КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА

Кривой 2-го порядка называется линия на плоскости, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

Впервые кривые второго порядка изучались одним из учеников Платона. Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится конусная поверхность. Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры, а именно эллипс, окружность, парабола, гипербола и несколько вырожденных фигур

Историческая справка

В истории развития учения о кривых этот способ является первым. Греки определяли кривые второго порядка как сечения кругового конуса.

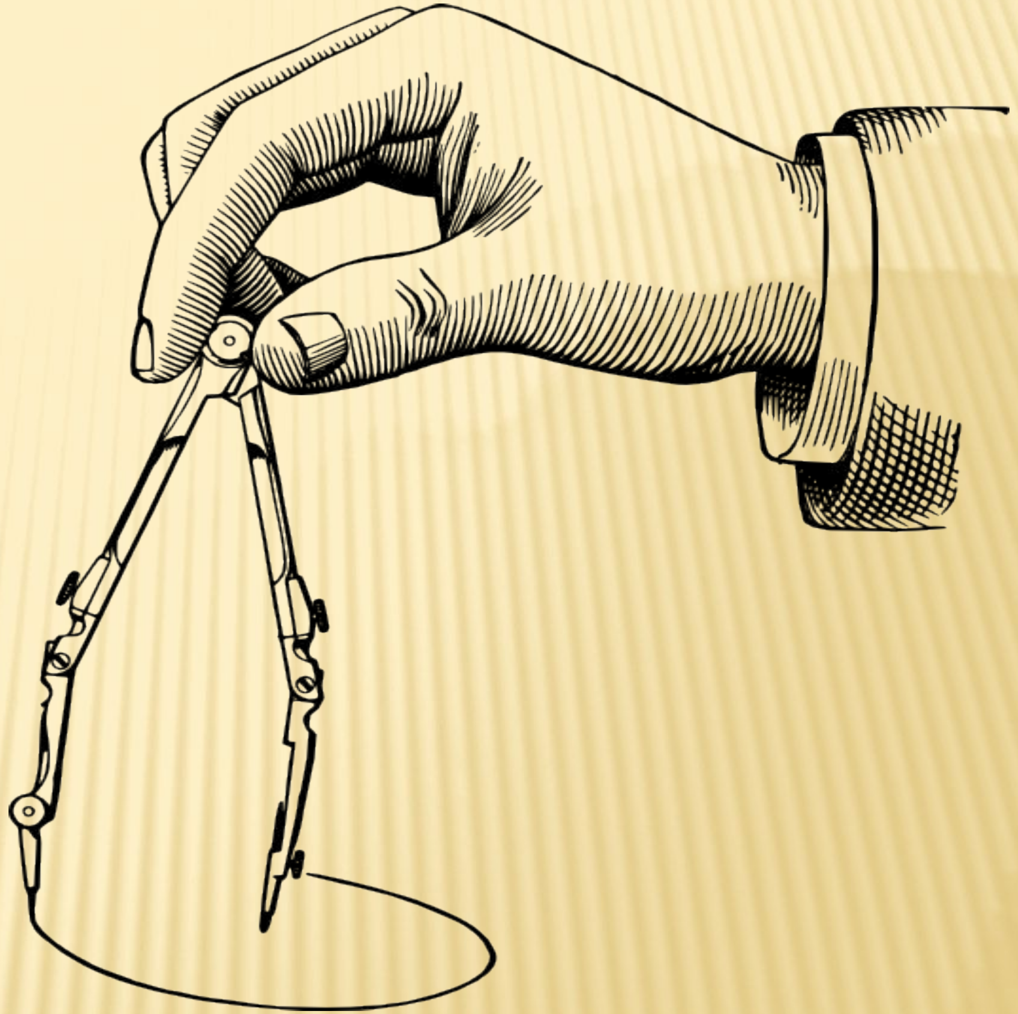
Таково же происхождение кривых Персея, получаемых в результате сечений плоскостью поверхности тора. Эвольвента круга может быть определена как линия пересечения поверхности касательных к винтовой линии, перпендикулярной к её оси и т.д. Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII, когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической.

Ещё позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости — по эллипсу, а по достижении второй космической скорости тело по параболе покинет поле притяжения Земли.

Окружность

(1) Окружность' — геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.

(2) Окружность' - Геометрическая фигура на плоскости, образованная множеством точек, равноудалённых от данной (её центра).



Эллипс

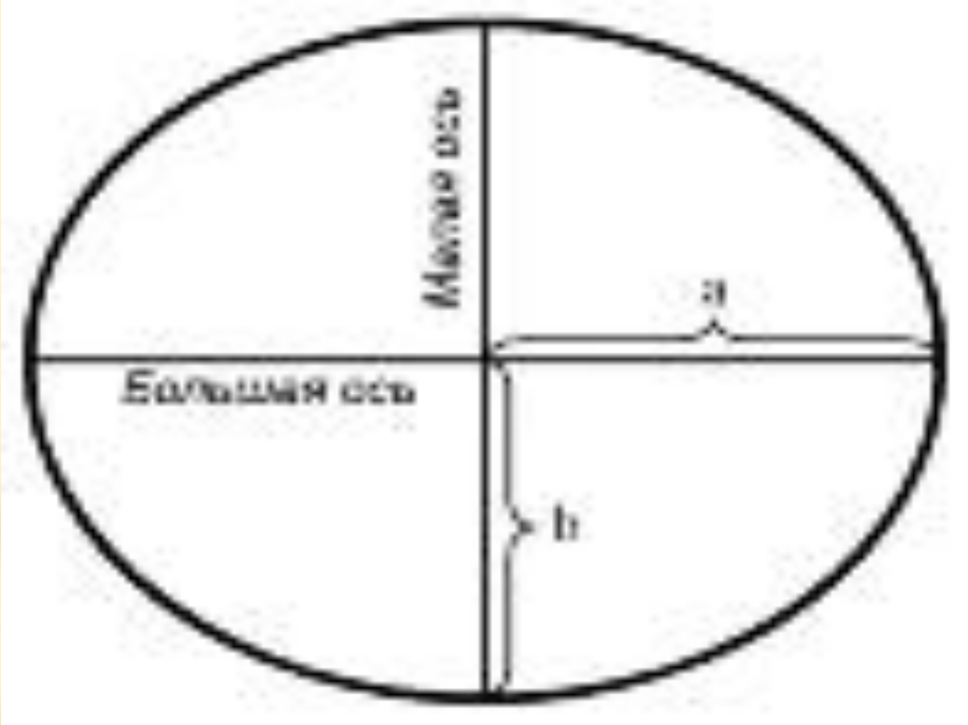
Эллипс (др.-греч. — опущение, недостаток, в смысле недостатка эксцентриситета до 1) — геометрическое место точек M Евклидовой плоскости.

Для которых сумма расстояний до двух данных точек F1 и F2 (называемых фокусами) постоянна и больше расстояния между фокусами, то есть

$| F_1M | + | F_2M | = 2a$, причем $| F1F2 | < 2a$.

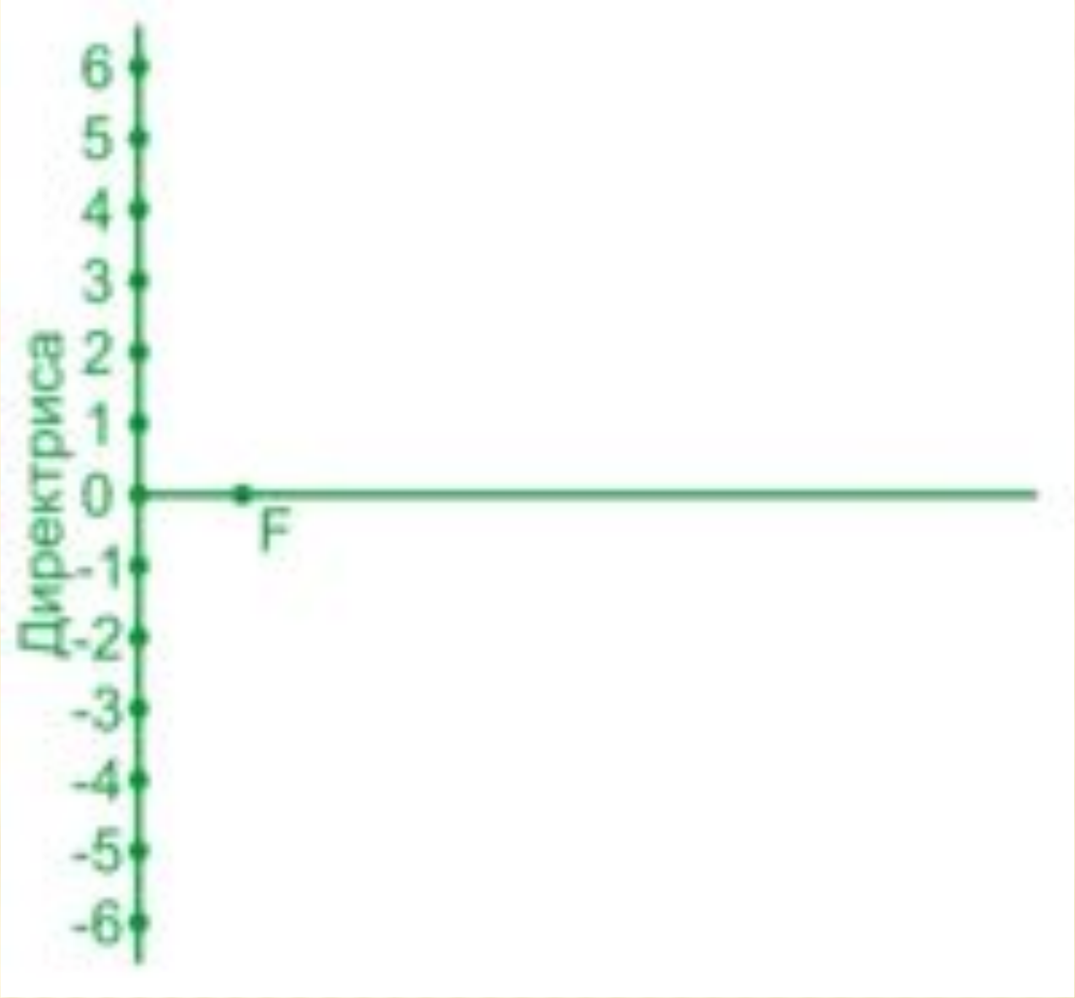
Окружность является частным случаем эллипса. Наряду с гиперболой и параболой, эллипс является коническим сечением и квадрикой.

Эллипс также можно описать как пересечение плоскости и кругового цилиндра или как ортогональную проекцию окружности на плоскость.



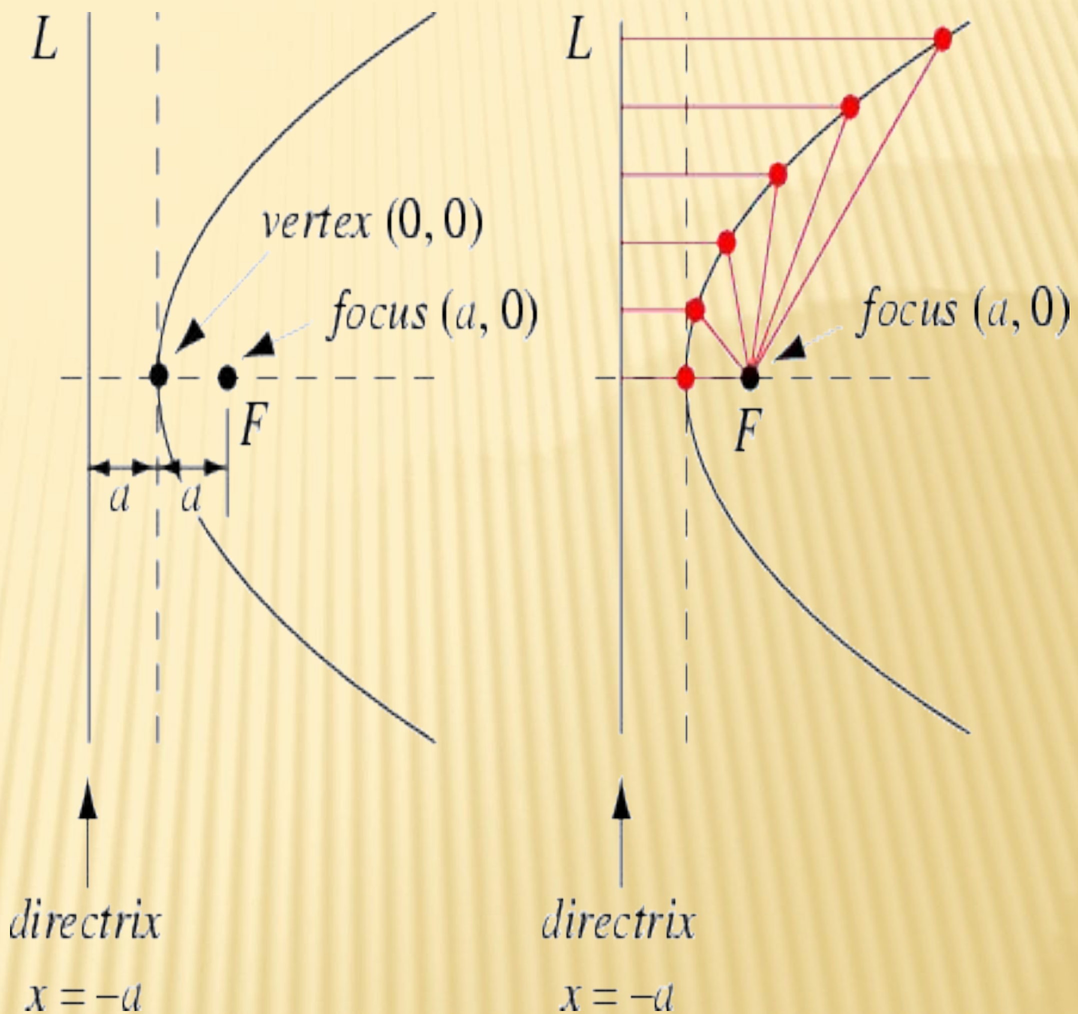
Парабола

Парабола (греч. — приложение) — геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой (называемой директрисой параболы) и данной точки (называемой фокусом параболы)

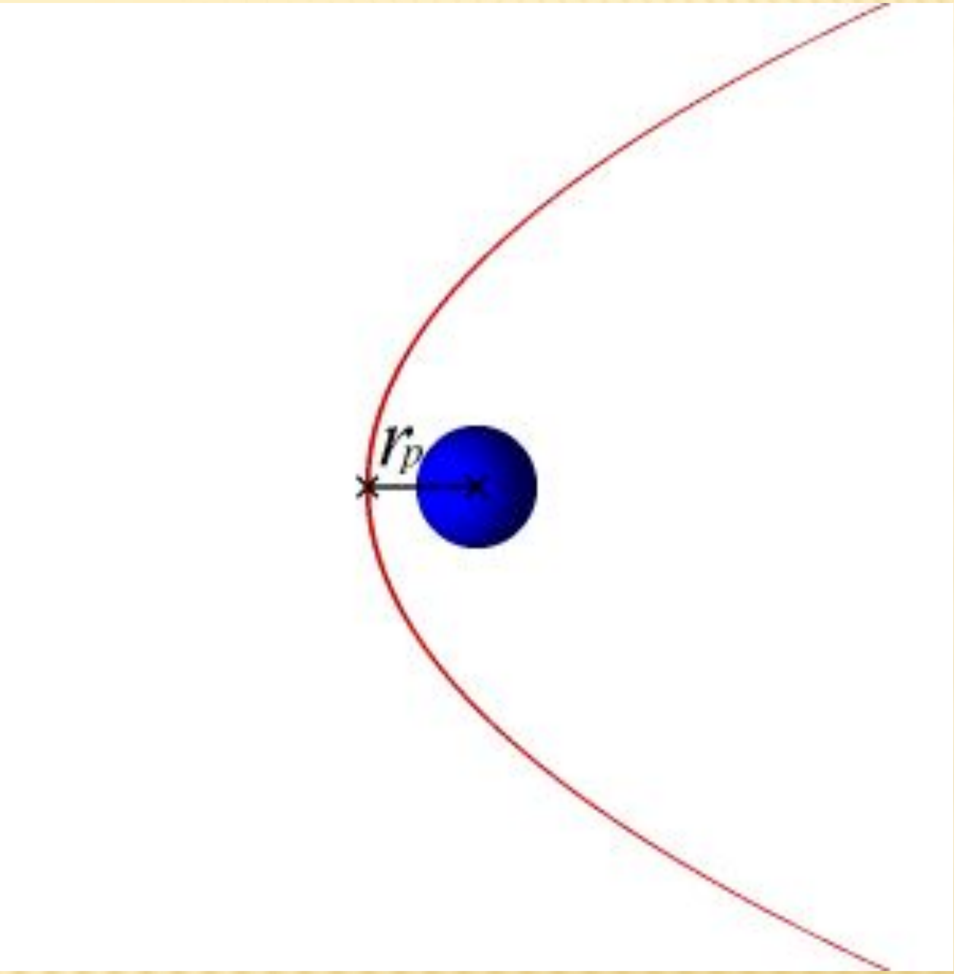


Оптическое свойство. Пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.

Директриса — прямая, лежащая в плоскости конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы) и обладающая тем свойством, что отношение расстояния от любой точки кривой до фокуса кривой к расстоянию от той же точки до этой прямой есть величина постоянная, равная эксцентриситету



Наряду с эллипсом и гиперболой, парабола является коническим сечением. Она может быть определена как коническое сечение с единичным эксцентриситетом.

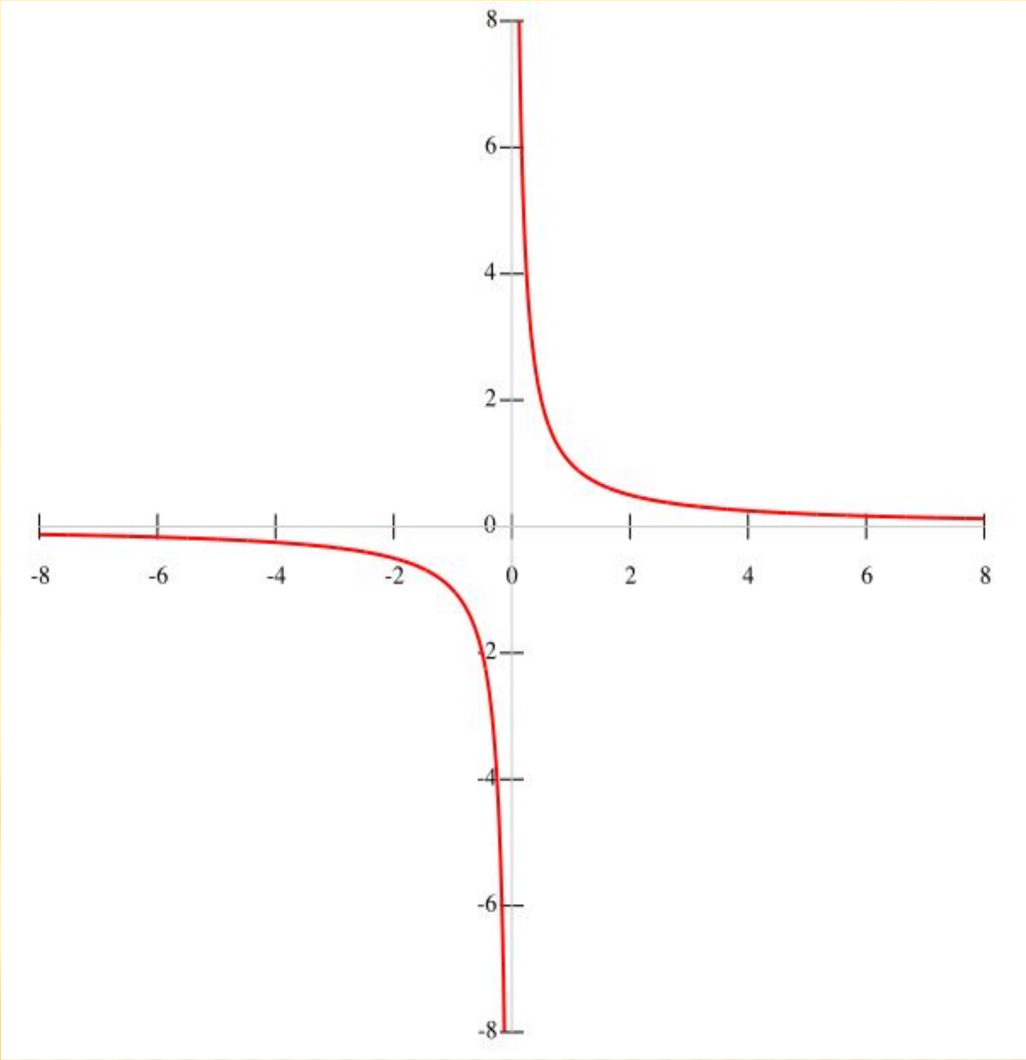


Гипербола

Гипербола (др.-греч. — «бросать», «сверх») — геометрическое место точек M Евклидовой плоскости, для которых абсолютное значение разности расстояний от M до двух выделенных точек F_1 и F_2 (называемых фокусами) постоянно. Точнее,

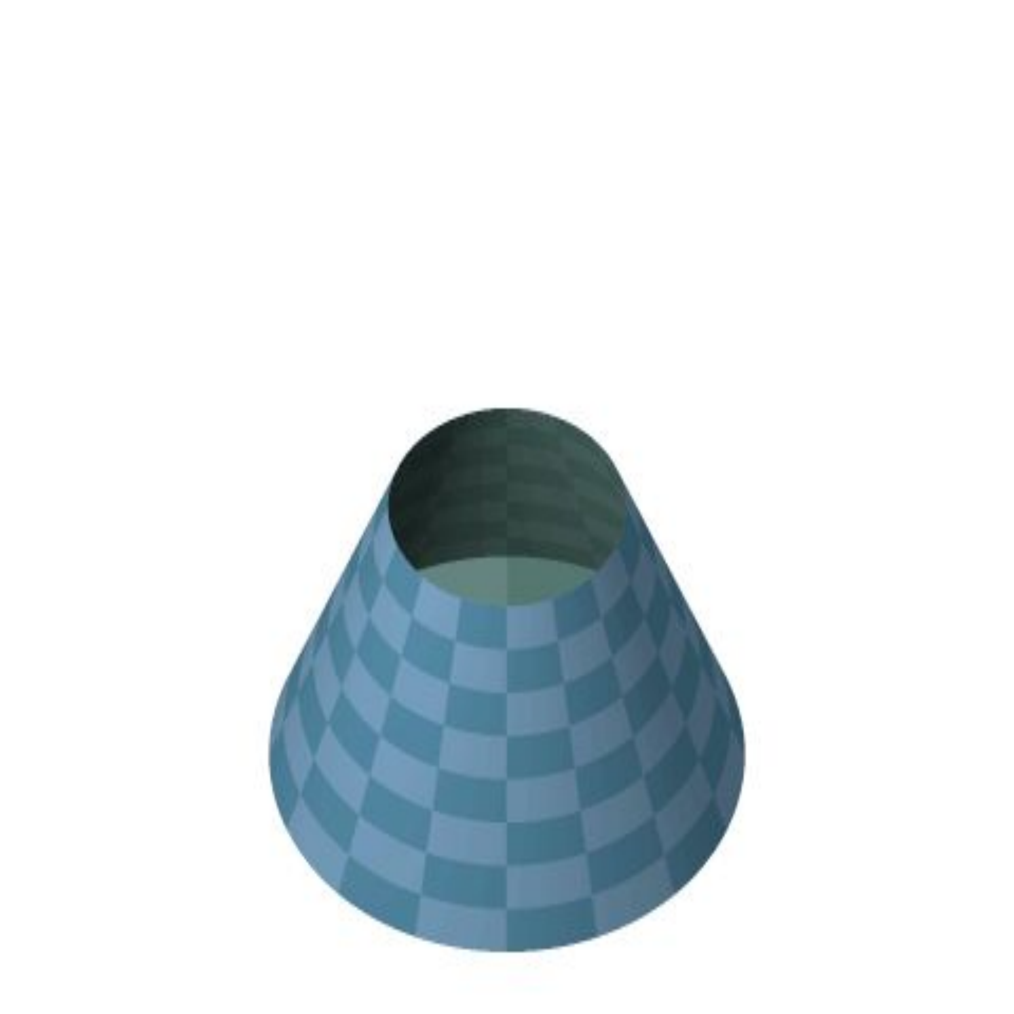
$$\left||F_1M| - |F_2M|\right| = 2a$$

причем $|F_1F_2| > 2a > 0$.



Наряду с эллипсом и параболой, гипербола является коническим сечением и квадрикой. Гипербола может быть определена как коническое сечение с эксцентриситетом, большим единицы.

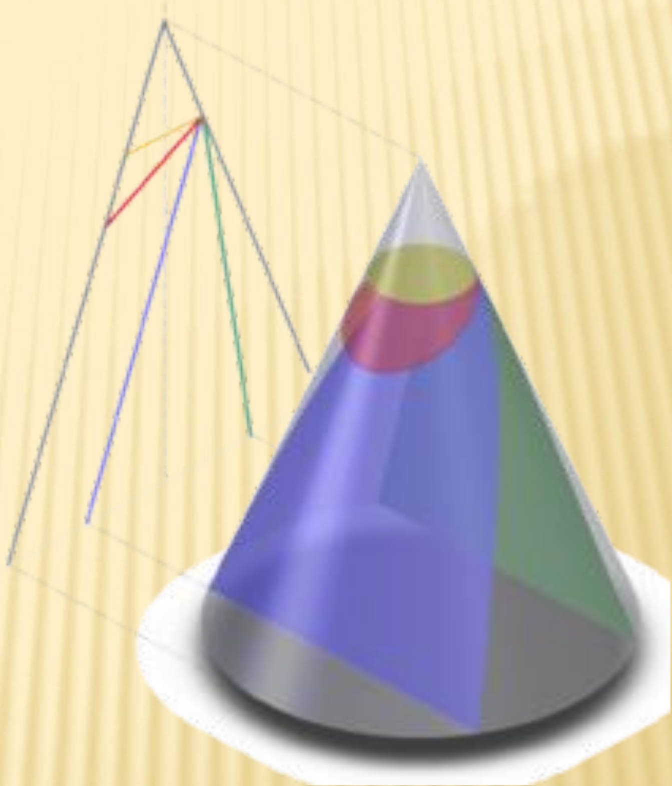
Квадрика — проективное алгебраическое многообразие, которое можно задать однородным квадратным уравнением



Коническое сечение или коника есть пересечение плоскости с круговым конусом.

Существует три главных типа конических сечений: эллипс, парабола и гипербола, кроме того существуют вырожденные сечения: точка, прямая и пара прямых.

Окружность можно рассматривать как частный случай эллипса.



Кривая второго порядка называется вырожденной, если $\Delta = 0$. Могут возникать следующие варианты:

вещественная точка на пересечении двух мнимых прямых (вырожденный эллипс) — при условии $D > 0$;

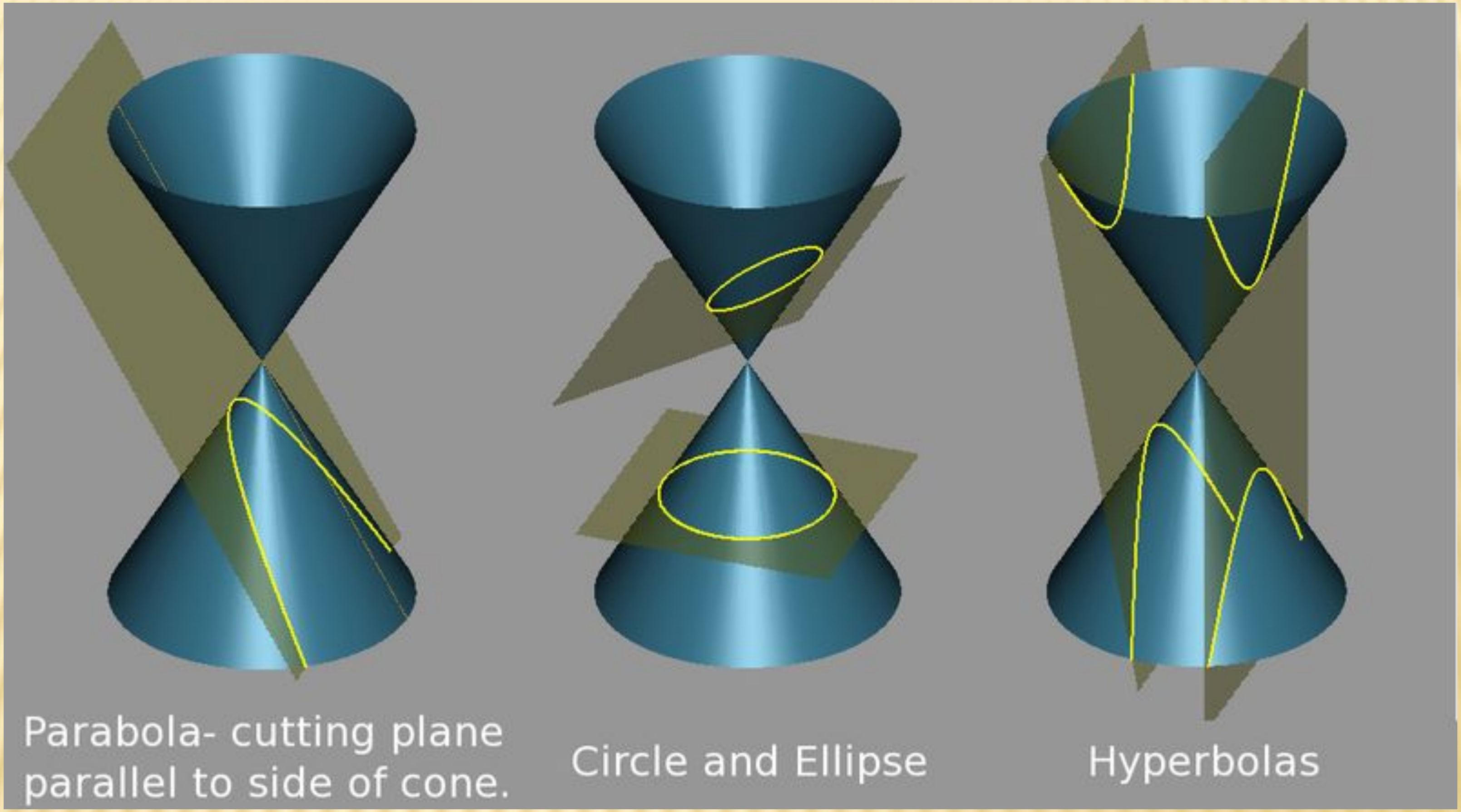
пара вещественных пересекающихся прямых (вырожденная гипербола) — при условии $D < 0$;

вырожденная парабола — при условии $D = 0$:

пара вещественных параллельных прямых — при условии $B < 0$;

одна вещественная прямая (две слившиеся параллельные прямые) — при условии $B = 0$;

пара мнимых параллельных прямых (ни одной вещественной точки) — при условии $B > 0$.


Parabola- cutting plane parallel to side of cone.
Circle and Ellipse
Hyperbolas

Кривая второго порядка называется вырожденной, если $\Delta = 0$. Могут возникать следующие варианты:

вещественная точка на пересечении двух мнимых прямых (вырожденный эллипс) — при условии $D > 0$;

пара вещественных пересекающихся прямых (вырожденная гипербола) — при условии $D < 0$;

вырожденная парабола — при условии $D = 0$:

пара вещественных параллельных прямых — при условии $B < 0$;

одна вещественная прямая (две слившиеся параллельные прямые) — при условии $B = 0$;

пара мнимых параллельных прямых (ни одной вещественной точки) — при условии $B > 0$.