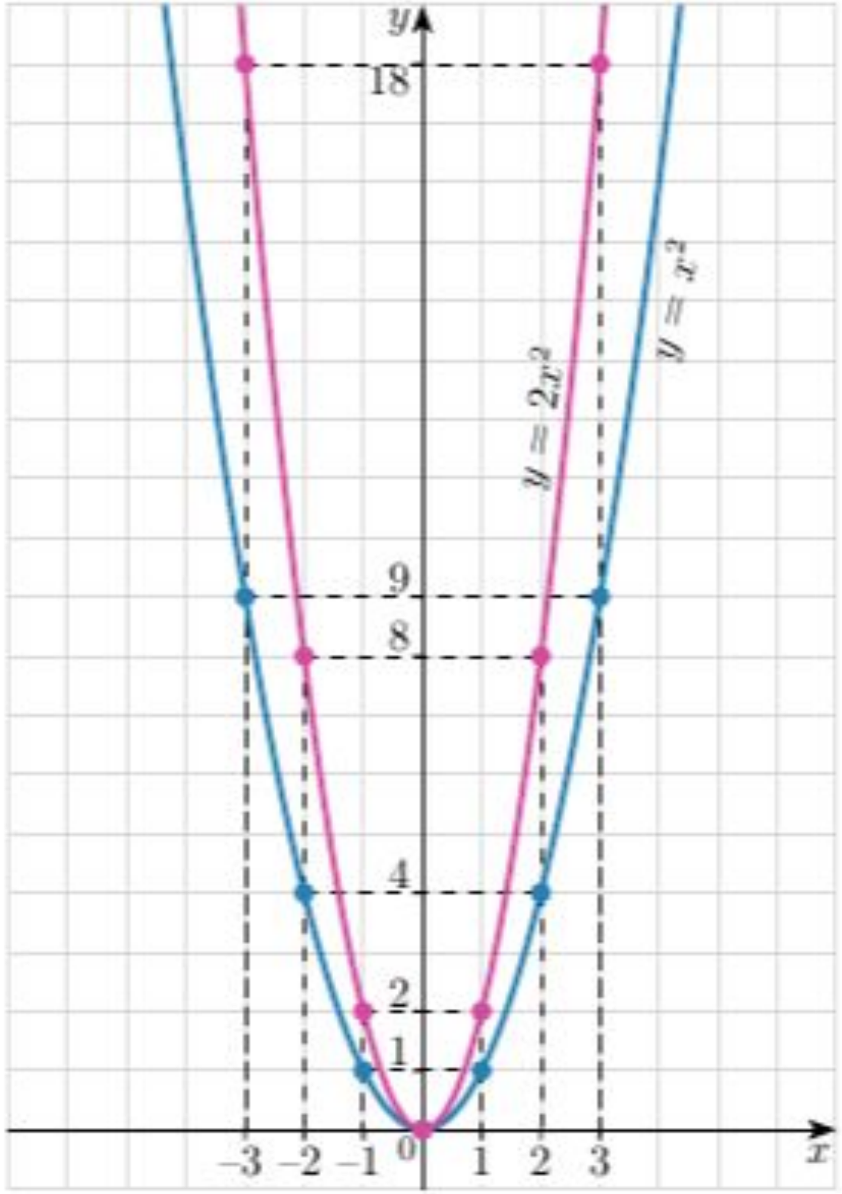
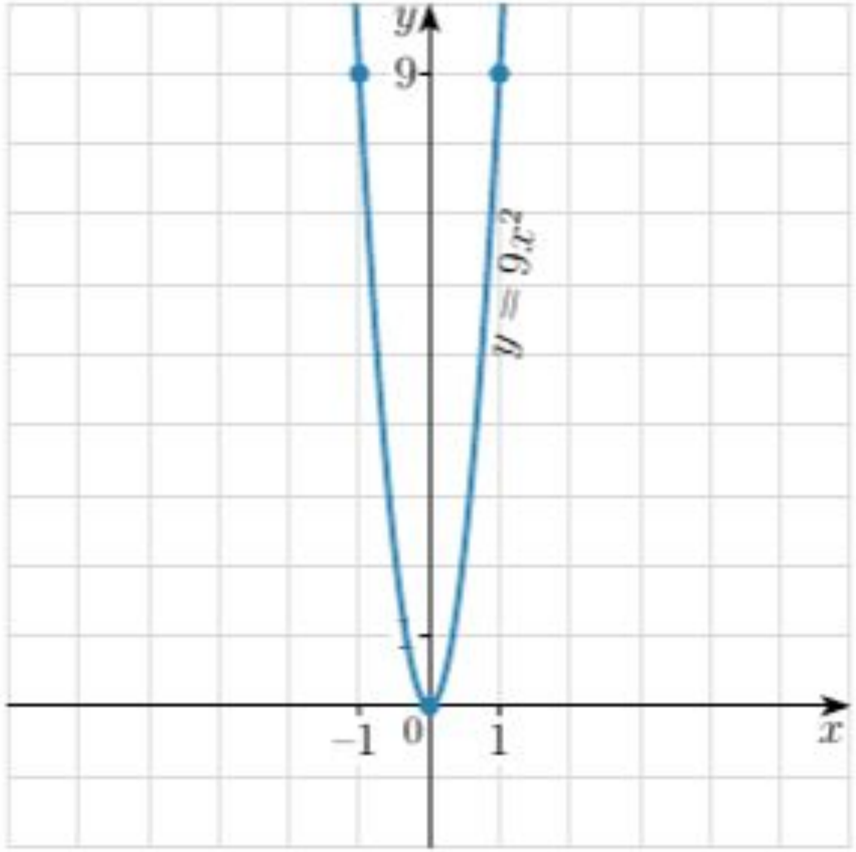
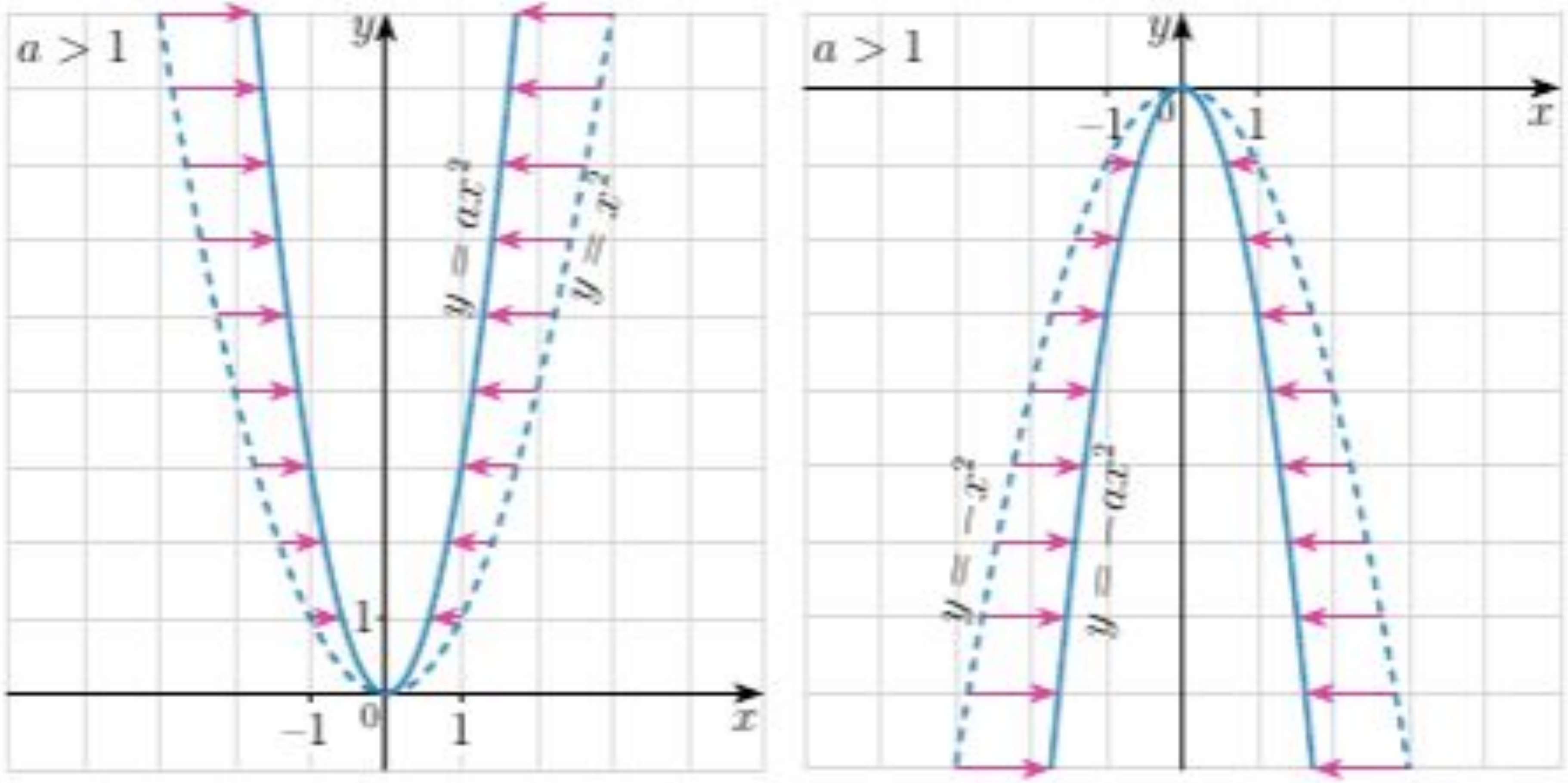
График функции $y = ax^2$



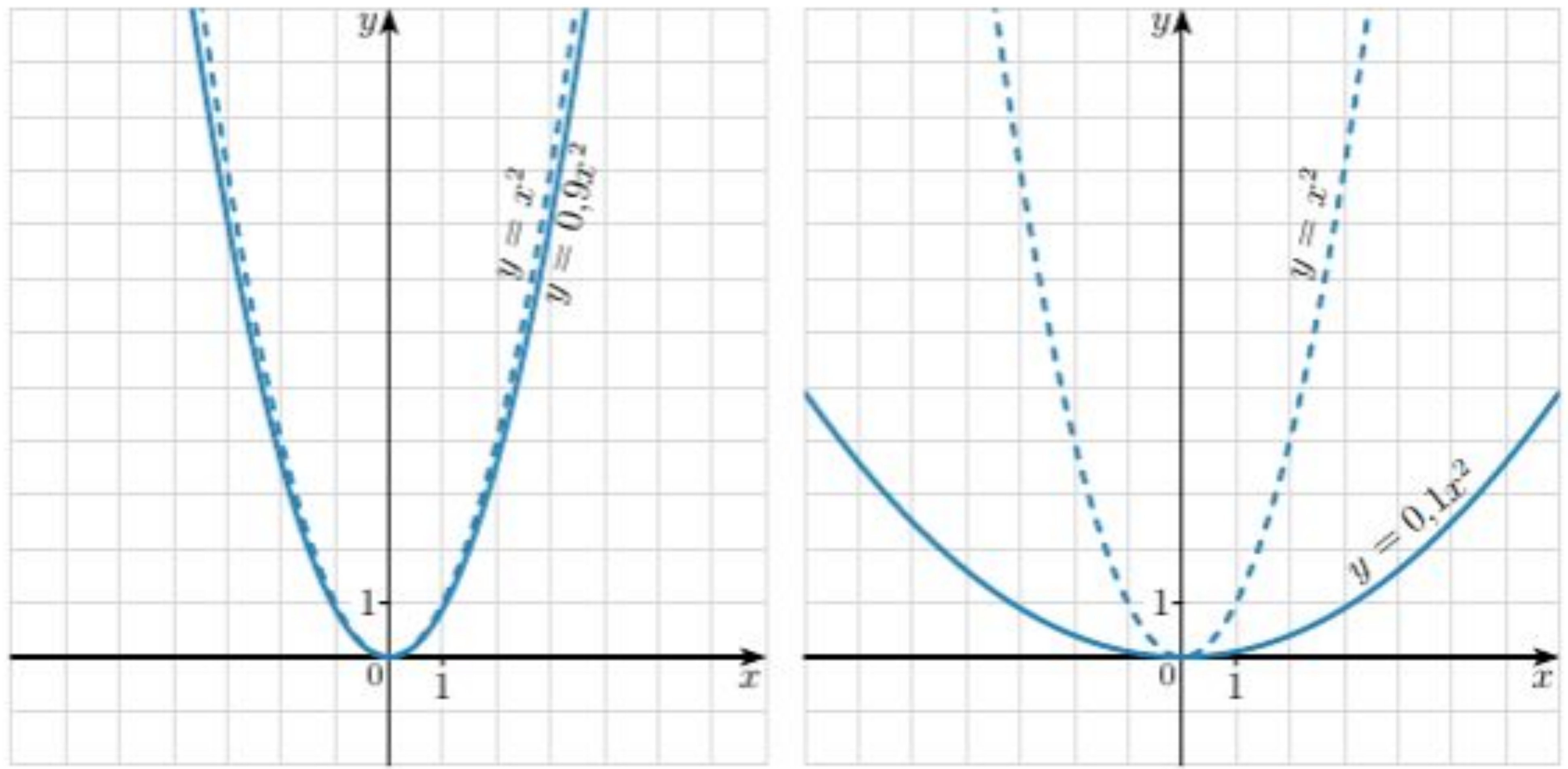
y
x
18
9
8
4
2
1
0
–3
–2
–1
1
2
3
$y = 2x^2$
$y = x^2$

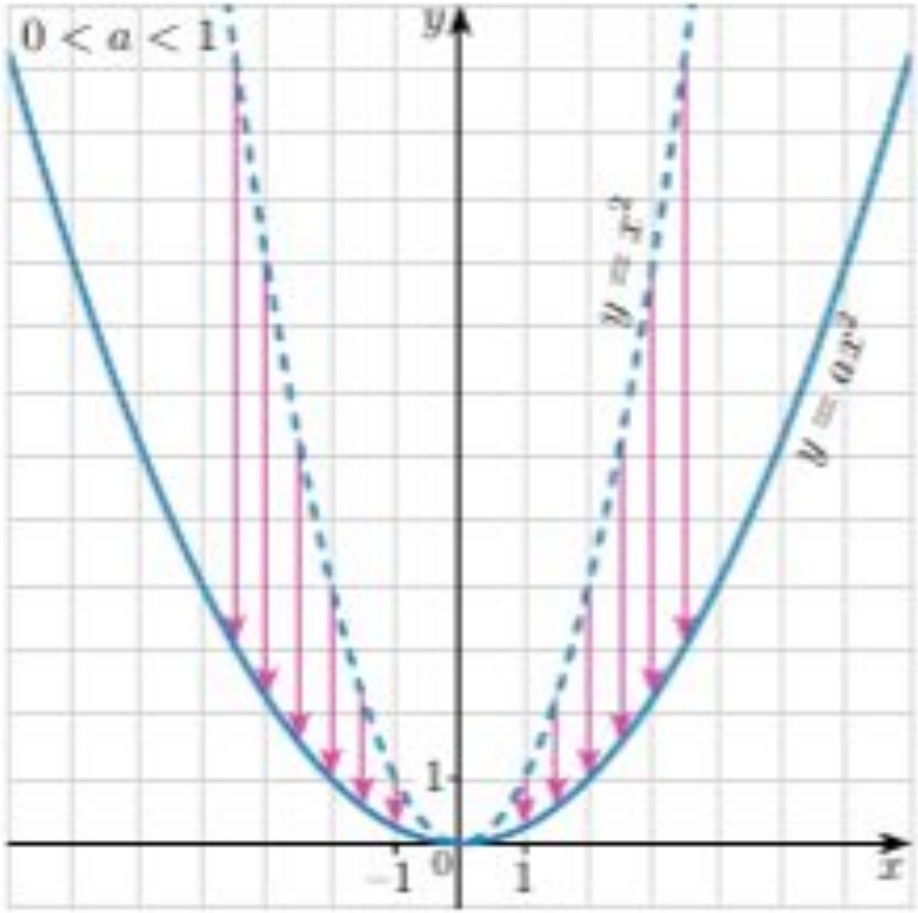


y
x
9
1
0
–1
1
$y = 9x^2$

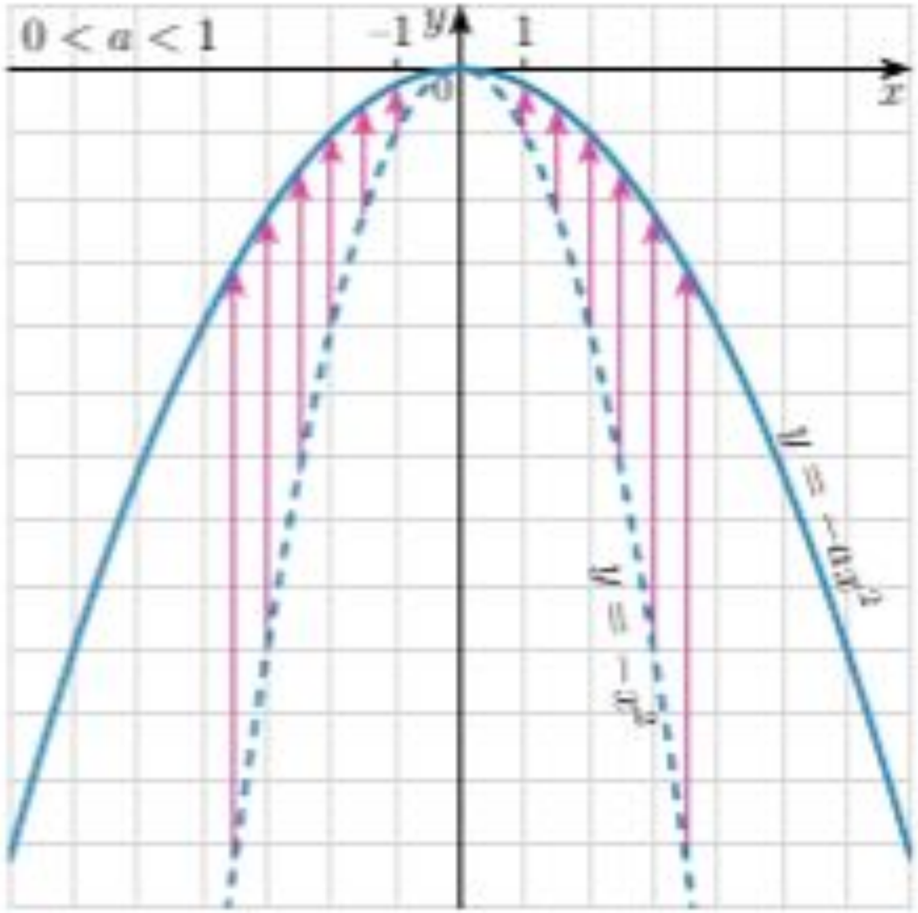


a > 1
y
x
0
1
−1
y = ax²
y = x²
a > 1
y
x
0
1
−1
y = −x²
y = −ax²

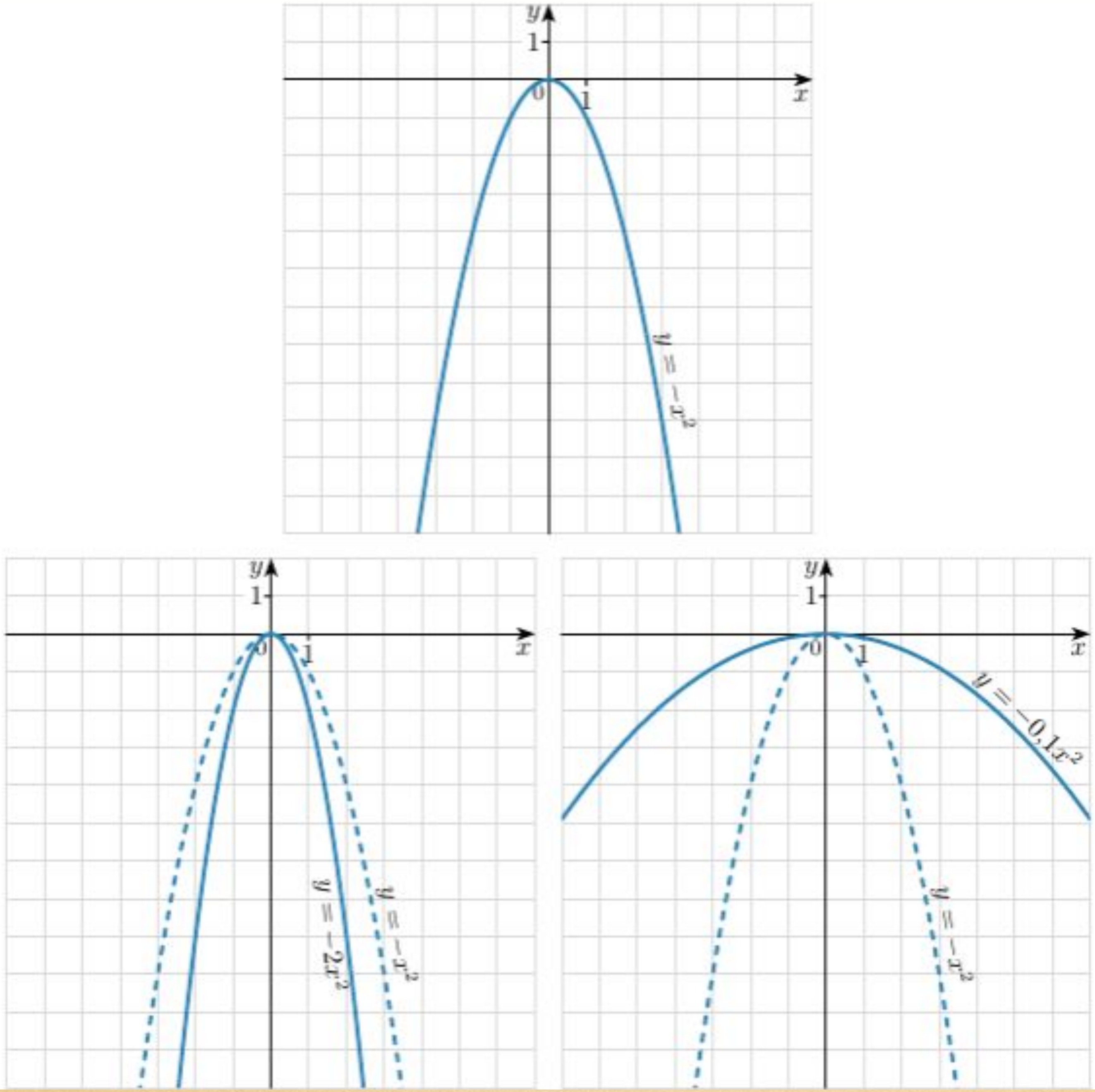

y
$y = x^2$
$y = 0{,}9x^2$
1
0
1
x
y
$y = x^2$
$y = 0{,}1x^2$
1
0
1
x



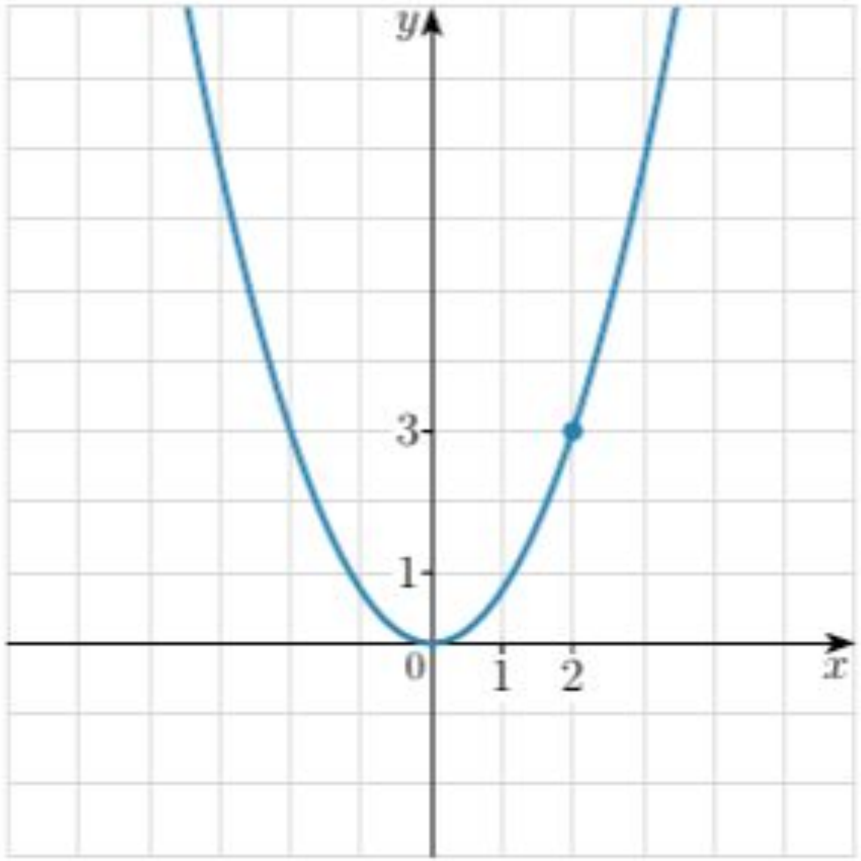
0 < a < 1
y
x
0
1
−1
y = x²
y = ax²



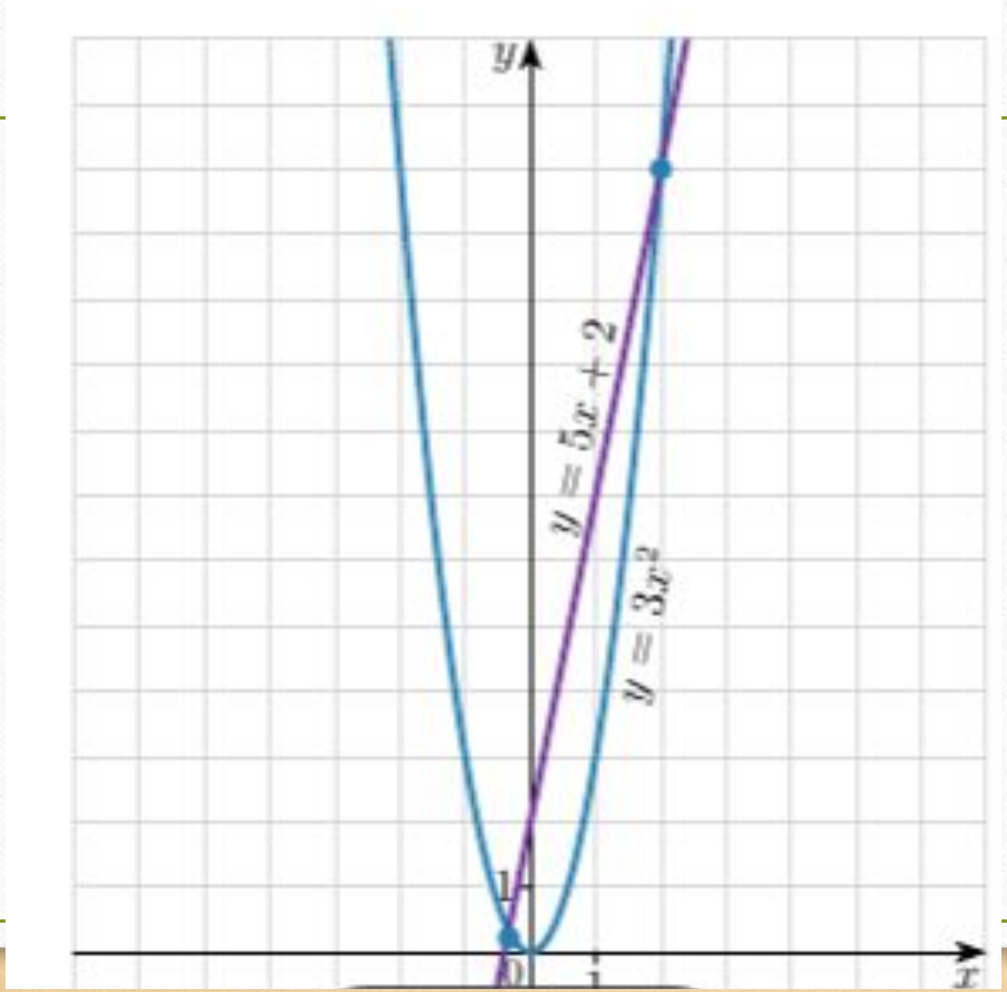
0 < a < 1
y
x
0
−1
1
y = −x²
y = −ax²

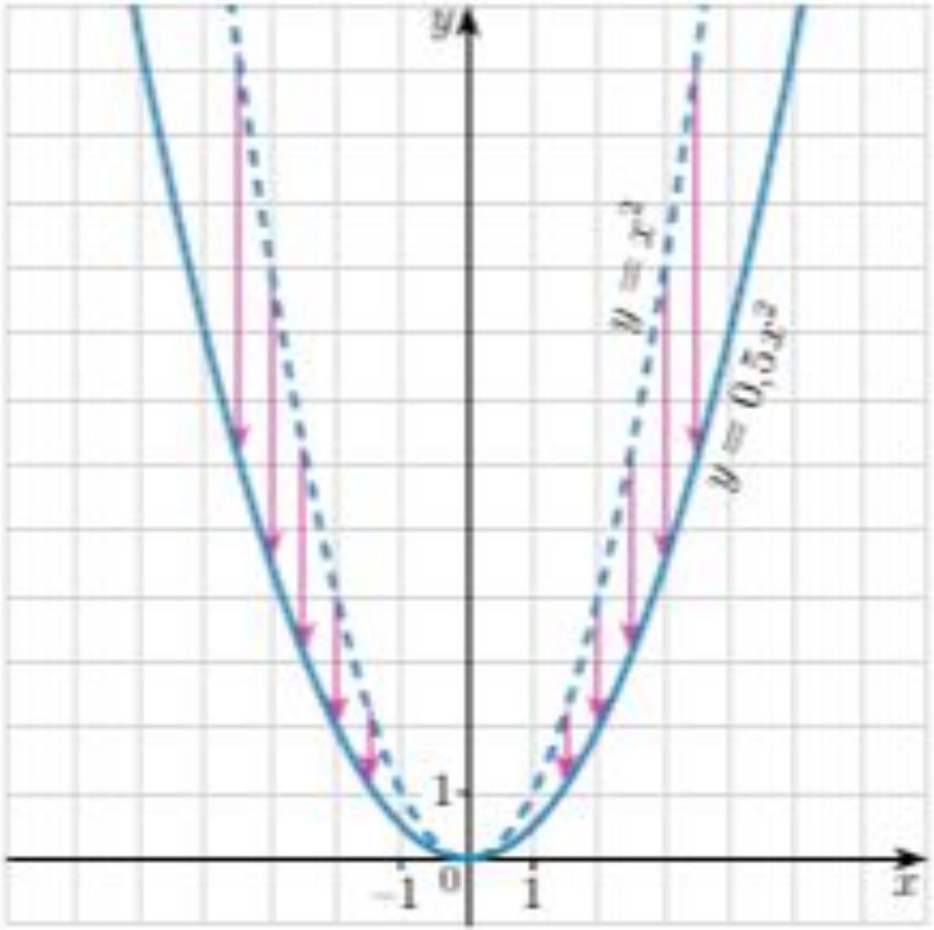

y
1
0
1
x
y = −x²
y
1
0
1
x
y = −2x²
y = −x²
y
1
0
1
x
y = −0,1x²
y = −x²

Пример. Определите по графику функции $y = ax^2$ значение коэффициента a, если график проходит через точку $(2; 3)$.

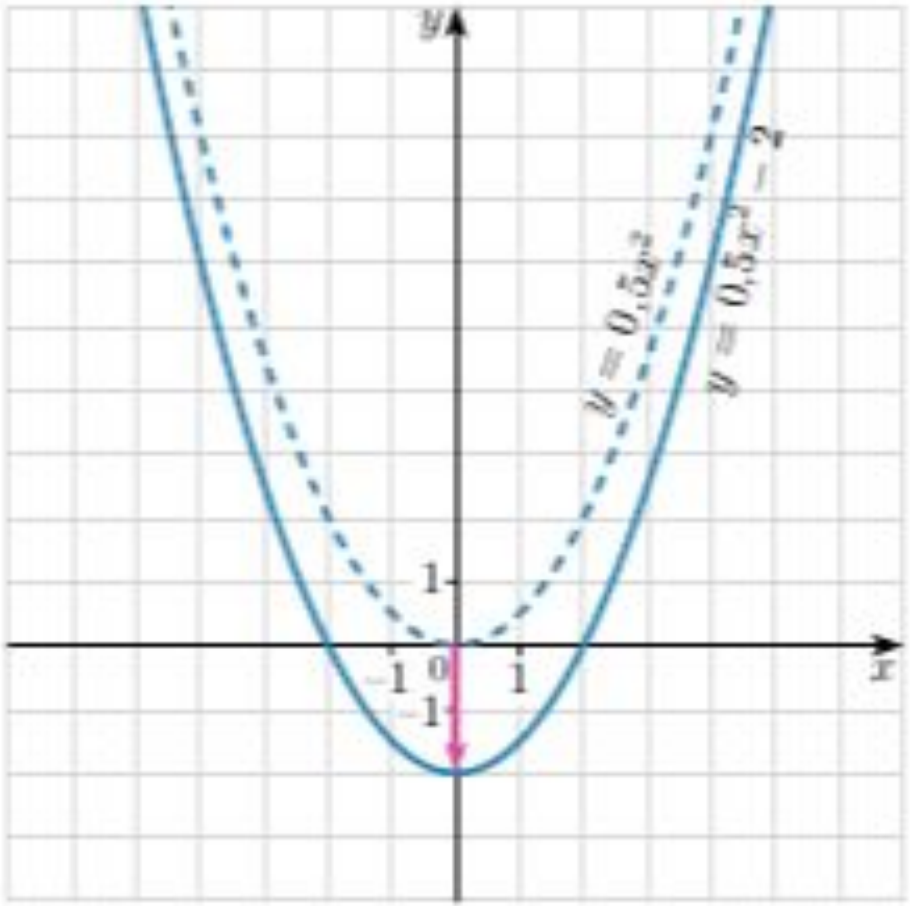


Пример. Найдите координаты точек пересечения графиков $y = 3x^2$ и $y = 5x + 2$.





y
x
$y = x^2$
$y = 0,5x^2$
1
-1
0
1



y
x
$y = 0,5x^2$
$y = 0,5x^2 - 2$
1
-1
0
1
-1

Итак, для того чтобы понять, как выглядит график функции $f(x) = ax^2 + n$, нужно следующее.

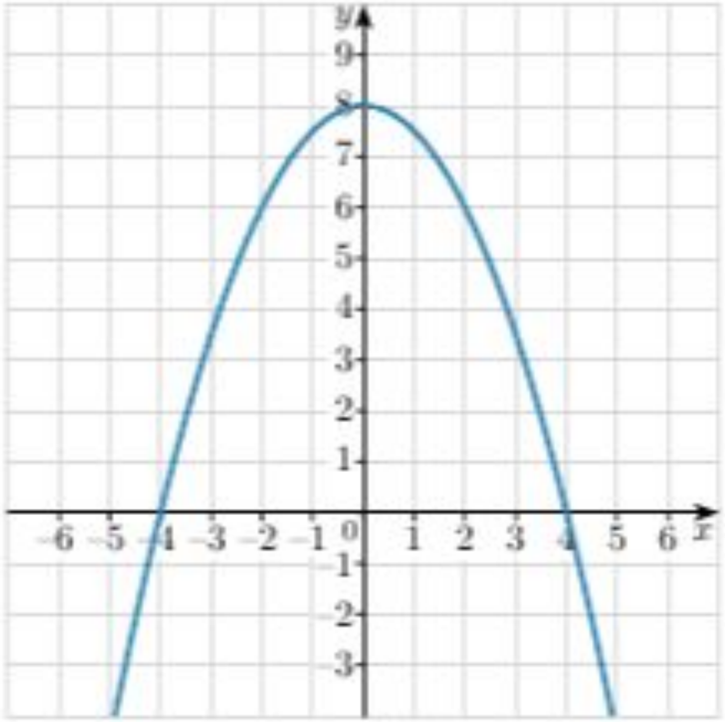
1) Посмотреть на знак коэффициента a. Если $a > 0$, то ветви параболы будут направлены вверх и в качестве основы мы берём график функции $y = x^2$. Если же $a < 0$, то ветви будут направлены вниз, а в качестве основы мы берём $y = -x^2$.

2) Посмотреть на абсолютную величину коэффициента a, то есть на $|a|$. Если это число больше 1, то парабола $y = ax^2$ станет у́же соответствующей параболы из пункта 1). Если же $|a| < 1$, то она станет шире.

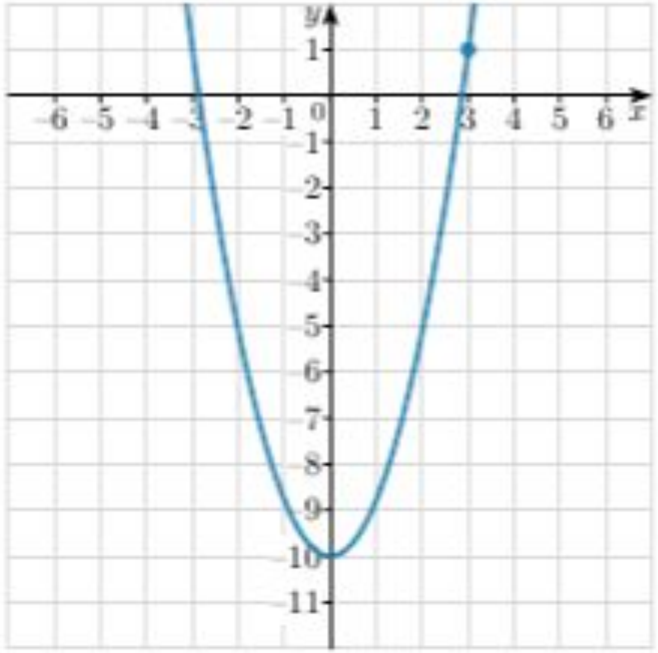
3) Посмотреть на коэффициент n. Он отвечает за то, насколько парабола $y = ax^2$ «подпрыгнет» вверх или, наоборот, переместится вниз. Если $n \geqslant 0$, то, чтобы получить график функции $f(x)$, нужно сдвинуть параболу $y = ax^2$ на n вверх. Если $n < 0$, то нужно сдвинуть параболу $y = ax^2$ на $|n|$ вниз.

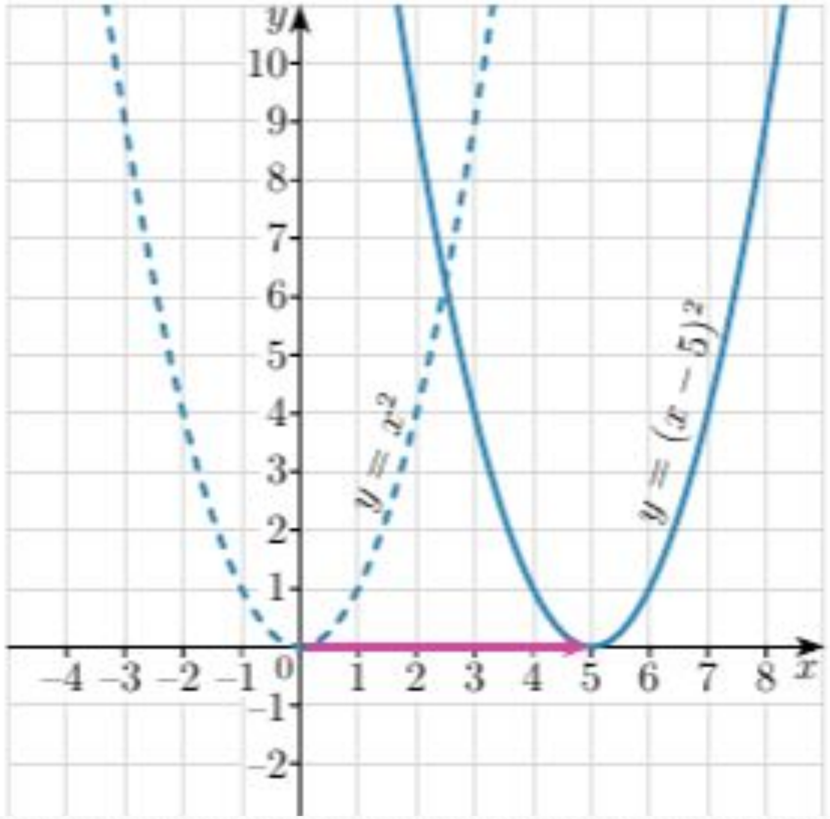
Проанализируем, как будет выглядеть график функции $f(x) = -50x^2 + 43{,}5$, пользуясь сформулированным алгоритмом.

Пример. По графику функции $f(x) = ax^2 + n$ определите знак коэффициента a и значение коэффициента n.

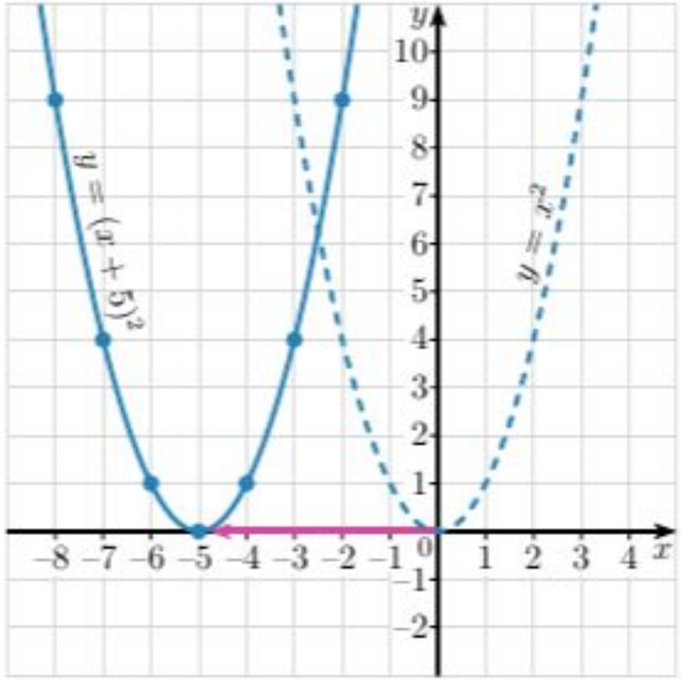


Пример. По графику функции $f(x) = ax^2 + n$ определите значения коэффициентов a и n и восстановите формулу, задающую эту функцию.





x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
$f(x) = (x+5)^2$	9	4	1	0	1	4	9



Утверждение. *Графиком функции* $f(x) = (x - m)^2$ *является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке* $(m; 0)$. *Эта парабола получается смещением параболы* $y = x^2$ *вдоль оси* x *на* $|m|$ *единиц вправо или влево, в зависимости от знака* m.

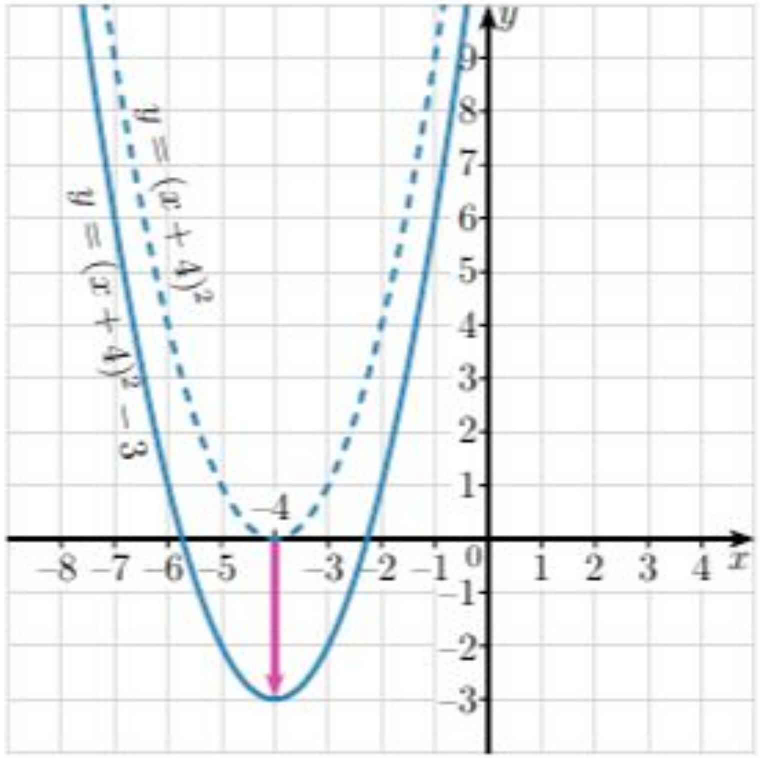
Контрольный вопрос. Найдите координаты вершины параболы, являющейся графиком функции:

а) $f(x) = (x - 2)^2$;

б) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$;

в) $f(x) = (x + 3{,}5)^2$;

г) $f(x) = (6 - x)^2$.



Сформулируем в общем случае.

Утверждение. *График функции вида $y = (x - m)^2 + n$ получается из параболы $y = x^2$ смещением на $|m|$ единиц вдоль оси x (вправо при $m > 0$, влево при $m < 0$) и на $|n|$ единиц вдоль оси y (вверх при $n > 0$, вниз при $n < 0$). Вершина получившейся параболы находится в точке $(m; n)$.*

Задача 1. Постройте график функции $y = (x+5)^2$.

Задача 2. Постройте график функции $y = (4-x)^2$

Задача 3. Найдите координаты вершины параболы, являющейся графиком функции $y = (x+4)^2$.

Задача 4. Найдите координаты вершины параболы, являющейся графиком функции $y = -(x-6)^2$.

Задача 5. Найдите координаты вершины параболы, являющейся графиком функции $y = (x-1)^2 + 6$.

Задача 6. Постройте график функции $y = -(x-1)^2$.

Задача 7. Постройте график функции $y = (x+5)^2 + 1$.

Задача 8. Постройте график функции $y = 5(x+5)^2$.

Задача 9. Постройте график функции $y = -2(x+5)^2 + 3$.

Домашняя работа

Задача 1. Постройте график функции $y = (x - 6)^2$.

Задача 2. Постройте график функции $y = (x + 1)^2$.

Задача 3. Найдите координаты вершины параболы, являющейся графиком функции $y = (x + 125)^2 - 31$.

Задача 4. Постройте график функции $y = 2(x - 7)^2 - 5$.

Задача 5. Постройте график функции $y = -3(x + 5)^2 - 1$.

Задача 1. Выберите функции, графиками которых являются параболы с ветвями, направленными вниз.

1) $y = 4x^2 + 3x + 7$; 2) $y = 7x - x^2 + \frac{1}{2}$; 3) $y = 5 + 11x - x^2$; 4) $y = 3x^2 - 9x - 0{,}5$;

5) $y = 3x - 5$.

Задача 2. Во сколько раз необходимо растянуть параболу $y = x^2$ вдоль оси ординат, чтобы получить параболу $y = 4x^2$?

Задача 3. Какую из парабол можно получить при помощи сдвигов параболы $y = -6x^2$?

1) $y = 6x^2 + 3x + 7$; 2) $y = 3x^2 - 6x - 0{,}5$; 3) $y = -6x^2 + 5x$; 4) $y = -6x + 4 - x^2$.

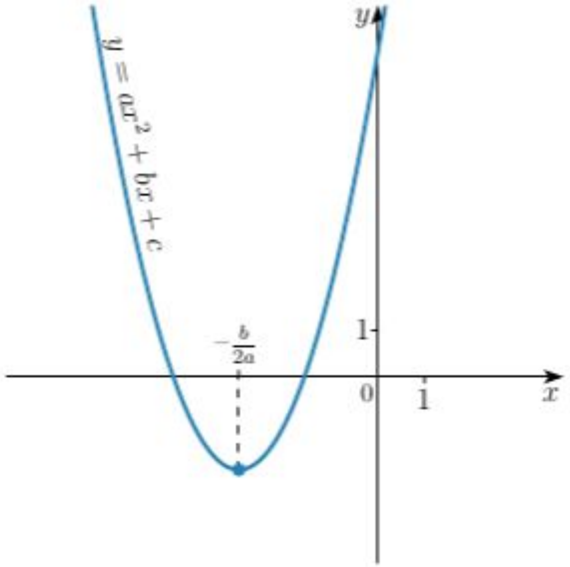
Задача 4. Выделите полный квадрат из правой части уравнения $y = x^2 + 10x + 28$ и найдите координаты вершины параболы, заданной этим уравнением. Постройте эту параболу.

Задача 5. Приведите уравнение $y = 3x^2 - 12x + 3$ к виду $y = a(x - m)^2 + n$ и найдите координаты вершины параболы, заданной этим уравнением.

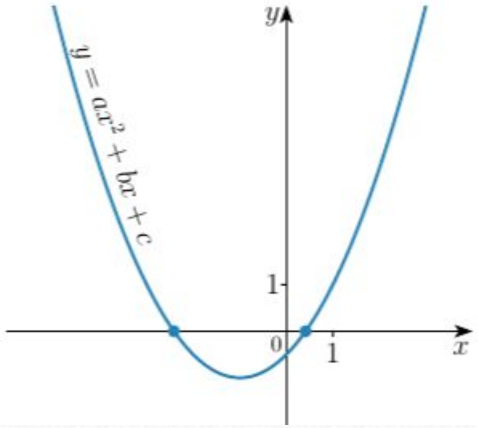
Задача 6. Приведите уравнение $y = \frac{x^2}{5} - x + \frac{1}{2}$ к виду $y = a(x - m)^2 + n$ и найдите координаты вершины параболы, заданной этим уравнением. Постройте эту параболу.

Ключевые точки для построения графика квадратичной функции

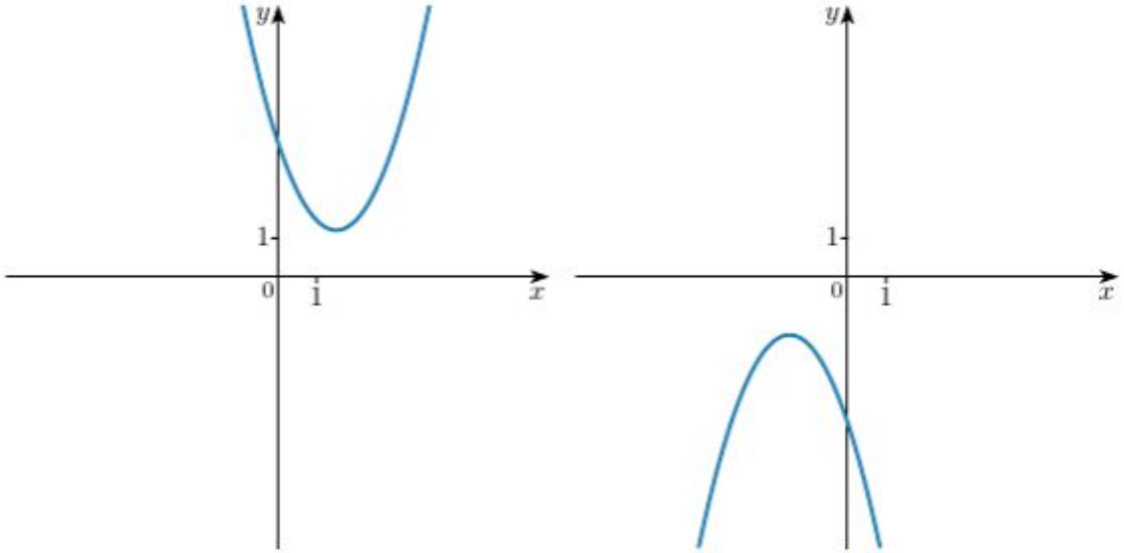
Утверждение. *Координата по оси x вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Координату y_0 можно вычислить, подставив значение x_0 в формулу, задающую функцию.*



Теперь давайте поймём, как находить точки пересечения параболы с осью x. Ось x совпадает с прямой $y = 0$. Поэтому координаты этих точек по оси y равны нулю, а координаты по оси x — это нули функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, то есть корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.



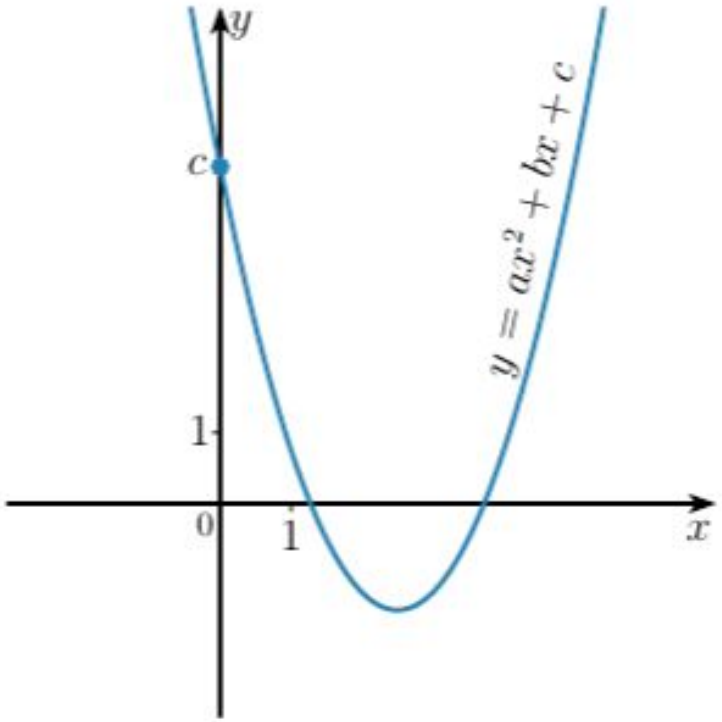
Конечно, нулей функции может и не существовать — в этом случае парабола не пересечёт ось абсцисс.



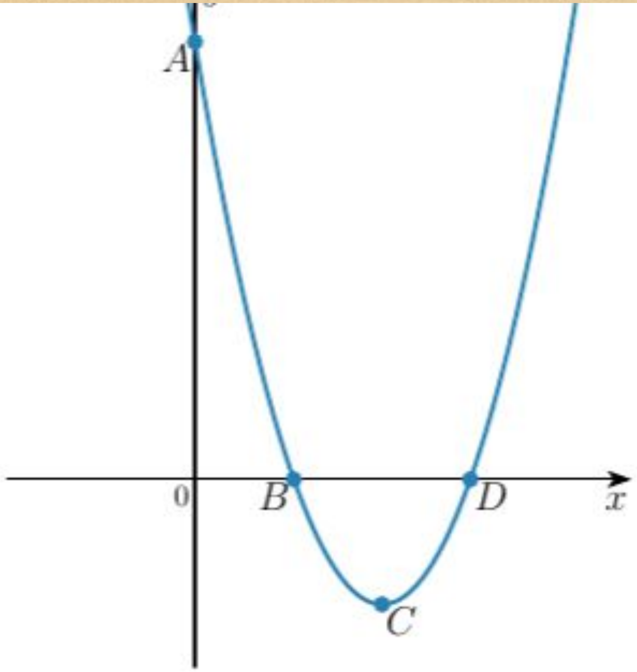
Утверждение. *Абсциссы точек пересечения параболы* $y = ax^2 + bx + c$ *с осью* x *— это корни уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$. *Если корней нет, значит парабола не пересекает ось* x.

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c.$$

Значит, парабола пересекает ось y в точке $(0; c)$.



Утверждение. *Ордината точки пересечения параболы с осью ординат равна свободному члену квадратного трёхчлена.*



1) вершина параболы

2) точка пересечения с осью абсцисс

3) точка пересечения с осью ординат

A	B	C	D

Пример. Найдите ключевые точки параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.

Базовый уровень. Домашняя работа

Задача 1. Найдите координаты вершины параболы $y = 4x^2 - 3x + 2$.

Задача 2. Отметьте ключевые точки графика функции $y = x^2 + 7x + 6$ и постройте его.

Задача 3. Отметьте ключевые точки графика функции $y = -x^2 + 3x - 2$ и постройте его.

Задача 4. Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$ при помощи ключевых точек.

Задача 5 Выделите полный квадрат из правой части уравнения $y = x^2 + 4x - 2$ и найдите координаты вершины параболы, заданной этим уравнением. Постройте эту параболу.