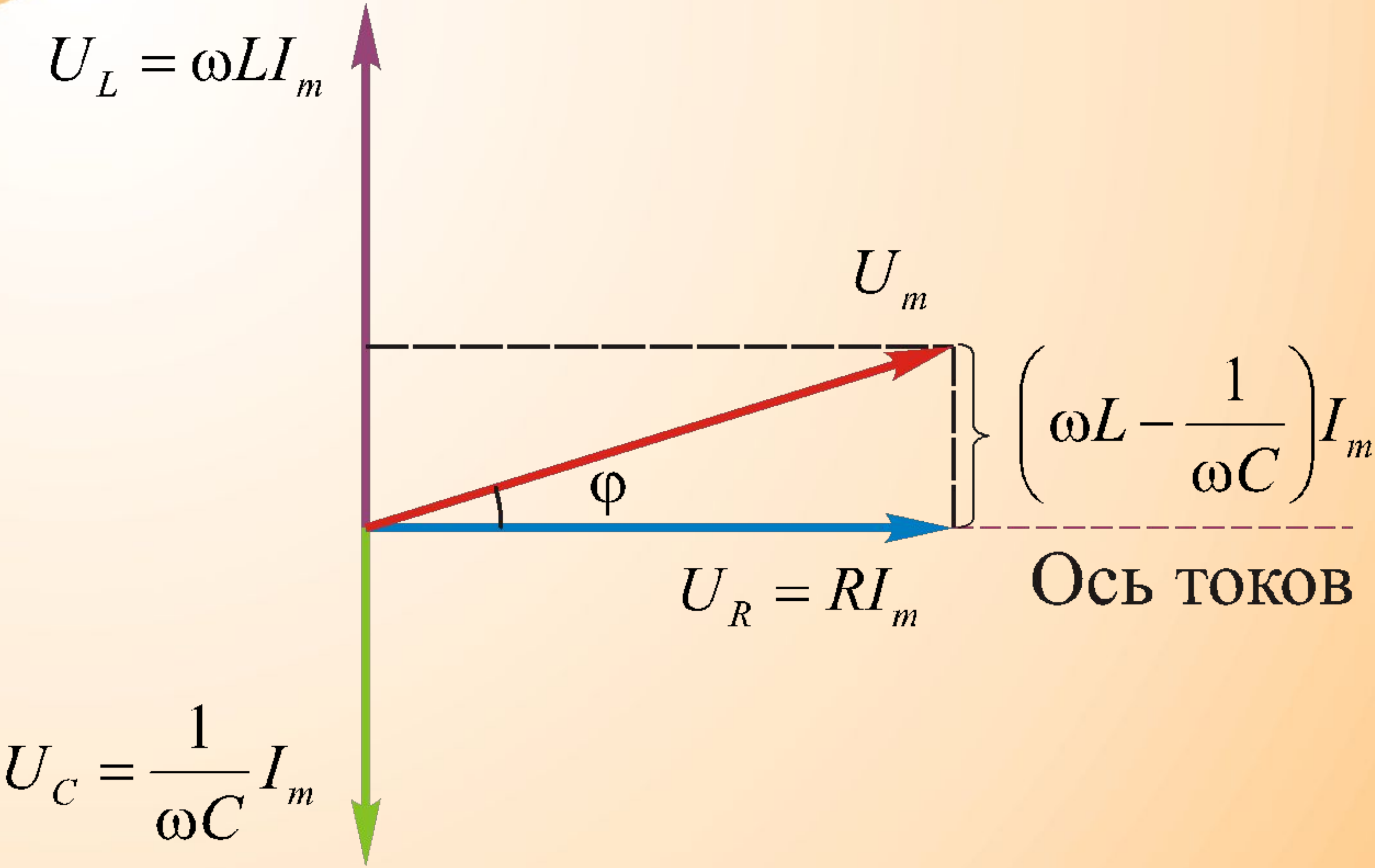
$$U_{Rm} = RI_m$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cdot \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega C}$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cdot \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$$U_{Lm} = \omega L I_m$$


$U_L = \omega L I_m$
U_m
$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m$
φ
$U_R = R I_m$
Ось токов
$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$

Резонанс напряжения на конденсаторе:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \qquad (20)$$

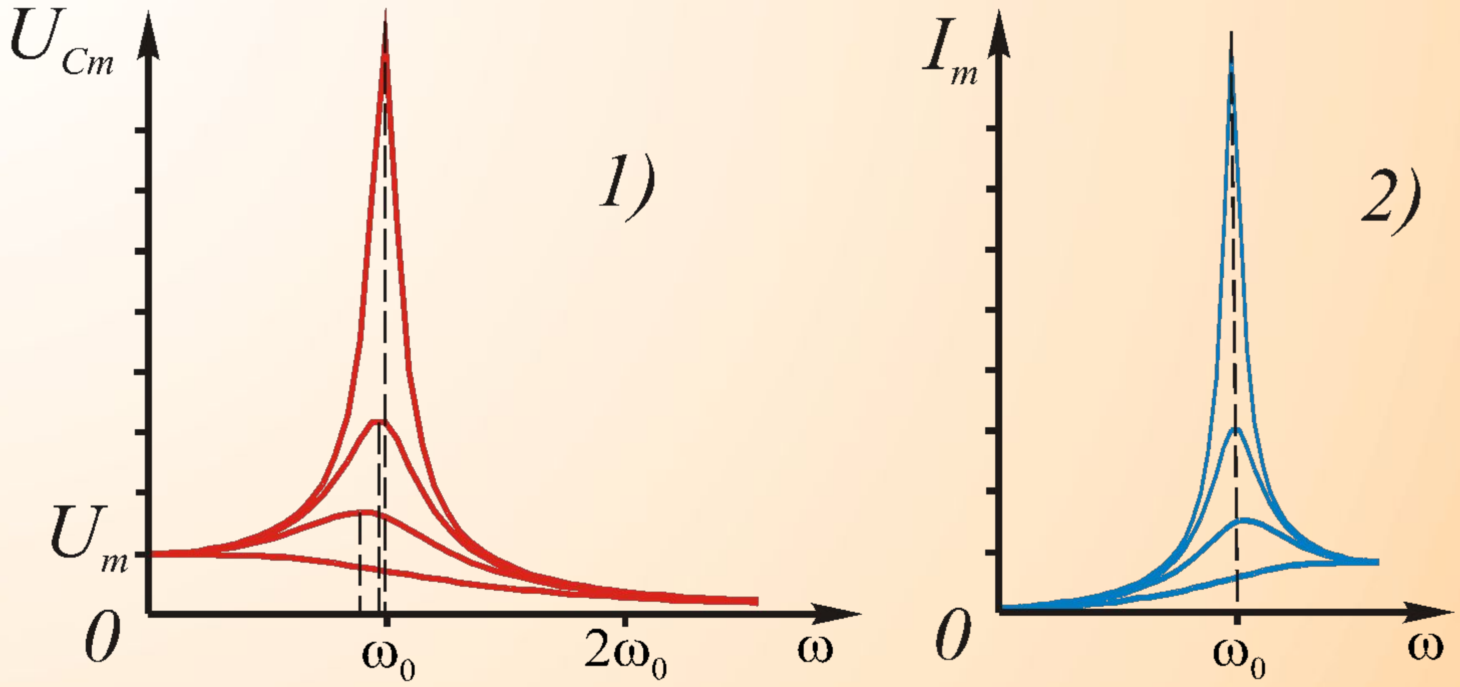
Малое затухание ($\omega_{рез} \approx \omega_0$):

$$\frac{U_{Cmрез}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q \qquad (21)$$

Резонанс силы тока в контуре:

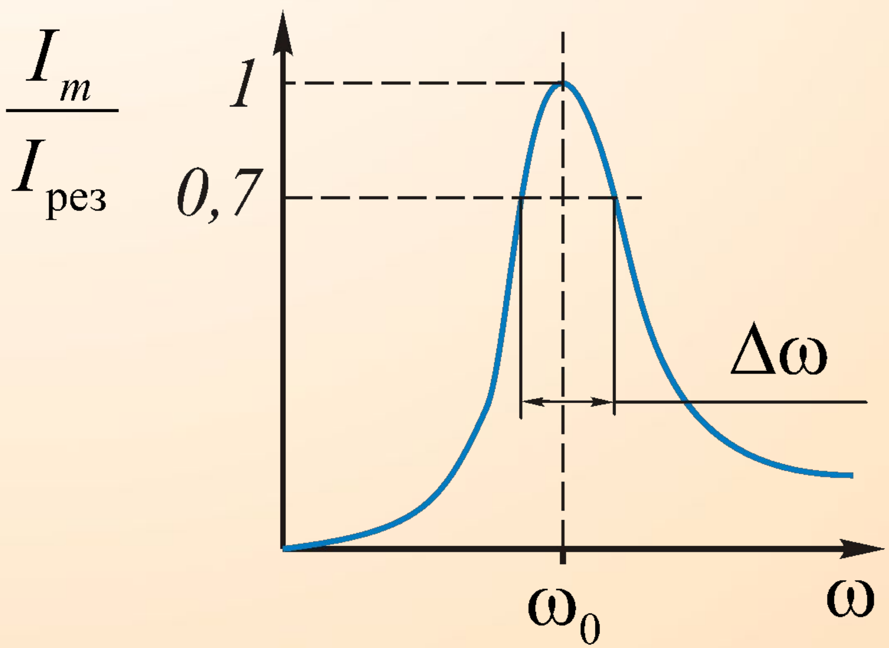
$$\omega L - 1/\omega C = 0$$

$$\omega_{Iрез} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad (22)$$



Резонансные кривые для напряжения (1) и тока (2)

Влияние на колеб. контур вынуждающих Э.Д.С., частоты которых отличны от ω_0, будет тем слабее, чем «острее» резонансная кривая. «Острота» резонансной кривой характеризуется относительной шириной этой кривой, равной $\Delta\omega/\omega_0$, где $\Delta\omega$ – разность цикл. частот при $I=I_m/\sqrt{2}$



$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Задача 3.2

Колебательный контур состоит из резистора сопротивлением 100 Ом, конденсатора емкостью 0,55 мкФ и катушки индуктивностью 0,03 Гн. Определить сдвиг фаз между током через контур и приложенным напряжением, если частота приложен-ного напряжения 1000 Гц.

Дано:

$R = 100$ Ом

$C = 0{,}55$ мкФ $= 5{,}5\cdot 10^{-7}$ Ф

$L = 0{,}03$ Гн

$\nu = 1000$ Гц

φ - ?

$$tg\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

$$\omega L = 2\pi\nu L = 2\pi\cdot 10^3\cdot 0{,}03 =$$

$$= 188 Ом$$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi\nu C}=\frac{1}{2\pi\cdot 10^{3}\cdot 0{,}55\cdot 10^{-6}}=288\text{Ом}$$

$$tg\varphi=\frac{\omega L-1/\omega C}{R}=\frac{188-288}{100}=-1$$

$$\varphi=-45^{\circ}$$

Таким образом, колебания силы тока опережают по фазе колебания приложенного напряжения на 45º.

3.4. Переменный электрический ток.

$$U = U_m \cdot \cos\omega t \qquad (23)$$

$$I = I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) \qquad (24)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad (25)$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (26)$$

- ***Полным электрическим сопротивлением*** или ***импедансом*** называется величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \qquad (27)$$

- $X_L = \omega L$ **- индуктивное сопротивление**

  $X_C = 1/\omega C$ **- емкостное сопротивление**

  $X = X_L - X_C$ **- реактивное сопротивление**

$$tg\varphi = \frac{X}{R} \quad (28) \qquad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (29)$$

Мощность, выделяемая в цепи переменного тока:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_m \cos\omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Найдем среднее за период значение мощности:

$$\boxed{P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \qquad \frac{U_m}{Z} = I_m$$

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \frac{R}{Z} = \frac{R I_m^2}{2}$$

Такую мощность развивает постоянный ток, равный: $I = I_m / \sqrt{2}$

- Величина $I_д = I_m / \sqrt{2}$ называется ***действующим значением*** силы тока, а величина $U_д = U_m / \sqrt{2}$ ***дйствующим значением*** напряжения.

$$\boxed{P = U_д I_д \cos\varphi} \qquad (30)$$

cos φ – называется ***коэффициентом мощности***.

Задача 3.3

Катушка длиной 50 см и площадью поперечного сечения 10 см^2 включена в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Число витков катушки 3000. Найти активное сопротивление катушки, если сдвиг фаз между током и напряжением 60º.

Дано:

l = 50 см = 0,5 м

S = 10 см^2 = 10^{-3} м^2

ν = 50 Гц

N = 3000

φ = 60º

R - ?

$$tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$R = \frac{\omega L}{tg\varphi} = \frac{2\pi\nu L}{tg\varphi}$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 V = \mu\mu_0 (N/l)^2 Sl =$$

$$= \mu\mu_0 N^2 S/l = 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}/0{,}5 =$$

$$= 2{,}26 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$$

$$R = \frac{2\pi \nu L}{tg\varphi} = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 2{,}26 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}} = 4{,}1 \text{ Ом}$$

задание

- От чего зависит полное сопротивление (импеданс) в цепи переменного тока:

- 1) I, U;
- 2) R, L, I;
- 3) U, R, I;
- 4) R, L, C, ω.