

# **Тема 3. Электрические колебания.**

## **Переменный электрический ток.**

Основные вопросы темы:

- 3.1.1. Свободные незатухающие электрические колебания
- 3.1.2. Затухающие электрические колебания
- 3.1.3. Вынужденные электрические колебания. Резонанс
- 3.1.4. Переменный электрический ток.

# Повторение

Гармонические колебания

$$\xi = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$A$  – амплитуда колебания;  $\omega$  – круговая частота  
 $(\omega t + \varphi_0)$  – фаза колебания;  $\varphi_0$  – начальная фаза колебания.

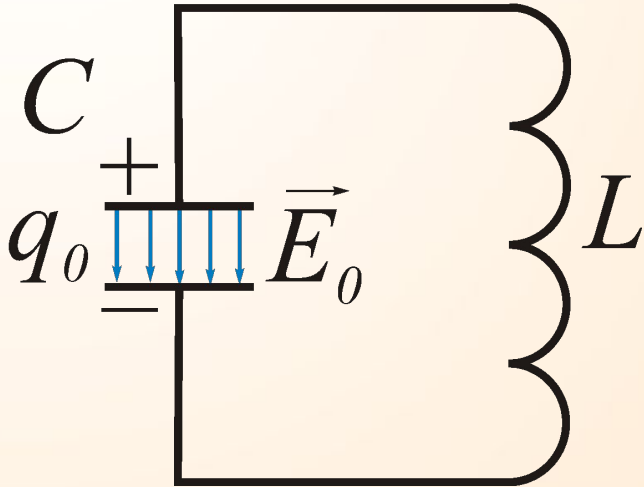
Дифференциальное уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси  $X$ :

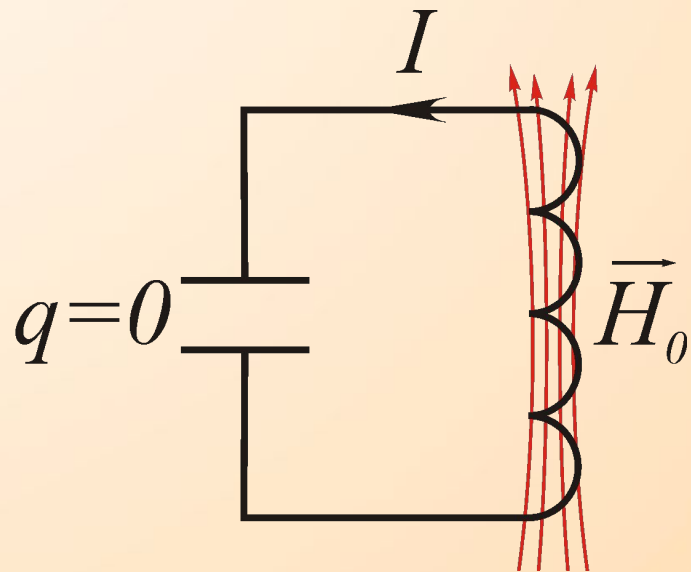
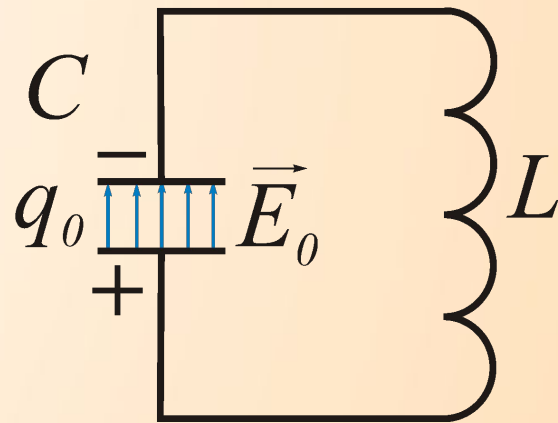
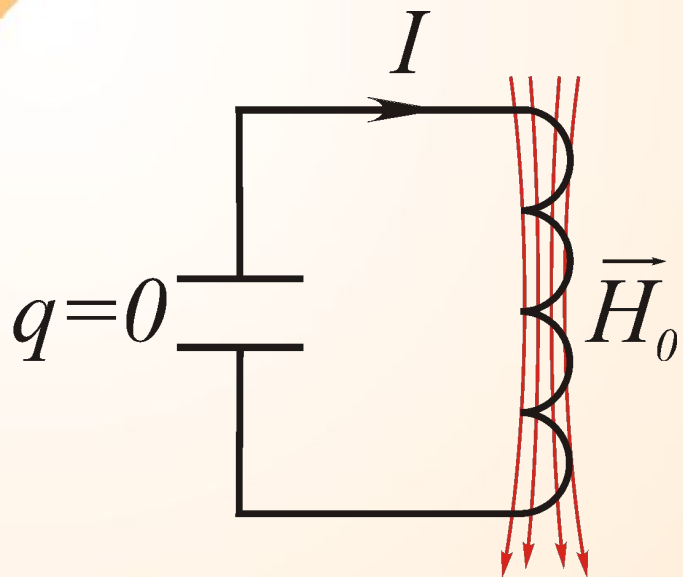
$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

## 3.1. Свободные незатухающие электрические колебания



Колебательный контур – цепь, состоящая из конденсатора и катушки.

$E$  – напряженность электрического поля;  
 $H$  – напряженность магнитного поля;  
 $q$  – заряд;  $C$  – емкость конденсатора;  
 $L$  – индуктивность катушки,  
 $I$  – сила тока в контуре



Энергия заряженного конденсатора – энергия электрического поля:

$$W_e = \frac{q^2}{2C}$$

Энергия магнитного поля:

$$W_m = \frac{LI^2}{2}$$

В любой момент времени:

$$W = W_e + W_m$$

Для квазистационарных токов можно использовать законы Ома.

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\tau = \frac{l}{c}$$

Условие квазистационарности:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T$$

$$\nu = 50 \text{ Гц} \quad \Rightarrow \quad l \leq 100 \text{ км}$$

Сила тока:  $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$

Закон Ома:  $I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathbf{E}_{12}$

$$R = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}, \quad \mathbf{E}_{12} = \mathbf{E}_C = -L \frac{dI}{dt}$$

$\mathbf{E}_C$  - Э.Д.С самоиндукции

$$0 = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d(q)}{dt} = \dot{q} \Rightarrow 0 = -\frac{q}{C} - L \cdot \ddot{q}$$

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих электрических колебаний

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (1)$$

$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (2)$$

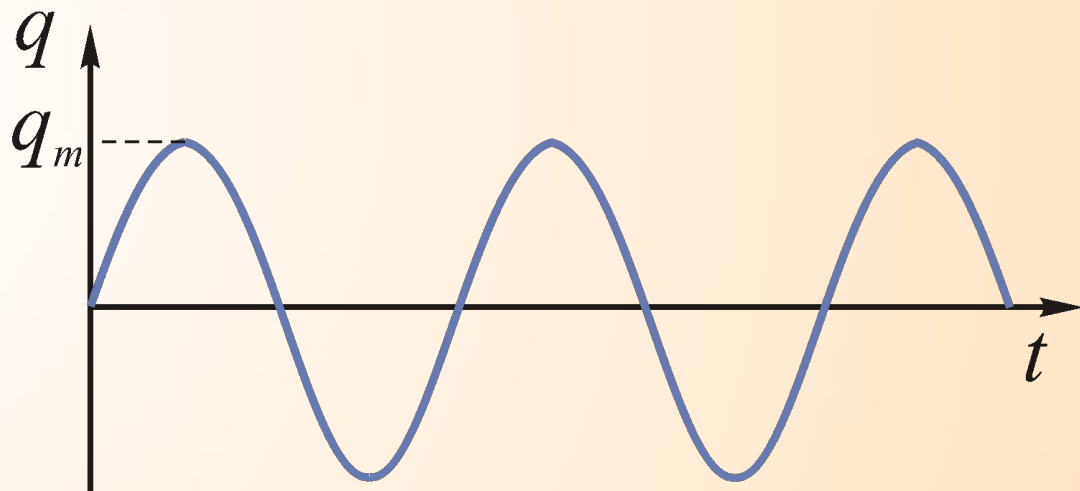


$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad - \text{собственная круговая частота колебаний}$$

*Формула Томсона:*

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (3)$$

T – период собственных колебаний в колебательном контуре



*Напряжение на конденсаторе:*

$$U = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$U_m = q_m / C$$

*Ток через контур:*

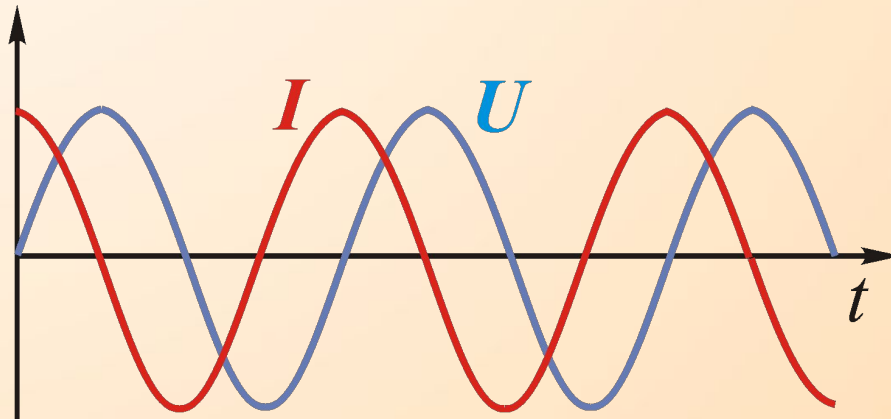
$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$I_m = \omega_0 q_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}}$$

$$- \sin \alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$$

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2) \quad (4)$$

**Ток опережает напряжение на  $\pi/2$**



Найдем соотношение между амплитудными значениями тока и напряжения:

$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} I_m = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m$$

Из закона Ома:  $U=IR$

$$\rho = \sqrt{L/C} \quad - \text{ волновое сопротивление.}$$

Энергия электрического поля (энергия заряженного конденсатора)  
в любой момент времени:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Энергия магнитного кого поля (энергия катушки индуктивности)  
в любой момент времени:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Максимальное (амплитудное) значение энергии магнитного поля:

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2} = \frac{Lq_m^2}{2LC} = \frac{q_m^2}{2C} \quad \text{- максимальное значение энергии электрического поля}$$

Полная энергия колебательного контура в любой момент времени:

$$\begin{aligned} W &= W_e + W_m = \frac{q_m^2}{2C} (\cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \sin^2(\omega_0 t + \alpha)) = \\ &= \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} \end{aligned}$$

**Полная энергия контура сохраняется постоянной**

### Задача 3.1

Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Определить частоту колебаний, возникающих в контуре, если максимальная сила тока в катушке индуктивности 1,2 А, максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 1200 В, полная энергия контура 1,1 мДж.

Дано:

$$I_m = 1,2 \text{ А}$$

$$U_{Cm} = 1200 \text{ В}$$

$$W = 1,1 \text{ мДж} = 1,1 \cdot 10^{-3}$$

Дж

$\nu$  - ?

$$W = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow L = \frac{2W}{I_m^2}$$

$$W = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{(CU_{Cm})^2}{2C} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \Rightarrow C = \frac{2W}{U_{Cm}^2}$$

$$LC = \frac{2W}{I_m^2} \cdot \frac{2W}{U_{Cm}^2} = \frac{4W^2}{I_m^2 U_{Cm}^2}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{I_m U_{Cm}}{4\pi W} = \frac{1,2 \text{ A} \cdot 1200 \text{ В}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}} =$$

$$= 1,04 \cdot 10^5 \frac{\text{ВТ}}{\text{ВТ} \cdot \text{с}} = 1,04 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{с}} = \underline{1,04 \cdot 10^5 \text{ Гц}}$$



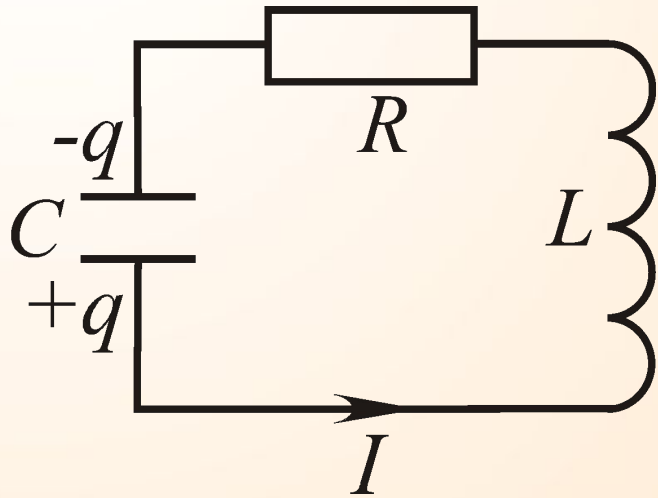
## Задание

В колебательном контуре емкость возросла в 8 раз, а индуктивность уменьшилась в два раза.

Как изменится период собственных колебаний контура?

- а) уменьшится в 2 раза;
- б) увеличится в 2 раза;
- в) уменьшится в 4 раз;
- г) увеличится в 4 раз.

## 3.2. Затухающие электрические колебания



Закон Ома:

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dl}{dt}$$

$$I = \dot{q} \quad \frac{dl}{dt} = \dot{q}$$

$$\dot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \beta = \frac{R}{2L} \quad - \text{коэффициент затухания}$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (5)$$

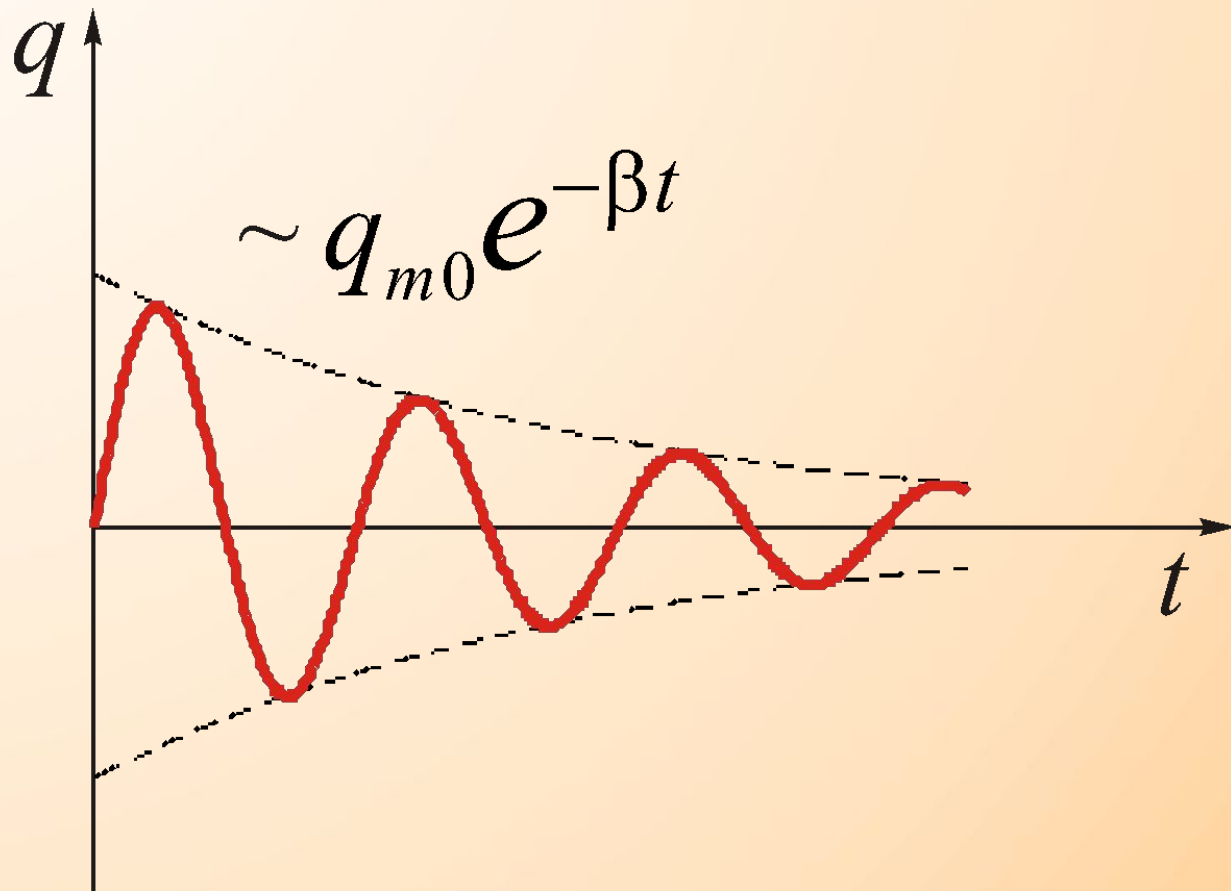
*Слабое затухание:*

$$\beta^2 \ll \omega_0^2, \quad \text{т.е.} \quad R^2/4L^2 \ll 1/LC$$

Решение уравнения (5) :

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (7)$$



*Напряжение на конденсаторе:*

$$U = \frac{q}{C} = U_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (8)$$

$$U_{m0} = q_{m0}/C$$

*Ток через контур:*

$$I = dq/dt$$

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$I = -\beta q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \omega q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

$$-\beta/\omega_0 = \cos\psi \quad \omega/\omega_0 = \sin\psi$$

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} (\cos\psi \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \sin\psi \cdot \sin(\omega t + \alpha))$$

$$I = I_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha + \psi) \quad (9)$$

$\Psi$  – сдвиг фаз между током и напряжением

$$\sin\psi > 0, \cos\psi < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi/2 < \psi < \pi$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\lambda = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}$$

$$\beta^2 \ll \omega_0^2 \Rightarrow \omega \approx \omega_0$$

$$\lambda = \pi R \sqrt{C/L}$$

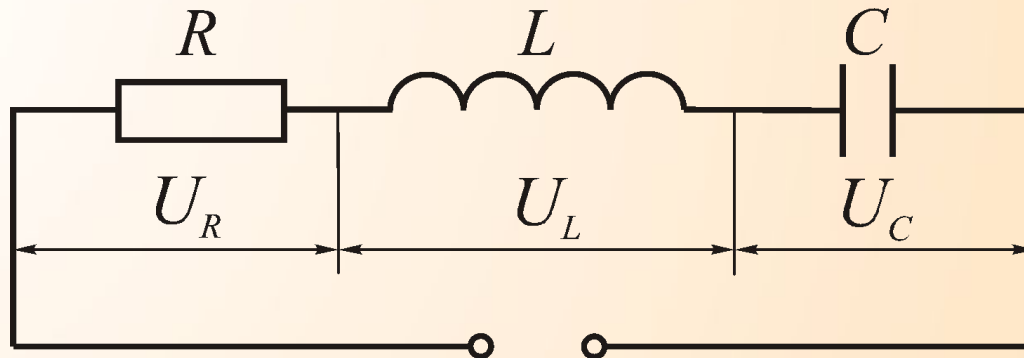
(10)

Добротность:  $Q = \frac{\pi}{\lambda}$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

(11)

### 3.3. Вынужденные электрические колебания



$$U = U_m \cdot \cos \omega t$$

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dl}{dt} + U_m \cdot \cos \omega t$$

$$I = \dot{q}$$

$$dl/dt = \dot{q}$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$



$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t \quad (12)$$

Решение (12) :

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi) \quad (13)$$

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L} \quad (15)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = (\psi - \pi/2)$  - сдвиг фаз между током и напряжением

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (16)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \pi/2) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (17)$$

$\omega L > 1/\omega C \Rightarrow \varphi > 0$ , ток отстает от напряжения

$\omega L < 1/\omega C \Rightarrow \varphi < 0$ , ток опережает напряжение

Найдем связь между амплитудными значениями тока и напряжения:

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (18)$$

$$U_R = IR, \quad U_C = q/C, \quad U_L = L \frac{dl}{dt}$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cdot \cos \omega t \quad (19)$$

$$U_R = IR = U_{Rm} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$U_{Rm} = RI_m$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cdot \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

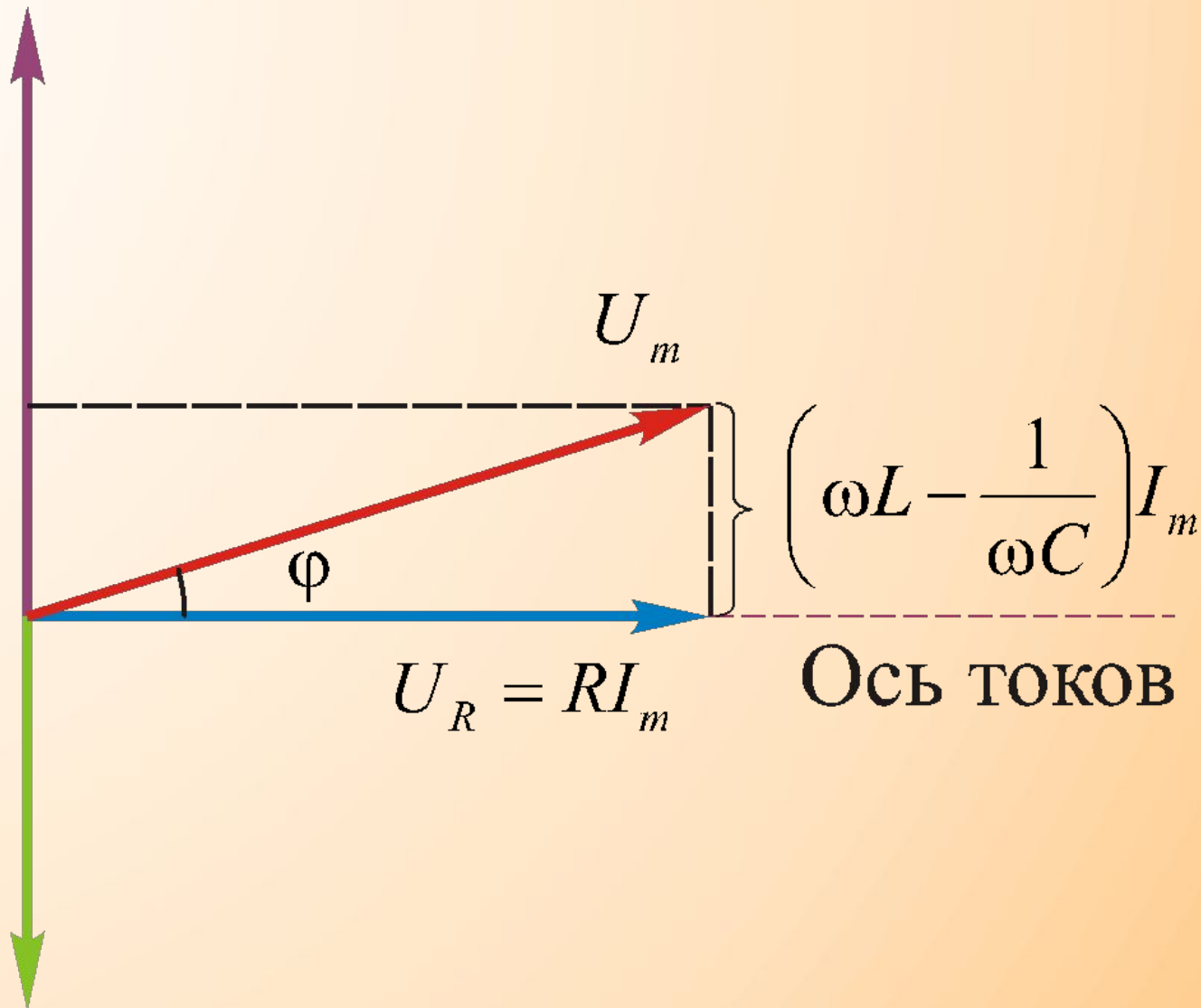
$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega C}$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cdot \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$$U_{Lm} = \omega L I_m$$

$$U_L = \omega L I_m$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$$



**Резонанс напряжения на конденсаторе:**

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (20)$$

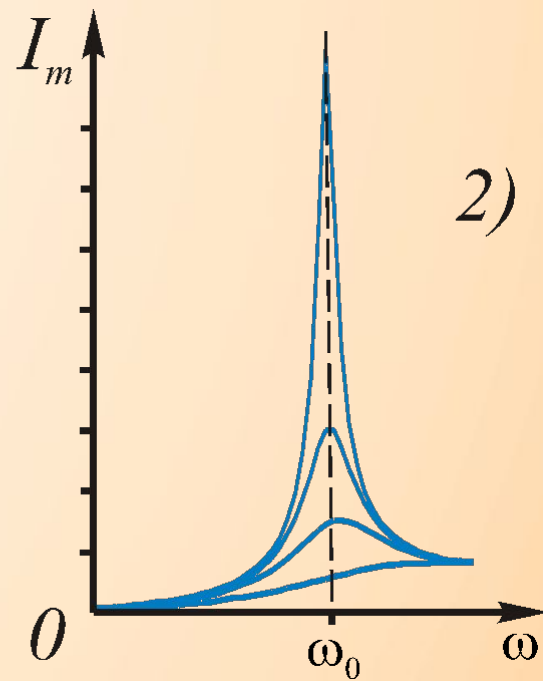
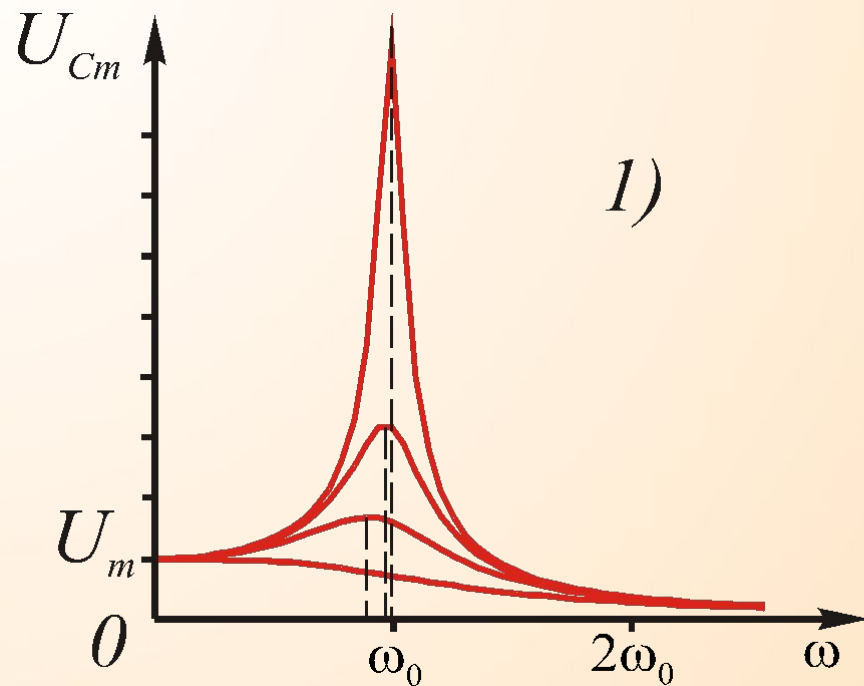
*Малое затухание ( $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ ):*

$$\frac{U_{\text{Стрез}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (21)$$

**Резонанс силы тока в контуре:**

$$\omega L - 1/\omega C = 0$$

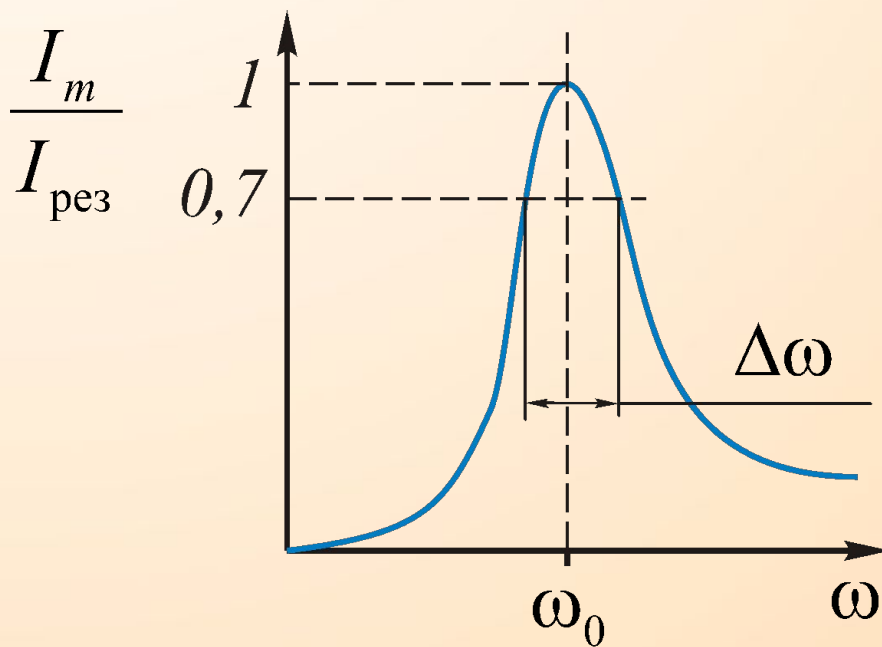
$$\omega_{\text{Iрез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (22)$$



Резонансные кривые для напряжения (1) и тока (2)



Влияние на колеб. контур вынуждающих Э.Д.С., частоты которых отличны от  $\omega_0$ , будет тем слабее, чем «острее» резонансная кривая. «Острота» резонансной кривой характеризуется относительной шириной этой кривой, равной  $\Delta\omega/\omega_0$ , где  $\Delta\omega$  – разность цикл. частот при  $I=I_m/\sqrt{2}$



$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

## Задача 3.2

Колебательный контур состоит из резистора сопротивлением 100 Ом, конденсатора емкостью 0,55 мкФ и катушки индуктивностью 0,03 Гн. Определить сдвиг фаз между током через контур и приложенным напряжением, если частота приложенного напряжения 1000 Гц.

Дано:

$$R = 100 \text{ Ом}$$

$$C = 0,55 \text{ мкФ} = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

$$L = 0,03 \text{ Гн}$$

$$\nu = 1000 \text{ Гц}$$

---

$\varphi - ?$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

$$\begin{aligned} \omega L &= 2\pi\nu L = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,03 = \\ &= 1880 \text{ м} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} = 2880 \text{ м}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{188 - 288}{100} = -1$$

$$\varphi = -45^\circ$$

Таким образом, колебания силы тока опережают по фазе колебания приложенного напряжения на  $45^\circ$ .

---

### 3.4. Переменный электрический ток.

$$U = U_m \cdot \cos \omega t \quad (23)$$

$$I = I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (24)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (26)$$

- **Полным электрическим сопротивлением** или **импедансом** называется величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (27)$$

- $X_L = \omega L$  - **индуктивное сопротивление**

$X_C = 1/\omega C$  - **емкостное сопротивление**

$X = X_L - X_C$  - **реактивное сопротивление**

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} \quad (28)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (29)$$

*Мощность, выделяемая в цепи переменного тока:*

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Найдем среднее за период значение мощности:

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \quad \frac{U_m}{Z} = I_m$$

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \frac{R}{Z} = \frac{R I_m^2}{2}$$

Такую мощность развивает постоянный ток, равный:  $I = I_m / \sqrt{2}$

- Величина  $I_d = I_m / \sqrt{2}$  называется *действующим значением* силы тока, а величина  $U_d = U_m / \sqrt{2}$  *действующим значением* напряжения.

$$P = U_d I_d \cos\varphi$$

(30)

$\cos\varphi$  — называется *коэффициентом мощности*.

### Задача 3.3

Катушка длиной 50 см и площадью поперечного сечения  $10 \text{ см}^2$  включена в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Число витков катушки 3000. Найти активное сопротивление катушки, если сдвиг фаз между током и напряжением  $60^\circ$ .

Дано:

$$l = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$$

$$S = 10 \text{ см}^2 = 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$N = 3000$$

$$\varphi = 60^\circ$$

---

$$R - ?$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$R = \frac{\omega L}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\pi\nu L}{\operatorname{tg}\varphi}$$



$$L = \mu\mu_0 n^2 V = \mu\mu_0 (N/l)^2 S l =$$

$$= \mu\mu_0 N^2 S / l = 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} / 0,5 =$$

$$= 2,26 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$$

$$R = \frac{2\pi\nu L}{\text{tg}\varphi} = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 2,26 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}} = \underline{4,10 \text{ М}}$$

## задание

- От чего зависит полное сопротивление (импеданс) в цепи переменного тока:
- 1)  $I, U$ ;
- 2)  $R, L, I$ ;
- 3)  $U, R, I$ ;
- 4)  $R, L, C, \omega$ .